

## Олимпиада «Будущие исследователи — будущее науки»

## Математика, 11 класс, 2020 год

1. Решите уравнение  $x^{10} - 3x^4 + x^2 + 1 = 0$ .
2. Докажите неравенство  $\sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \leq \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$  для всех  $\alpha \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ .
3. 14 теннисистов сыграли в однокруговом турнире (каждый игрок сыграл с каждым одну партию). Докажите, что найдутся такие три игрока, что каждый из остальных 11 игроков проиграл хотя бы одному из этой тройки. (Ничьих в теннисе не бывает.)
4. На стороне  $AD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  отмечена точка  $O$ . Оказалось, что  $AO = BO$ ,  $CO = OD$  и  $\angle BOA = \angle COD$ . Пусть  $E$  — точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите, что  $EO$  — биссектриса угла  $AED$ .
5. На координатной плоскости построен график  $y = \frac{2020}{x}$ . Сколько на графике точек, касательная в которых пересекает обе координатные оси в точках с целыми координатами?