

Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

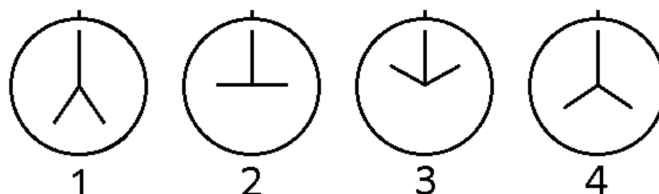
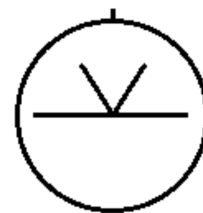
Математика, 10 класс, 2021 год

1. Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты A , B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8?
2. Дан треугольник ABC . O_1 — центр его вписанной окружности; O_2 — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника ABC . На дуге BO_2 описанной окружности треугольника O_1O_2B отмечена такая точка D , что угол BO_2D вдвое меньше угла BAC . M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что точки D , M , C лежат на одной прямой.
3. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 8 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через полтора часа после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны.
4. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-997} + \sqrt{y-932} + \sqrt{z-796} = 100, \\ \sqrt{x-1237} + \sqrt{y-1121} + \sqrt{3045-z} = 90, \\ \sqrt{x-1621} + \sqrt{2805-y} + \sqrt{z-997} = 80, \\ \sqrt{2102-x} + \sqrt{y-1237} + \sqrt{z-932} = 70. \end{cases}$$

5. Соревнование по бегу на непредсказуемую дистанцию проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке длиной 1 километр случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B , после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Найдите медианное значение длины этой дуги, то есть такое t , что длина дуги будет превышать t с вероятностью ровно 50%.

6. У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).



Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*.

Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).