Олимпиада «Бельчонок» по математике

9 класс, 2021 год, вариант 1

1. Множество чисел от 1 до 20 разбили на 10 подмножеств, состоящих из двух чисел. После этого в каждом подмножестве нашли суммы чисел S_1, S_2, ..., S_{10}. Какое наибольшее количество чисел из S_1, S_2, ..., S_{10} может быть кратно 11?

2. Бельчата из трёх разных лесов собрались на встречу. После встречи бельчонок из хвойного леса сказал: «Теперь я знаю в два раза больше бельчат, чем вчера». Бельчонок из лиственного леса сказал: «Теперь я знаю в три раза больше бельчат, чем вчера». Бельчонок из елового леса сказал: «Теперь я знаю в четыре раза больше бельчат, чем вчера». Докажите, что кто-то из бельчат обсчитался. Предполагается, что до встречи каждый бельчонок знал бельчат только из своего леса, а после — из всех трёх лесов.

3. На стороне KN параллелограмма $KLMN$ выбрана точка P, а на продолжении этой стороны за точку N выбрана точка Q, причем $KP = PQ$. Прямые LP и MN пересекаются в точке T, а прямые LQ и MN — в точке R. Докажите, что $MR = RT$.

4. В последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ известно, что $x_1 = 17$, $x_2 = 83$, и все члены при $n \geqslant 3$ удовлетворяют соотношению $x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{1}{x_n}$. Какое максимальное количество членов может быть в этой последовательности?

5. Найдите сумму всех натуральных делителей числа $N = 3^3 \cdot 4^4 \cdot 25^3$.