

Олимпиада «Бельчонок» по математике

10 класс, 2022 год, вариант 3

1. В бассейн ведут две одинаковые трубы. Одна труба заполняет бассейн за 3 часа. Сначала включили обе трубы, но через час одна из труб засорилась, и через неё вода стала поступать вдвое медленнее. Через какое время после этого бассейн заполнится?
2. Приведенный квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из p один из этих корней, а q увеличить в два раза, то полученный квадратный трёхчлен будет иметь корень.
3. Клетчатый прямоугольник из 1000 клеток разбит по линиям сетки на прямоугольники одинаковой площади. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей?
4. Внутри трапеции $KLMN$ ($LM \parallel KN$) выбрана точка P так, что $\angle KPL = \angle MPN = 90^\circ$, $\angle LKP + \angle MNP = \angle LPM$. Докажите, что в трапецию $KLMN$ можно вписать окружность.
5. Вася хочет покрасить клетки прямоугольника 3×4 так, чтобы незакрашенной оставалась или первая строка, или последняя строка, или два средних столбца. Сколькими способами он может это сделать?