

Открытая олимпиада школьников по математике

10 класс, 2021 год

1. Пусть p_1, p_2, \dots, p_7 — простые числа (не обязательно различные). Какое наибольшее целое значение может принимать выражение

$$\sum_{i=1}^{97} \frac{p_i}{p_i^2 + 1} = \frac{p+1}{p_1^2+1} + \frac{p_2}{p_2^2+1} + \dots + \frac{p_{97}}{p_{97}^2+1}?$$

2. Сумма синусов пяти углов из промежутка $[0; \frac{\pi}{2}]$ равна 3. Какие наибольшее и наименьшее целые значения может принимать сумма их косинусов?

3. У Миши есть 10 карточек, на каждой написана одна буква. Он может составить из них $7! = 5040$ различных десятибуквенных слов. Сколько у него может быть различных букв на карточках? (Приведите все варианты и докажите, что других нет).

4. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки A_1 и A_2 такие, что $BA_1 = 6$, $A_1A_2 = 8$, $CA_2 = 4$. На стороне AC отмечены точки B_1 и B_2 такие, что $AB_1 = 9$, $CB_2 = 6$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке K , а AA_2 и BB_2 — в точке L . Точки K , L и C лежат на одной прямой. Найдите B_1B_2 .

5. $P(x)$ — многочлен четвёртой степени с целыми коэффициентами, старший из которых положительный. При этом $P(\sqrt{3}) = P(\sqrt{5})$. Найдите x , при котором (или при которых) $P(x)$ принимает наименьшее значение.

6. Последовательность задана начальными условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 1,5$, $x_3 = 2$ и соотношением $x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{x_{n-2}}{4} + \frac{x_{n-3}}{4}$. Докажите, что x_{1001} и x_{1000} отличаются менее чем на 10^{-300} .

7. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , точка O — центр невписанной окружности, касающейся стороны AC , отрезки AC и OI пересекаются в точке K .

Оказалось, что $OI = 50$, $IK = 18$, $AK = 24$. Найдите длину биссектрисы угла B в треугольнике ABC .

8. В некоторой стране 100 городов. Каждый из них связан двусторонним авиасообщением с тремя другими городами. При этом из любого города можно добраться в любой другой, возможно, с пересадками. Вася хочет добраться из города А в город Б. Какого наименьшего числа перелётов ему гарантированно хватит?