Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Финал, 2022/23 год

Первый день

1. На доске написаны натуральные числа от 1 до 1000, по одному разу каждое. Вася может стереть любые два числа и записать вместо них одно: их наибольший общий делитель или их наименьшее общее кратное. Через 999 таких операций на доске осталось одно число, равное натуральной степени десятки. Какое наибольшее значение она может принимать?

2. Точка N — середина стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а точка M на стороне AB такова, что $CM \perp BD$. Докажите, что если $BM > MA$, то $2BC + AD > 2CN$.

3. Среди натуральных чисел $a_1, \ldots, a_k$ нет одинаковых, а разность между наибольшим и наименьшим из них меньше 1000. При каком наибольшем k может случиться, что все квадратные уравнения $a_i x^2 + 2a_{i+1}x + a_{i+2} = 0$, где $1 \leqslant i \leqslant k-2$, не имеют корней?

4. В $2n$ бочках налито $2n$ различных реактивов (в каждой — один реактив). Они разбиваются на n пар конфликтующих реактивов, но неизвестно, какая бочка конфликтует с какой. Инженеру нужно узнать это разбиение. У него есть n пустых пробирок. За одно действие он может долить в любую пробирку (пустую или непустую) реактив из любой бочки, других действий с реактивами он делать не может. Пока в пробирке нет конфликтующих соединений, в ней ничего не происходит. Как только среди реактивов, содержащихся в ней, появляются конфликтующие, она лопается, и больше её использовать не получится. Выливать из пробирки ничего нельзя. Как инженеру добиться своей цели?

Второй день

5. Маша взяла четыре различных положительных числа и записала шесть их попарных произведений в ряд в порядке возрастания. Могли ли все пять разностей между соседними числами этого ряда оказаться одинаковыми?

6. В Тридевятом царстве 100 городов, и каждые два города соединены не более чем одной дорогой. Однажды царь приказал ввести на каждой дороге одностороннее движение, а заодно покрасить каждую дорогу в белый или черный цвет. Министр транспорта с гордостью сообщил, что после выполнения приказа из любого города в любой другой можно добраться по дорогам, чередуя их цвета, причем так, что первая дорога в пути будет белой. Какое наименьшее количество дорог могло быть в этой стране? Добираясь из города в город, можно проезжать через промежуточные города любое число раз.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = CD = 4$. На сторонах AB и CD выбраны точки K и L соответственно таким образом, что $AK = DL = 1$. На стороне AD снаружи четырёхугольника построен треугольник AMD, в котором $AM = MD = 2$. Оказалось, что $KL = 2$. Докажите, что $BM = CM$.

8. Дано натуральное число k, большее 1. Натуральное число n, большее 1 и взаимно простое с k, назовём **правильным**, если для любого натурального делителя d $(d < n)$ числа n число $d + k$ не взаимно просто с n. Докажите, что правильных чисел — конечное количество.