

Открытая олимпиада школьников по математике

10 класс, 2016 год

1. У Коли в тетради был записан многочлен сотой степени. Коля может взять один из записанных в тетради многочленов, прибавить a к коэффициенту при k -ой степени и вычесть $2a$ из коэффициента при $(k+1)$ -й степени, после чего записать полученный многочлен в тетрадь к уже имеющимся. Могут ли у него в тетради после некоторого количества таких действий оказаться два многочлена, один из которых строго больше другого?

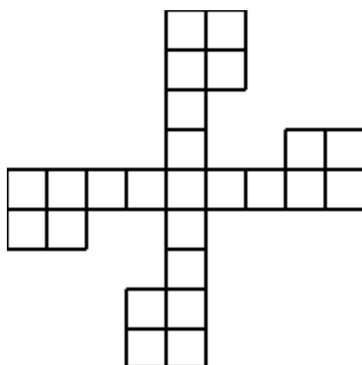
Если коэффициент при какой-то степени равен нулю, с ним тоже можно производить эту операцию.

2. Решите уравнение $f^{-1}(g(x)) = h(x)$, где $f^{-1}(x)$ — обратная к $f(x)$, если известно, что $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x + 8$, $h(x) = x + 1$.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S . Окружности S_1 и S_2 равного радиуса касаются окружности S изнутри в точках A и C соответственно. Окружность S_1 пересекается со сторонами AB и AD в точках K и N соответственно, окружность S_2 пересекается со сторонами BC и CD в точках L и M соответственно. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

4. Докажите, что сумма бесконечной арифметической прогрессии и бесконечной непостоянной геометрической прогрессии никогда не будет арифметической прогрессией.

5. Сколькими способами фигуру, изображённую на рисунке, можно раскрасить по клеткам в синий, красный и белый цвета так, чтобы соседние (т. е. имеющие общие стороны) клетки были раскрашены в разные цвета?



6. В пространстве расположен куб $1000 \times 1000 \times 1000$ с вершиной в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям. Из начала координат проведены векторы во все целочисленные точки внутри и на границе этого куба. Найдите остаток от деления суммы квадратов длин этих векторов на 13.

7. Дан треугольник ABC , точка I — центр его вписанной окружности. На лучах BI и CI соответственно отмечены такие (отличные от I) точки E и F , что $AI = AE = AF$. Докажите, что площади треугольников BIF и CIE равны.

8. В некоторой стране 100 городов и 146 авиакомпаний. Любые два города соединены двусторонними рейсами одной или нескольких авиакомпаний. Стоимость перелёта между городами, соединёнными рейсами k авиакомпаний, для всех компаний одинакова и составляет $1/k$. Оказалось, что не существует городов, между которыми с пересадкой можно добраться дешевле, чем прямым рейсом. Докажите, что можно найти маршрут с одной пересадкой, обе части которого стоят одинаково.