

Открытая олимпиада школьников по математике

7 класс, 2019 год

1. Существуют ли такие два натуральных числа x и y , имеющие одинаковое количество натуральных делителей, что $x > y$, а сумма всех делителей x (включая единицу и само число) меньше суммы натуральных делителей y (включая единицу и само число)?

2. Рыцари и лжецы сыграли в «испорченный телефон» по следующим правилам: первый в цепочке называет какое-то число на ушко второму, второй — третьему и так далее. Последний в цепочке озвучивает число вслух. При этом рыцарь называет то же самое число, которое ему сказали, а лжец добавляет или вычитает единицу.

Первый человек (лжец) назвал своему соседу число 7. Последний человек озвучил число 3.

После этого участники сыграли в эту игру ещё раз, однако сообщали друг другу числа по цепочке в обратную сторону. Последний человек назвал своему соседу число 5, а первый в конце игры озвучил число 2.

Кем был последний человек в цепочке?

3. У Васи была коллекция покемонов. В феврале цены на всех покемонов упали на 10%. Затем в марте покемоны снова подорожали, каждый по-своему, и общая стоимость Васиной коллекции стала такой же, как в конце января. При этом состав коллекции не менялся. Докажите, что какой-то покемон подорожал больше, чем на 11%.

4. Придумайте два различных набора из восьми натуральных чисел каждый, такие что сумма чисел в каждом наборе равна их произведению.

Для разных наборов сумма и произведение могут быть разными. Числа в наборах могут повторяться.

5. Из натурального числа вычли его наибольшую цифру. Затем из получившегося числа также вычли его наибольшую цифру, и т. д. После шести таких операций получилось число 100. Какое число могло быть написано изначально? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ на стороне AD взята точка X такая, что отрезки XB и XC делят четырёхугольник на три равных неравносторонних треугольника. Докажите, что точка X — середина стороны или один из углов треугольника равен 60° .

В этой задаче можно пользоваться тем, что сумма углов треугольника составляет 180° .

7. Внутри семиугольника $ABCDEFG$ отметили точку O . Её соединили отрезками со всеми вершинами семиугольника, разбив его таким образом на семь треугольников. Все эти треугольники оказались прямоугольными. Докажите, что в одном из этих треугольников прямой угол лежит при вершине O .

8. Фигура недослон бьёт на одну клетку по диагонали. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга недослонов можно расставить на шахматной доске 7×7 ?