

## Олимпиада «Надежда энергетики» по математике

9 класс, 2018 год

1. При проектировании электростанции возникла необходимость решить уравнение

$$4x^4 + 4px^3 = (p - 4)x^2 - 4px + p,$$

где  $p$  — целочисленный параметр, задаваемый разработчиком. Для быстрого и надежного решения требуется, чтобы корни уравнения были рациональными числами. При каких  $p$  это верно?

2. В Царстве Колдовской Энергии на плоской равнине стоит заколдованная трансформаторная будка: наблюдателю, смотрящему параллельно земле, она видна только под углом  $90^\circ$ . В поперечном сечении будка квадратная со стороной  $L$  локтей. Опишите геометрическое место точек на равнине, из которых будка видна, и определите минимальное и максимальное расстояние, с которого видна заколдованная будка. Углом, под которым фигура  $F$  видна из точки  $P$ , называется наименьший угол с вершиной  $P$ , содержащей фигуру  $F$ . В данном случае этот угол расположен в плоскости поперечного сечения будки.

3. Найдите все функции  $f(x)$ , определенные на всей числовой оси и удовлетворяющие условию

$$f(x - y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{при всех } x, y.$$

4. Целой частью  $[x]$  вещественного числа  $x$  называется наибольшее целое  $M$  такое, что  $M \leq x$ . Например,  $[\sqrt{2}] = 1$ ,  $[2] = 2$ ,  $[\pi] = 3$ . Найдите все положительные вещественные числа  $x$ , для которых

$$x[x[x[x]]] < 2018.$$

5. Найдите количество всех упорядоченных троек  $(x, y, z)$  чисел множества  $\{1, 2, \dots, 70\}$  для которых сумма

$$x^2 + y^2 + z^2$$

кратна 7.