

Олимпиада «Бельчонок» по математике

11 класс, 2023 год, вариант 2

1. Андрей, Боря, Вася, Гриша, Денис и Женя после олимпиады собрались в кинотеатр. Они купили билеты на 6 мест подряд в одном ряду. Андрей и Боря хотят сидеть рядом, а Вася и Гриша не хотят. Сколькими способами они могут сесть на свои места с учетом их пожеланий?

2. В треугольник ABC вписана окружность ω радиуса r , которая касается стороны AB в точке P . На окружности отметили точку R , диаметрально противоположную точке P . Прямая CR пересекает сторону AB в точке Q , причём $CA + AQ = 1$. Найдите площадь треугольника ABC .

3. Известно, что $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{3a^2 + b^2 + 2ca} + \frac{b}{3b^2 + c^2 + 2ab} + \frac{c}{3c^2 + a^2 + 2bc} \leq \frac{3}{2}.$$

4. Несколько команд провели турнир по футболу — каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Команда «Бельчата» заняла первое место, набрав больше всего очков, а команда «Метеор» — последнее место, набрав меньше всех очков. Если бы за победу давали не 3 очка, а 2, то наоборот, команда «Метеор» стала бы первой, а команда «Бельчата» — последней. Найдите наименьшее количество команд, которое могло участвовать в таком турнире.

5. Решите уравнение

$$x^4 + y^2 = xy^2 + y$$

в натуральных числах.