

Олимпиада «Бельчонок» по математике

9 класс, 2018 год, вариант 1

1. Найдите количество пар натуральных чисел (m, n) , $m < n < 2018$, таких, что число $\frac{\frac{m+n}{2} + \sqrt{mn}}{2}$ является квадратом целого числа.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD , BK и CE , пересекающиеся в точке F . Угол ABF равен 30° , $FE = 3$. Найдите FD .

3. Даны квадратные трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$. Известно, что

$$f(1) = g(2) = h(3), \quad f(2) = g(3) = h(1), \quad f(3) = g(1) = h(2).$$

Докажите, что многочлен $f(x) + g(x) + h(x)$ является константой.

4. Найдите все простые числа $p < q < r$ такие, что числа

$$A = (r - p)(r - q)(q - p) + 1 \quad \text{и} \quad B = 3p + 5q$$

равны одному и тому же простому числу.

5. На полосе из 100 клеток, пронумерованных натуральными числами от 1 до 100, лежат орехи (по одному в каждой клетке). Бельчата Вася и Коля выбрали себе одинаковое количество орехов так, что если орех из клетки с номером n есть у Васи, то у Коли есть орех из клетки с номером $2n + 2$. Какое максимальное количество орехов могло быть у обоих бельчат?