

**Олимпиада «Бельчонок» по математике****9 класс, 2023 год, вариант 2**

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Каждый житель уезда про каждого из остальных знает, купец он или разбойник. Как-то раз встретились 19 жителей. Трое из них сказали: «Ровно трое из всех разбойники», затем шестеро из остальных сказали: «Ровно шестеро из всех разбойники», наконец, девять из оставшихся сказали: «Ровно девять из всех разбойники». Сколько разбойников было среди встретившихся?
2. Положительные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  удовлетворяют условию  $a + bc = (a + b)(a + c)$ . Докажите, что  $b + ca = (b + c)(b + a)$ .
3. В клетчатом квадрате  $30 \times 30$  клеток отмечено 33 узла сетки (отмеченные узлы могут быть на сторонах квадрата). Верно ли, что найдутся два отрезка равной длины с вершинами в отмеченных узлах.
4. Найдите все такие простые  $p$ , что число  $5^p + 4p^4$  является точным квадратом.
5. Четырехугольник  $KLMN$  вписан в окружность. В точке  $M$  к этой окружности проведена касательная  $\ell$ . Окружность  $\omega$  проходит через точки  $K$  и  $L$  и касается прямой  $\ell$  в точке  $D$ . Прямая  $DL$  пересекает отрезок  $MN$  в точке  $E$ . Докажите, что  $LM = ME$ , если известно, что  $LN$  — касательная к окружности  $\omega$ .