

## Олимпиада «Бельчонок» по математике

### 9 класс, 2023 год, вариант 1

1. В некотором уезде живут купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. Каждый житель уезда про каждого из остальных знает, купец он или разбойник. Как-то раз встретились 28 жителей. Двое из них сказали: «Ровно двое из всех разбойники», затем четверо из остальных сказали: «Ровно четверо из всех разбойники», потом восемь из оставшихся сказали: «Ровно восемь из всех разбойники», наконец, все оставшиеся 14 сказали: «Ровно 14 из всех разбойники». Сколько разбойников было среди встретившихся?

2. Числа  $a$  и  $b$  таковы, что одновременно выполнены равенства

$$a^4 + 3a^3b = 3a^2 + 5 \quad \text{и} \quad a^3b + 4ab + 1 = a^4 + a^2.$$

Какие значения может принимать  $ab$ ?

3. Маша записала в каждую клетку квадрата  $10 \times 10$  в некотором порядке по одному натуральному числу от 103 до 202 (числа не повторяются). Она вычислила произведение чисел в каждом столбце таблицы и получила набор из десяти чисел. Затем Маша вычислила произведения чисел в каждой строке таблицы и также получила набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

4. Найдите все пары  $(p; q)$  простых чисел, при которых графики функций  $y = 2x^4 + 2(q - 2)x$  и  $y = 2p - 8$  имеют хотя бы одну точку пересечения с целочисленными координатами.

5. Вокруг треугольника  $PQR$  описана окружность  $\omega$ . Касательные к окружности, проведенные в точках  $P$  и  $R$ , пересекаются в точке  $K$ . Точка  $M$  — середина стороны  $PQ$ . Прямая, проходящая через точку  $K$  параллельно  $PQ$ , пересекает сторону  $RQ$  в точке  $N$ . Докажите, что  $\angle PMN = 90^\circ$ .