Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Финал, 2021/22 год

Первый день

1. Можно ли пронумеровать вершины, рёбра и грани куба различными целыми числами от -12 до 13 так, чтобы номер каждой вершины равнялся сумме номеров сходящихся в ней рёбер, а номер каждой грани равнялся сумме номеров ограничивающих её рёбер?

2. У царя Гиерона есть 13 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны 1, 2, …, 13 кг. Ещё у него есть прибор, в который можно положить один или несколько из имеющихся 13 слитков, и он просигналит, если их суммарный вес равен ровно 46 кг. Архимед, знающий веса всех слитков, хочет написать на двух слитках их веса и за два использования прибора доказать Гиерону, что обе надписи правильны. Как действовать Архимеду?

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. На стороне AB выбрана точка P. Отрезки PC и AD пересекаются в точке Q. Точка R — середина отрезка AP. Докажите, что существует фиксированная точка X, через которую прямая RQ проходит при любом выборе точки P.

4. Натуральные числа a, b и c, большие 2022, таковы, что $a+b$ делится на $c-2022$, $a+c$ делится на $b-2022$, $b+c$ делится на $a-2022$. Какое наибольшее значение может принимать число $a+b+c$?

Второй день

5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AD и CE пересекаются в точке X. Оказалось, что $ABCX$ — параллелограмм и $BD=CX$; $BE=AX$. Докажите, что $AE=CD$.

6. Докажите, что для любого целого неотрицательного числа k, не превосходящего $\dfrac{2022\cdot 2021}{2}$, существует такие 2022 числа, что все их $\dfrac{2022\cdot 2021}{2}$ попарные суммы различны и среди этих сумм ровно k положительных.

7. Положительные числа a, b, c и d не превосходят единицы. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\geqslant\frac{1}{4}+(1-a)(1-b)(1-c)(1-d).$$

8. В кружке 42 человека, любые двое из которых имеют среди кружковцев не менее десяти общих друзей. Докажите, что найдутся двое, имеющие среди кружковцев не менее двенадцати общих друзей.