Открытая олимпиада школьников по математике

7 класс, 2020 год

1. Существуют ли такие натуральные числа a, b и c что $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$?

2. В подарок на Восьмое марта Вася и Петя заказали пятнадцати одноклассницам воздушные шарики. Каждая девочка должна зайти в класс и выбрать себе три шарика, причём девочка будет довольна, только если её шарики все либо одного цвета, либо все разных цветов. Вася и Петя знают, что в магазине есть шарики трёх цветов, но выбрать конкретные цвета при заказе нельзя. Какое наименьшее количество шариков нужно заказать ребятам, чтобы все девочки остались довольны?

3. Найдите наибольшее четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, которое делится на каждую из своих цифр.

4. Отрезок длины 11 разделили на пять отрезков с натуральными длинами. Докажите, что из каких-то трёх можно составить треугольник.

5. В правильном треугольнике ABC точка M — середина стороны BC. Кроме того, луч CB — биссектриса угла ACD. Прямая MK пересекает сторону AB в точке K, а луч CD в точке L. Докажите, что $AK+CL=AC$.

6. Имеет ли решение уравнение $a+b+\text{НОД}\,(a,b)+\text{НОК}\,(a,b)=512$ в натуральных числах при $a\neq b$?

7. Жители племени мумба всегда говорят правду, а жители племени юмба всегда лгут. Некоторое количество членов этих племён расставили на клетчатой площади 10×10 (в каждой клетке обязательно стоит ровно один человек). Соседями будем называть людей, стоящих на клетках, имеющих общую сторону или угол.

Каждый из людей, стоящих на клетках площади, сказал, что среди его соседей нет его соплеменников. Какое наибольшее количество членов племени мумба могло быть на площади?

8. Пять мальчиков собирали грибы, никакие двое не собрали поровну и каждый собрал меньше 21% от общего числа собранных грибов. Какое наименьшее число грибов могло быть собрано?