

Открытая олимпиада школьников по математике

5–7 классы, 2021 год

1. Докажите, что ребус $КУСЬ + УКСЬ = УКСУС$ не имеет решений. (В ребусе одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, разные — разными.)

2. В некоторой фирме 20% самых полезных сотрудников выполняют 80% работы. Какой наименьший процент работы могут выполнять 40% самых полезных сотрудников?

Более полезным мы будем называть сотрудника, выполняющего больше работы.

3. В ряд стоят 30 человек, каждый из них — либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Их пронумеровали слева направо, после чего каждый человек с нечётным номером сказал: «Все люди с большими, чем у меня, номерами — лжецы», а каждый человек с чётным номером произнёс: «Все люди с меньшими, чем у меня, номерами — лжецы».

Сколько могло быть лжецов? Если правильных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH . Оказалось, что $AB = CH$. Точка K такова, что $\angle BKC = \angle BCK$ и $\angle ABK = \angle ACB$. Докажите, что $AK \perp AB$.

5. Можно ли в прямоугольной таблице 6×7 (6 строк и 7 столбцов) расставить натуральные числа от 1 до 42 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом вертикальном прямоугольнике 1×2 сумма чисел была чётной?

6. По круговой трассе с равными постоянными скоростями движутся три бегуна. Когда два бегуна встречают друг друга, они мгновенно разворачиваются и начинают бежать в противоположные стороны.

В какой-то момент первый бегун встретился со вторым. Через 15 минут второй бегун впервые встретился с третьим. Ещё через 25 минут третий бегун впервые встретился с первым.

За сколько минут один бегун пробегает всю трассу?

7. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\text{НОД}(\text{НОК}(a, b), c) \cdot \text{НОК}(\text{НОД}(a, b), c) = 200$. Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(\text{НОК}(a, b), c)$?

8. У Васи было 100 отрезков, ни из каких трёх нельзя было составить треугольник. Он сделал себе ещё один отрезок и теперь может составить треугольник несколькими способами. Какое наибольшее количество способов у него может быть?