

## Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

## Математика, 11 класс, 2021 год

1. Петя печатает на экране компьютера пять цифр, среди которых нет нулей. Каждую секунду компьютер убирает начальную из цифр, а в конец дописывает последнюю цифру суммы четырёх оставшихся цифр. (Например, если Петя введёт 12345, то через секунду получит 23454, потом 34546 и так далее. Но он может ввести и не 12345, а какие-то другие пять цифр.) В какой-то момент Петя останавливает процесс. Какова минимально возможная сумма пяти цифр, которые могут оказаться в этот момент на экране?

2. Дан треугольник  $ABC$ .  $O_1$  — центр его вписанной окружности;  $O_2$  — центр окружности, касающейся стороны  $BC$  и продолжений двух других сторон треугольника  $ABC$ . На дуге  $BO_2$  описанной окружности треугольника  $O_1O_2B$  отмечена такая точка  $D$ , что угол  $BO_2D$  вдвое меньше угла  $BAC$ .  $M$  — середина дуги  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что точки  $D$ ,  $M$ ,  $C$  лежат на одной прямой.

3. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{32}{y^5} + \frac{48}{y^3} + \frac{17}{y} - 15, \\ \frac{1}{y} = \frac{32}{z^5} + \frac{48}{z^3} + \frac{17}{z} - 15, \\ \frac{1}{z} = \frac{32}{x^5} + \frac{48}{x^3} + \frac{17}{x} - 15. \end{cases}$$

4. Территория Тридесятого царства состоит из всех целых чисел. Княжеством будем называть множество вида  $\{ak + b | k \in \mathbb{Z}\}$ , где  $a \neq 0$  и  $b$  — некие целые числа (то есть бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию). Царь хочет разделить всю территорию царства, кроме чисел 3 и 10, на бесконечное количество непересекающихся княжеств. Возможно ли это?

5. Соревнование по бегу на *непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки  $A$  и  $B$ , после чего спортсмены бегут из  $A$  в  $B$  по более короткой дуге. Зритель купил билет на стадион и хочет, чтобы спортсмены пробежали мимо его места (тогда он сможет сделать удачную фотографию). Какова вероятность, что это случится?

6. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Что больше: сторона треугольника или суммарная длина зелёных отрезков, лежащих на сторонах треугольника?

