

Открытая олимпиада школьников по математике

8 класс, 2021 год

1. Петя придумал приведённое квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, корнями которого являются числа x_1 и x_2 . Он сообщил Васе три из четырёх чисел p , q , x_1 , x_2 , не указав, где какое. Это оказались числа 1, 2, -6 . Каким было четвёртое число?
2. Докажите, что уравнение $16^x + 21^y + 26^z = t^2$ не имеет решений в натуральных числах.
3. Можно ли разбить квадрат на 14 равновеликих треугольников, с общей вершиной O и остальными вершинами на границе квадрата?
4. По круговой трассе с равными постоянными скоростями движутся три бегуна. Когда два бегуна встречают друг друга, они мгновенно разворачиваются и начинают бежать в противоположные стороны.
В какой-то момент первый бегун встретился со вторым. Через 20 минут второй бегун впервые встретился с третьим. Ещё через полчаса третий бегун впервые встретился с первым.
За сколько минут один бегун пробегает всю трассу?
5. В равнобедренной трапеции $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются на основании AD . $AB = 50$, $BC = 128$. Найдите площадь трапеции.
6. Натуральные числа x , y , z таковы, что $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z) \cdot \text{НОК}(\text{НОД}(x, y), z) = 1400$. Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z)$?
7. На острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. 50 жителей острова, среди которых есть как женщины, так и мужчины, собрались у костра. Каждый из них произнёс либо «Все мужчины у этого костра — каннибалы», либо «Все женщины у этого костра — вегетарианки», причём обе фразы прозвучали. Какое наибольшее число вегетарианок могло быть у костра?
8. Можно ли в прямоугольной таблице 8×8 расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел была чётной?