

# Открытая олимпиада школьников по математике

## 9 класс, 2015 год

1. В бесконечном турнире по волейболу участвуют 65 команд. Каждое утро организатор составляет расписание матчей на сегодня. Каждый день 64 команды разбиваются на пары и играют по одному матчу, одна команда отдыхает. Каждый матч заканчивается победой одной из команд, ничьих не бывает.

Докажите, что организатор может так составлять расписания, что рано или поздно обязательно появится команда, выигравшая семь матчей подряд.

2. Решите ребус  $ТОК = КОТ + КТО$ . (Разные буквы обозначают разные цифры, числа не могут начинаться с нуля.)

3. Шахматная фигура *четырёхлинейка* бьёт две вертикали и две горизонтали, соседние с клеткой, на которой она стоит. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга четырёхлинейек можно поставить на доске  $10 \times 10$ ?

4. Вася нашёл треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и составил квадратный трёхчлен  $ax^2 - bx + c$ . У этого трёхчлена нашлись два корня. Докажите, что они одновременно не могут быть меньше, чем  $1/3$ .

5. В ряд по вертикали по возрастанию выписаны числа от 1 до 101. Между ними вставляют дробные черточки разных размеров. При этом вычисление начинается с самой маленькой дробной черты и заканчивается самой большой, например,  $\frac{1}{\frac{\frac{4}{5}}{3}} = \frac{15}{4}$ .

Какое наибольшее значение может иметь полученная дробь?

6. Точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  лежат на одной прямой, причем именно в таком порядке  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  — окружности с диаметрами  $XZ$ ,  $XY$ ,  $YZ$  соответственно. Прямая  $\ell$  пересекает окружность  $\omega_1$  в точке  $A$ , потом окружность  $\omega_2$  в точке  $B$ , потом она проходит через  $Y$ , дальше она пересекает окружность  $\omega_3$  в точке  $C$ , и наконец, снова пересекает  $\omega_1$  в точке  $D$ . Докажите, что  $AB = CD$ .

7. Докажите, что если выпуклый 102-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы из каждой вершины выходило либо ровно три диагонали, либо ни одной, то количество получившихся треугольников, у которых все три стороны являются диагоналями исходного многоугольника, составит ровно 34.

8. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 13$ ,  $BC = 14$ ,  $AC = 15$ . На стороне  $AB$  отмечена точка  $K$ , на стороне  $BC$  — точка  $L$ , на стороне  $AC$  — точка  $N$ . Известно, что  $BK = \frac{14}{13}$ ,  $AN = 10$ ,  $BL = 1$ . Через точку  $N$  провели прямую, параллельную  $KL$ , она пересекла сторону  $BC$  в точке  $M$ . Найдите площадь четырёхугольника  $KLMN$ .