

Олимпиада «Бельчонок» по математике

11 класс, 2023 год, вариант 1

1. У бельчонок есть 7 орехов, 6 грибов и 10 ягод. Сколькими способами он может выложить все эти предметы в ряд так, чтобы никакие две ягоды не лежали рядом?

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . На его катете BC длины 26 как на диаметре построена окружность ω . Из точки A к этой окружности проведена касательная AP , отличная от AC . Перпендикуляр PH , опущенный на отрезок BC , пересекает отрезок AB в точке Q . Найдите площадь треугольника BPQ , если известно, что $BH : CH = 4 : 9$

3. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{z^2}{x+y+2z} + \frac{x^2}{2x+y+z} + \frac{y^2}{x+2y+z} \geq \frac{xy}{x+y+2z} + \frac{yz}{2x+y+z} + \frac{zx}{x+2y+z}.$$

4. 20 команд провели турнир по хоккею, каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш очков не давалось. При этом каждые три команды в играх между собой набрали разное количество очков. Какое наибольшее число ничьих могло быть в этом турнире?

5. Решите уравнение

$$3^{2a} + 3^a + 2 = 2^k 7^l$$

в целых неотрицательных числах.