

Открытая олимпиада школьников по математике

8 класс, 2020 год

1. Вася задумал число и записал на доске, во-первых, задуманное число увеличенное на 10%; во-вторых, задуманное число, уменьшенное на 10%; в-третьих, ещё какое-то число. Всегда ли Петя сможет по этим данным узнать Васино число?

2. В подарок на Восьмое марта Вася и Петя заказали пятнадцати одноклассницам воздушные шарик. Каждая девочка должна зайти в класс и выбрать себе четыре шарика, причём девочка будет довольна, только если её шарик все либо одного цвета, либо все разных цветов. Вася и Петя знают, что в магазине есть шарик четырех цветов, но выбрать конкретные цвета при заказе нельзя. Какое наименьшее количество шариков нужно заказать ребятам, чтобы все девочки остались довольны?

3. Внутри трапеции $ABCD$ к основанию AD проведена высота BH . Оказалось, что площадь треугольника CDH составляет половину площади всей трапеции. Докажите, что трапеция равнобедренная (равнобокая).

4. Решите уравнение $a + b + \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = 997$, если известно, что 997 — простое число.

5. На доске было написано число, состоящее из 99 пятёрок. С числом на доске разрешается совершать следующие операции:

1. уменьшать две соседние ненулевые цифр на 1;
2. уменьшать две ненулевые цифр, между которыми стоят ровно две цифр, на 1;
3. менять местами две цифр, между которыми стоит ровно 5 цифр.

Если после выполнения такой операции в начале числа оказались нули, они исчезают.

После выполнения некоторого количества таких операций на доске оказалось однозначное число. Какое именно?

6. Три различных числа a, b, c таковы, что $4a + 2b + c = 0$. Вася составил шесть квадратных уравнений, в каждом из которых все эти три числа являются коэффициентами, но в разном порядке. Какое наибольшее количество этих уравнений может не иметь корней?

7. В квадрате $ABCD$ отмечены точки M и N такие, что треугольник AMN — равносторонний. Могут ли при этом все треугольники ABM, BCM, CMN, CDN и ADN быть равнобедренными?

8. Шахматная фигура великий султан бьёт клетки, закрашенные на рисунке серым. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга великих султанов можно расставить на клетчатой доске 9×9 ?

