

Открытая олимпиада школьников по математике

10 класс, 2017 год

1. Что больше: $\frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{150}$ или $\frac{2}{150} + \frac{2}{151} + \dots + \frac{2}{250}$?
2. На доске записали дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$, а также все остальные дроби, получающиеся из неё перестановкой чисел a, b, c, d , кроме имеющих тождественно нулевой знаменатель. Могло ли так получиться, что среди выписанных дробей ровно 7 различных?
3. Один двоечник написал следующие неверные формулы синуса и косинуса суммы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$$

и

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta.$$

В свое оправдание он сказал, что при некоторых α и β его формулы всё же верны. Найдите все такие пары (α, β) .

4. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 10 см. Эта окружность пересекает стороны AB и BC в точках X и Y соответственно. Найдите величину $AH \cdot AB + CY \cdot BC$.
5. Вписанная окружность четырёхугольника $ABCD$ касается сторон AB, BC, CD и AD в точках E, G, H и F соответственно. Прямые EH и GF пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Оказалось, что $BK = BF$. Докажите, что $CL = CF$.
6. Последовательность задана следующими соотношениями: $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Докажите, что $x_n > \pi$.
7. Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 1. Все три коэффициента в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию из трёх элементов с разностью q . Найдите все возможные значения q , если известно, что это рациональное число и разность корней $f(x)$ равна q .
8. Таблица 10×10 заполнена нулями. За одну операцию в таблице находится минимальное число (если таких несколько — выбирается любое) и к нему, а также ко всем числам, стоящим в соседних с ним по стороне или углу клетках, добавляется единица. Какое наибольшее число может оказаться в одной из клеток таблицы через 80 операций?