

Открытая олимпиада школьников по математике**9 класс, 2020 год**

1. Назовём число *хорошим*, если все его цифры различны и оно делится на 37. Найдите количество хороших трёхзначных чисел.
2. Сколькими способами можно покрасить буквы слова КОЛОБОК в синий, красный и зелёный цвета так, чтобы во-первых одинаковые буквы были разного цвета, а во-вторых буквы, стоящие рядом, тоже были бы разного цвета?
3. Решите уравнение $3^x - 2^y = 7$ в целых неотрицательных числах.
4. На стороне AC правильного треугольника ABC отмечена её середина M , на стороне BC отметили точку L , а на стороне AB — точку K , так что сумма длин $ML + LK + KC$ минимальна. Найдите отношение $KB : KA$.
5. Докажите следующее неравенство для положительных чисел a, b, c :

$$\frac{1}{a + 2b + 3c} + \frac{1}{b + 2c + 3a} + \frac{1}{c + 2a + 3b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

6. Точки A, B и C лежат на окружности с центром в точке O . Луч OB вторично пересекает описанную окружность треугольника AOC в точке D , причём точка B оказалась внутри этой окружности. Докажите, что AB — биссектриса угла DAC .
7. Квадратные трёхчлены $g(x)$ и $h(x)$ имеют одинаковые старшие коэффициенты, а их графики касаются графика квадратного трёхчлена $f(x)$. Докажите, что абсцисса точки пересечения графиков $g(x)$ и $h(x)$ лежит точно между абсциссами упомянутых точек касания.
8. Хромой король может ходить вправо, вниз, вправо вниз или влево вниз на одну клетку. Сколько у него способов добраться из левой верхней клетки доски 3×100 в правую нижнюю?
Размер таблицы 3×100 означает, что в таблице 3 строки и 100 столбцов.