

## Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

## Математика, 9 класс, 2022 год

1. При каких значениях числа  $a$  три графика  $y = ax + a$ ,  $y = x$  и  $y = 2 - 2ax$  пересекаются в одной точке?
2. В треугольнике  $ABC$  медиана  $BM$  вдвое меньше биссектрисы  $AN$ . Известно, что угол  $CBM$  в три раза больше угла  $CAN$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .
3. Для натурального числа  $n$  обозначим через  $T(n)$  произведение всех его натуральных делителей (включая  $n$ ).
  - а) Вычислите  $T(2022)$ .
  - б) Существует ли простое число  $p$  и натуральное число  $n$  такие, что  $T(n) = p^{2022}$ ?
4. В клетчатом квадрате  $n \times n$  каждая клетка окрашена в один из двух цветов: белый или черный. При каком наименьшем  $n$  всегда (т. е. при любой окраске) найдется прямоугольник, вершины которого совпадают с центрами четырех одинаково окрашенных клеток?
5. Девочки встали в хоровод, у некоторых надеты платочки. Хоровод назовём правильным, если у каждой девочки без платочка есть соседка в платочке.
  - а) Каково минимальное количество платочков в правильном хороводе из 25 девочек?
  - б) Докажите, что если в данном правильном хороводе из 25 девочек больше 12 платочков, то некоторые девочки могут снять платочки, а хоровод всё равно останется правильным.