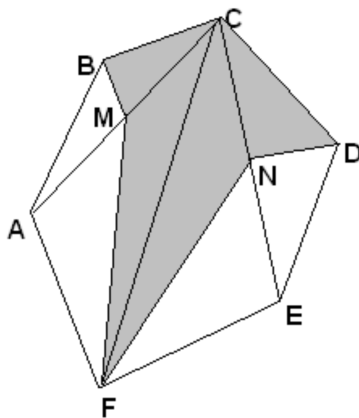


Олимпиада «Бельчонок» по математике

9 класс, 2022 год, вариант 4

1. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ точка M — середина отрезка AC , точка N — середина отрезка CE . Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна половине площади шестиугольника $ABCDEF$.



2. Девять бельчат соревновались в беге на 50 метров, у всех были разные результаты. Потом их разбили на три группы по 3 бельчонка. Первая и вторая группы соревновались между собой по таким правилам: какой-нибудь бельчонок из первой группы бежал с каким-нибудь бельчком из второй группы. Потом другой бельчонок из первой группы бежал с другим бельчком из второй группы. И наконец, соревновались оставшиеся бельчата из первой и второй групп. У какой группы больше побед из трёх забегов, та и выиграла. Затем так же соревновались вторая и третья группы, потом первая и третья. Все бельчата бежали с той же скоростью, как в начале, когда соревновались все вместе. Могло ли быть так, что первая группа выиграла у второй, вторая у третьей, третья у первой? Если нет — докажите; если да — покажите, как это могло быть.

3. На доске были записаны два неравенства, каждое из которых выполняется для некоторых чисел $a \geq b \geq c \geq 0$:

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ac),$$

$$(2) \quad a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2).$$

Настя считает, что неравенства (1) и (2) равносильны, Петя — что из (1) следует (2), Нина — что из (2) следует (1), Даня — что они все не правы. Чьи высказывания истинны?

4. Окружность, проходящая через вершины L и M трапеции $KLMN$, пересекает боковые стороны KL и MN в точках P и Q соответственно и касается основания KN в точке S . Оказалось, что $\angle LSM = 50^\circ$, а $\angle KLS = \angle SNM$. Найдите $\angle PSQ$.

5. Бельчонок собрал в лесу 15 орехов весом 50, 51, ..., 64 граммов. Ему известен вес каждого из орехов. С помощью чашечных весов бельчонок пытается доказать своим друзьям, что первый орех весит 50 г., второй — 51 г., третий — 52 г. и т. д. (вначале друзья ничего не знают про веса орехов). Какое наименьшее количество гирь потребуется бельчонку, если и гири, и орехи можно размещать на обеих чашах весов, а количество взвешиваний неограниченно? (Весы гирь известны как бельчонку, так и друзьям. В наличии неограниченный запас гирь весом 1, 2, ..., 1000 г.)