

Олимпиада «Надежда энергетики» по математике

10 класс, 2021 год

1. На координатной плоскости каждая из N прямых l_j параллельна прямой $y = x + 2021$ и пересекает кривую $y = 1/x$ ровно в двух точках $(x_1(j), y_1(j))$ и $(x_2(j), y_2(j))$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Рассмотрим два произведения

$$P_1 = y_1(1)y_1(2) \cdots y_1(N) \quad \text{и} \quad P_2 = y_2(1)y_2(2) \cdots y_2(N).$$

Решите уравнение $\operatorname{tg} z = P_1 P_2$ и выясните, как это решение зависит от N .

Если N нечетно, то $z = \pi/4 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; если N четно, то $z = \pi/4 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Выясните, может ли уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

иметь целые корни, если p и q целые нечетные.

Не может

3. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отмечены две точки, соответственно, X и Y так, что периметр треугольника AXY равен удвоенной стороне квадрата. Найдите сумму косинуса и синуса угла XAY .

$\sqrt{2}$

4. Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + y^2$, если переменные удовлетворяют неравенствам

$$|2x + y| \leq b, \quad |2x - y| \geq b$$

(где b — фиксированное вещественное число).

Если $b > 0$, то $f_{\min} = \frac{b^2}{2}$; если $b \geq 0$, то $f_{\min} = \frac{b^2}{2}$.

5. При решении некоторой задачи с натуральным параметром n получена дробь

$$\frac{101n + 25}{57n + 14}.$$

При каких n дробь можно сократить?

Дробь сократима при $n = 4 + 11a$ для любых натуральных a .