Открытая олимпиада школьников по математике

9 класс, 2021 год

1. Пусть x, y, z — попарно взаимно простые трёхзначные натуральные числа. Какое наибольшее значение может принимать НОД $(x + y + z, xyz)$?

2. На окружности отмечены 10 точек. Любые три из них образуют три вписанных угла. Петя посчитал количество различных значений, которые принимают эти углы. Какое наибольшее число могло у него получиться?

3. Пусть $f(x)$ — квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. При этом $f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2}) = 4$. Найдите $f(\sqrt{10}) - f(\sqrt{7})$.

4. Докажите, что уравнение $15^x + 29^y + 43^z = t^2$ не имеет решений в натуральных числах.

5. В треугольнике ABC отмечены середины сторон $AB = 40$ и $BC = 26$ — точки K и L соответственно. Оказалось, что четырёхугольник $AKLC$ — описанный. Найдите площадь треугольника ABC.

6. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy+yz+xz = 12$. Найдите наименьшее возможное значение $x + y + z$.

7. Из точки K на стороне AC треугольника ABC опустили перпендикуляры KL_1 и KM_1 на стороны AB и BC соответственно. Из точки L_1 опустили перпендикуляр L_1L_2 на BC, а из точки M_1 — перпендикуляр M_1M_2 на AB. Оказалось, что треугольники BL_1M_1 и BL_2M_2 подобны (точка L_1 в первом треугольнике соответствует точке M_2 во втором). Кроме того, $BL_2 = 6$ и $L_2M_1 = 4$. Найдите L_1L_2.

8. Можно ли в прямоугольной таблице 6×8 расставить натуральные числа от 1 до 48 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел была чётной?