Иррациональные неравенства

Содержание

Как и в случае уравнений, мы называем неравенство *иррациональным*, если оно содержит переменную под знаком корня. Данная статья посвящена методам решения иррациональных неравенств.

1 Учёт ОДЗ

Напомним, что *область допустимых значений* (ОДЗ) неравенства есть множество значений переменной, при которых обе части данного неравенства имеют смысл.

Задача 1. Решить неравенство

$$\sqrt{2-x-x^2} > -1.$$

Решение. Квадратный корень может принимать только неотрицательные значения, поэтому данное неравенство выполнено всегда, когда квадратный корень определён. Иными словами, множеством решений данного неравенства служит его ОДЗ:

$$2-x-x^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leqslant x \leqslant 1.$$

Ответ: $[-2; 1]$.

Поиск ОДЗ неравенства далеко не всегда является целесообразным занятием; однако в отдельных ситуациях предварительное нахождение ОДЗ даёт ключ к решению задачи.

Задача 2. Решить неравенство

$$\sqrt{15-2x-x^2} + \sqrt{x-3} > 2x-7.$$

Решение. По виду неравенства ясно, что никакие стандартные методы тут работать не будут. Давайте найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 15-2x-x^2 \geqslant 0, \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5 \leqslant x \leqslant 3, \\ x \geqslant 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Вот ситуация и прояснилась: ОДЗ состоит из одного-единственного числа. Поэтому достаточно подставить $x = 3$ в неравенство и проверить, выполняется ли оно. Подставляем и убеждаемся, что $x = 3$ — решение.

Ответ: 3.

2 Равносильные преобразования

Приступаем к рассмотрению стандартных видов иррациональных неравенств. В каждом из случаев нет нужды предварительно искать ОДЗ; самое эффективное решение обеспечивается соответствующими равносильными преобразованиями.

Неравенства вида $\sqrt{A} < \sqrt{B}$

Рассмотрим неравенство
$$\sqrt{A} < \sqrt{B}\,,$$
где A и B — некоторые выражения, содержащие переменную. В силу монотонного возрастания функции $\sqrt{x}$ должно быть выполнено неравенство $A < B$; но надо не забыть «подпереть нулём» это неравенство снизу: $0 \leqslant A < B$. Таким образом, имеет место эквивалентность:
$$\sqrt{A} < \sqrt{B} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant A < B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A < B, \\ A \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Обратите внимание, что нет необходимости ради поиска ОДЗ решать неравенство $B \geqslant 0$. Выражение B автоматически получается неотрицательным — ведь в силу системы (1) величина B больше неотрицательной величины A.

Ясно, что эквивалентность (1) сохраняется при замене знака $<$ на $\leqslant$.

Задача 3. Решить неравенство
$$\sqrt{2x+4} < \sqrt{x^2+8x-3}\,.$$

Решение. В силу (1) неравенство равносильно системе
$$\begin{cases} 2x+4 < x^2+8x-3, \\ 2x+4 \geqslant 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+6x-7 > 0, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$$
Первое неравенство системы имеет решения $x < -7$ или $x > 1$. Отсюда легко получаем ответ.

Ответ: $(1; +\infty)$.

Теперь, кстати, представьте себе, что вы решили предварительно поискать ОДЗ, занявшись решением неравенства $x^2+8x-3 \geqslant 0$. Представили? ;-)

Задача 4. (*МГУ, геологич. ф-т, 2006*) Решить неравенство
$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - x^3} \geqslant \sqrt{3x - \frac{5}{2}x^2}\,.$$

Решение. Неравенство равносильно системе
$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 - x^3 \geqslant 3x - \dfrac{5}{2}x^2, \\ 3x - \dfrac{5}{2}x^2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 3x \leqslant 0, \\ 5x^2 - 6x \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(x-1)(x-3) \leqslant 0, \\ x(5x-6) \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{array}\right. \\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{6}{5} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 1 \leqslant x \leqslant \dfrac{6}{5}\,. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0\} \cup \left[1; \frac{6}{5}\right]$.

Неравенства вида $A\sqrt{B} \geqslant 0$

Перейдём к рассмотрению неравенства[1]

$$A\sqrt{B} \geqslant 0.$$

Ввиду неотрицательности корня возможны два случая: 1) $B = 0$, и при этом A определено; 2) $A \geqslant 0$, и при этом $B > 0$. Таким образом, имеет место эквивалентность:

$$A\sqrt{B} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B = 0, \\ A \text{ определено}, \end{cases} \\ \begin{cases} A \geqslant 0, \\ B > 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{2}$$

Задача 5. (*МГУ, ВМК, 1978*) Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant 0.$$

Решение. В силу (2) неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ \begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ x^2 - x - 2 > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Уравнение совокупности имеет корни -1 и 2. Множество решений квадратного неравенства: $x < -1$ или $x > 2$, поэтому множество решений системы есть $x > 2$. Объединяя множество $\{-1, 2\}$ корней уравнения с множеством решений системы, получаем ответ.

Ответ: $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Переходим к неравенствам, для решения которых требуется возведение обеих частей в квадрат. Сделаем предварительно два замечания.

1. При возведении в квадрат иррациональных *уравнений* можно в принципе обойтись без равносильных переходов, так как лишние корни можно отсеять непосредственной поочерёдной проверкой конечного набора корней уравнения-следствия (это бывает сложно технически, но теоретически всегда возможно). Однако в результате возведения в квадрат *неравенства* может появиться бесконечное множество лишних решений, и все их проверить уже не представляется возможным. Поэтому использование равносильных переходов при решении иррациональных неравенств становится жизненной необходимостью.

2. Неравенство можно возводить в квадрат лишь в том случае, когда обе его части неотрицательны:
$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \quad \text{при } a, b \geqslant 0.$$
В противном случае верное неравенство может превратиться в неверное:
$$-3 < 2 \ \rightarrow \ 9 < 4,$$
или, наоборот, неверное неравенство может превратиться в верное:
$$2 < -3 \ \rightarrow \ 4 < 9.$$

[1] Мы берём именно случай нестрогого неравенства, так как он чаще встречается в экзаменационной практике; разобравшись в нём, вы без труда напишете правильную эквивалентность для строгого неравенства.

Неравенства вида $\sqrt{A} < B$

Рассмотрим в качестве примера неравенство

$$\sqrt{3-x} < x-1.$$

Если $x-1 \leqslant 0$, то неравенство решений не имеет, поскольку арифметический квадратный корень не может быть меньше неположительного числа.

Если $x-1 > 0$, то обе части неравенства неотрицательны, и мы имеем право возвести неравенство в квадрат:

$$3-x < (x-1)^2,$$

не забыв при этом, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$3-x \geqslant 0.$$

Таким образом, имеем равносильный переход:

$$\sqrt{3-x} < x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1 > 0, \\ 3-x < (x-1)^2, \\ 3-x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим: $x \in (2;3]$.

После этого примера хорошо понятно, что в общем случае имеет место следующая эквивалентность:

$$\sqrt{A} < B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B > 0, \\ A < B^2, \\ A \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Если же неравенство нестрогое, то величина B может быть нулём:

$$\sqrt{A} \leqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B \geqslant 0, \\ A \leqslant B^2, \\ A \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Задача 6. (*МГУ, физический ф-т, 2005*) Решить неравенство

$$\sqrt{3x-x^2+10} < \sqrt{10}-x.$$

Решение. Согласно (3) неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{10}-x > 0, \\ 3x-x^2+10 < \left(\sqrt{10}-x\right)^2, \\ 3x-x^2+10 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < \sqrt{10}, \\ 2x^2 - \left(3+2\sqrt{10}\right)x > 0, \\ (x+2)(x-5) \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < \sqrt{10}, \\ \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > \dfrac{3}{2}+\sqrt{10}, \end{array}\right. \\ -2 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

Из полученной системы легко находим $-2 \leqslant x < 0$.

Ответ: $[-2;0)$.

Задача 7. (*МГУ, мехмат, 2003*) Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{5x^7-32x^3}{5x-x^3-4}} \leqslant x^3.$$

Решение. Сразу же отметим, что имеет место разложение на множители

$$x^3-5x+4=(x-1)(x^2+x-4)=(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right).$$

Согласно (4) неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^3\geqslant 0,\\ \dfrac{5x^7-32x^3}{5x-x^3-4}\leqslant x^6,\\ \dfrac{5x^7-32x^3}{5x-x^3-4}\geqslant 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0,\\ \dfrac{x^3(x^6+4x^3-32)}{5x-x^3-4}\leqslant 0,\\ \dfrac{x^3(5x^4-32)}{x^3-5x+4}\leqslant 0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0,\\ \dfrac{x^3(x^3-4)(x^3+8)}{(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}\geqslant 0,\\ \dfrac{5x^3\left(x^4-\frac{32}{5}\right)}{(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}\leqslant 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0,\\ \dfrac{x^3\left(x-\sqrt[3]{4}\right)}{(x-1)\left(x-\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}\geqslant 0,\\ \dfrac{x^3\left(x-\sqrt[4]{\frac{32}{5}}\right)}{(x-1)\left(x-\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}\leqslant 0 \end{cases} \qquad (5)$$

(мы разложили на множители разности квадратов и кубов, после чего, воспользовавшись условием $x\geqslant 0$, удалили все заведомо положительные сомножители).

Чтобы решить второе неравенство системы (5), нам нужно сравнить числа $\sqrt[3]{4}$ и $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ (понятно, что оба они больше 1). Для этого сравним с нулём разность их кубов:

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^3-\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^3=4-\frac{17\sqrt{17}-3\cdot 17+3\sqrt{17}-1}{8}=$$
$$=4-\frac{20\sqrt{17}-52}{8}=4-\frac{5\sqrt{17}-13}{2}=\frac{21-5\sqrt{17}}{2}=\frac{\sqrt{441}-\sqrt{425}}{2}>0,$$

поэтому $\sqrt[3]{4}>\frac{\sqrt{17}-1}{2}$. Теперь, решая второе неравенство (5) методом интервалов, получим

$$\boxed{x=0,\quad 1<x<\frac{\sqrt{17}-1}{2},\quad x\geqslant\sqrt[3]{4}} \qquad (6)$$

(отрицательные значения x отброшены в силу первого неравенства (5)).

Для решения третьего неравенства системы (5) нужно сравнить числа $\sqrt[4]{\frac{32}{5}}$ и $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$. Сравниваем с нулём разность их четвёртых степеней:

$$\frac{32}{5}-\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^4=\frac{32}{5}-\left(\frac{18-2\sqrt{17}}{4}\right)^2=\frac{32}{5}-\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{32}{5}-\frac{98-18\sqrt{17}}{4}=\frac{32}{5}-\frac{49-9\sqrt{17}}{2}=\frac{45\sqrt{17}-181}{2}=\frac{\sqrt{34425}-\sqrt{32761}}{10}>0,$$

поэтому $\sqrt[4]{\frac{32}{5}}>\frac{\sqrt{17}-1}{2}$. Теперь решаем третье неравенство (5):

$$\boxed{0\leqslant x<1,\quad \frac{\sqrt{17}-1}{2}<x\leqslant\sqrt[4]{\frac{32}{5}}.} \qquad (7)$$

Решением исходного неравенства служит пересечение «рамочек» — множеств (6) и (7). Остаётся только сравнить числа $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{\frac{32}{5}}$. Для этого сравниваем с нулём разность их 12-х степеней:

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^{12} - \left(\sqrt[4]{\frac{32}{5}}\right)^{12} = 4^4 - \left(\frac{32}{5}\right)^3 = 256 - \frac{32768}{125} = \frac{32000 - 32768}{125} < 0.$$

Следовательно, $\sqrt[3]{4} < \sqrt[4]{\frac{32}{5}}$, и окончательно имеем:

$$x = 0, \quad \sqrt[3]{4} \leqslant x \leqslant \sqrt[4]{\frac{32}{5}}\,.$$

Ответ: $\{0\} \cup \left[\sqrt[3]{4}; \sqrt[4]{\frac{32}{5}}\right]$.

Неравенства вида $\sqrt{A} > B$

Теперь в качестве примера рассмотрим неравенство

$$\sqrt{3 - x} > x - 1.$$

Пусть сначала $x-1 < 0$. Поскольку в левой части стоит неотрицательное выражение $\sqrt{3 - x}$, множеством решений неравенства в этом случае является ОДЗ: $3 - x \geqslant 0$.

Пусть теперь $x - 1 \geqslant 0$. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, имеем право возвести неравенство в квадрат: $3 - x > (x - 1)^2$.

Таким образом, имеем эквивалентность:

$$\sqrt{3 - x} > x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 < 0, \\ 3 - x \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 3 - x > (x - 1)^2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1, \\ x \leqslant 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2 - x - 2 < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением первой системы служит множество $x < 1$. Решением второй системы служит множество $1 \leqslant x < 2$. Объединяя эти множества, получаем ответ: $x < 2$.

Ясно теперь, что в общем случае имеет место эквивалентность:

$$\sqrt{A} > B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B < 0, \\ A \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} B \geqslant 0, \\ A > B^2. \end{cases} \end{array}\right. \tag{8}$$

Аналогично в случае нестрого неравенства имеем:

$$\sqrt{A} \geqslant B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B \leqslant 0, \\ A \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} B > 0, \\ A \geqslant B^2. \end{cases} \end{array}\right. \tag{9}$$

Задача 8. (*МФТИ, 1998*) Решить неравенство

$$\sqrt{3x^2 - 8x - 3} > \frac{1-2x}{3}\,. \tag{10}$$

Решение. В соответствии с совокупностью (8) рассмотрим два случая.

Пусть сначала $\frac{1-2x}{3} < 0$, то есть

$$x > \frac{1}{2}\,. \tag{11}$$

При ограничении (11) исходное неравенство (10) равносильно неравенству $3x^2 - 8x - 3 \geqslant 0$, решения которого —

$$x \leqslant -\frac{1}{3}\,, \quad x \geqslant 3. \tag{12}$$

Пересекая множества (11) и (12), получаем первую часть множества решений неравенства (10):

$$\boxed{x \geqslant 3.} \tag{13}$$

Пусть теперь $\frac{1-2x}{3} \geqslant 0$, то есть

$$x \leqslant \frac{1}{2}\,. \tag{14}$$

При ограничении (14) неравенство (10) равносильно неравенству

$$3x^2 - 8x - 3 > \left(\frac{1-2x}{3}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 23x^2 - 68x - 28 > 0,$$

решения которого —

$$x < x_1 = \frac{34 - 30\sqrt{2}}{23}\,, \quad x > x_2 = \frac{34 + 30\sqrt{2}}{23}\,. \tag{15}$$

Ясно, что $x_1 < 0 < \frac{1}{2}$, $x_2 > 1 > \frac{1}{2}$; пересекая множества (14) и (15), получим вторую часть множества решений неравенства (10):

$$\boxed{x < \frac{34 - 30\sqrt{2}}{23}\,.} \tag{16}$$

Остаётся объединить «рамочки» — множества (13) и (16).

Ответ: $\left(-\infty; \frac{34-30\sqrt{2}}{23}\right) \cup [3; +\infty)$.

Задача 9. (*МФТИ, 2006*) Решить неравенство

$$\sqrt{\sqrt{16x + 36} + 6} \geqslant x. \tag{17}$$

Решение. При ограничении

$$x \leqslant 0 \tag{18}$$

неравенство (17) равносильно неравенству

$$\sqrt{16x + 36} + 6 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -\frac{9}{4}\,. \tag{19}$$

Пересечение (18) и (19) даёт часть решений неравенства (17):

$$\boxed{-\frac{9}{4} \leqslant x \leqslant 0.} \tag{20}$$

Теперь рассмотрим случай
$$x > 0. \tag{21}$$
При ограничении (21) неравенство (17) равносильно неравенству
$$\sqrt{16x+36}+6 \geqslant x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{16x+36} \geqslant x^2-6. \tag{22}$$
Очевидно, что значения
$$\boxed{0 < x \leqslant \sqrt{6}} \tag{23}$$
удовлетворяют неравенству (22). Остаётся рассмотреть ограничение
$$x > \sqrt{6}\,, \tag{24}$$
при котором неравенство (22) равносильно неравенству
$$16x+36 \geqslant \left(x^2-6\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^3-12x-16) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+2)^2(x-4) \leqslant 0.$$
Решения полученного неравенства, удовлетворяющие условию (24), суть значения
$$\boxed{\sqrt{6} < x \leqslant 4.} \tag{25}$$
Множество решений исходного неравенства (17) является объединением всех «рамочек», то есть множеств (20), (23) и (25).

Ответ: $\left[-\frac{9}{4}; 4\right]$.

3 Двукратное возведение в квадрат

Если неравенство содержит сумму или разность двух радикалов, то, возможно, придётся возводить в квадрат два раза.

Задача 10. (*МГУ, геологич. ф-т, 1999*) Решить неравенство
$$\sqrt{10x-x^2-24} \geqslant \sqrt{x^2-13x+42} - \sqrt{x^2-11x+30}\,.$$

Решение. Здесь полезно начать с нахождения ОДЗ:
$$\begin{cases} 10x-x^2-24 \geqslant 0, \\ x^2-13x+42 \geqslant 0, \\ x^2-11x+30 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 6, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant 6, \\ x \geqslant 7, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant 5, \\ x \geqslant 6 \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leqslant x \leqslant 5, \quad x = 6.$$

Перепишем исходное неравенство, разложив каждый из квадратных трёхчленов на множители:
$$\sqrt{(6-x)(x-4)} \geqslant \sqrt{(6-x)(7-x)} - \sqrt{(6-x)(5-x)} \tag{26}$$
(каждый из сомножителей неотрицателен в ОДЗ). Легко видеть, что $x = 6$ является решением неравенства (26); остаётся рассмотреть данное неравенство на множестве $E = [4; 5]$.

Делим обе части неравенства (26) на выражение $\sqrt{6-x}$, которое положительно на множестве E, и приходим к равносильному на E неравенству
$$\sqrt{x-4} \geqslant \sqrt{7-x} - \sqrt{5-x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x-4} + \sqrt{5-x} \geqslant \sqrt{7-x}\,.$$

Обе части последнего неравенства положительны на множестве E; возводя в квадрат, получим равносильное на E неравенство

$$1+2\sqrt{(x-4)(5-x)}\geqslant 7-x \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{9x-x^2-20}\geqslant 6-x.$$

Поскольку $6-x>0$ на множестве E, снова возводим в квадрат:

$$4(9x-x^2-20)\geqslant(6-x)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 5x^2-48x+116\leqslant 0.$$

Полученное неравенство равносильно на множестве E неравенству (26). Но ввиду отрицательности дискриминанта это квадратное неравенство не имеет решений. Следовательно, не имеет решений на множестве E и неравенство (26). Таким образом, $x=6$ — единственное решение нашего неравенства.

Ответ: 6.

4 Дробно-иррациональные неравенства

Как вы знаете, метод интервалов применяется для решения рациональных (или, как ещё говорят, дробно-рациональных) неравенств; в таких неравенствах фигурируют только дроби, у которых числитель и знаменатель — многочлены. Если же в числителе или знаменателе появляется переменная под знаком корня, то мы будем говорить о *дробно-иррациональных* неравенствах. Мы позволим себе не вдаваться в более подробное обсуждение этой терминологии; на рассматриваемых ниже примерах станет ясно, о неравенствах какого типа идёт речь и какой они обладают спецификой.

Задача 11. (*МГУ, ф-т гос. управления, 2005*) Решить неравенство

$$1<\frac{\sqrt{5}(x-5)}{\sqrt{x^2-10x+26}}.$$

Решение. Сразу сделаем замену $t=x-5$:

$$1<\frac{t\sqrt{5}}{\sqrt{t^2+1}}. \tag{27}$$

Теперь замечаем, что выражение $\sqrt{t^2+1}$ положительно при всех t, и поэтому можно умножить на него обе части неравенства (27); получим равносильное неравенство

$$\sqrt{t^2+1}<t\sqrt{5},$$

которое решается уже известным вам способом. Легко находим $t>\frac{1}{2}$, откуда $x>\frac{11}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$.

Задача 12. (*МГУ, биологич. ф-т, 2003*) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{16-x^2}}{3-x}\leqslant 1. \tag{28}$$

Решение. ОДЗ неравенства есть множество $[-4;3)\cup(3;4]$. Пусть сначала $x\in E_1=[-4;3)$. Тогда $3-x>0$; умножая неравенство на $3-x$, получим равносильное на множестве E_1 неравенство

$$\sqrt{16-x^2}\leqslant 3-x \quad\Leftrightarrow\quad 16-x^2\leqslant(3-x)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2-6x-7\geqslant 0.$$

Решения полученного квадратного неравенства суть $x \leqslant \frac{3-\sqrt{23}}{2}$ и $x \geqslant \frac{3+\sqrt{23}}{2}$; пересекая это с множеством E_1 (и учитывая, что $\frac{3+\sqrt{23}}{2} > \frac{3+\sqrt{16}}{2} > 3$), получаем часть решений исходного неравенства:

$$-4 \leqslant x \leqslant \frac{3-\sqrt{23}}{2}\,. \tag{29}$$

Пусть теперь $x \in E_2 = (3;4]$. Тогда $3 - x < 0$ и неравенство (28) выполнено, поскольку его левая часть неположительна. Значит, любой $x \in E_2$ служит решением нашего неравенства. Объединяя множества (29) и E_2, получаем ответ.

Ответ: $\left[-4; \frac{3-\sqrt{23}}{2}\right] \cup (3;4]$.

Задача 13. (*МФТИ, 1997*) Решить неравенство

$$\frac{26 - 3x + \sqrt{x^2 - 2x - 24}}{x - 10} < -1.$$

Решение. Перенося -1 влево и приводя к общему знаменателю, получим равносильное неравенство

$$\frac{16 - 2x + \sqrt{x^2 - 2x - 24}}{x - 10} < 0. \tag{30}$$

ОДЗ этого неравенства есть множество $(-\infty;-4] \cup [6;10) \cup (10;+\infty)$.

Пусть сначала $x \in E_1 = (-\infty;-4] \cup [6;10)$. Тогда $x - 10 < 0$, в силу чего неравенство (30) равносильно на множестве E_1 неравенству

$$16 - 2x + \sqrt{x^2 - 2x - 24} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 2x - 24} > 2x - 16. \tag{31}$$

Любой $x < 8$, входящий в E_1, является решением неравенства (31). Если же $x \in [8;10)$, то неравенство (31) равносильно неравенству

$$x^2 - 2x - 24 > (2x - 16)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 62x + 280 < 0,$$

решения которого образуют множество $\left(\frac{20}{3};14\right)$, содержащее в себе рассматриваемое множество $[8;10)$. Следовательно, любой $x \in [8;10)$ также является решением неравенства (31), и, значит, множество E_1 — часть множества решений нашего неравенства.

Пусть теперь $x \in E_2 = (10;+\infty)$. Тогда $x - 10 > 0$, и неравенство (31) равносильно на множестве E_2 неравенству

$$16 - 2x + \sqrt{x^2 - 2x - 24} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 2x - 24} < 2x - 16.$$

Ввиду того, что $2x - 16 > 0$ на множестве E_2, полученное неравенство в свою очередь равносильно неравенству

$$x^2 - 2x - 16 < (2x - 16)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 62x + 280 > 0,$$

решения которого, принадлежащие E_2, суть $x > 14$.

Ответ: $(-\infty;-4] \cup [6;10) \cup (14;+\infty)$.

Задача 14. (*«Физтех», 2012*) Решить неравенство

$$\frac{3x + 3}{3 - \sqrt{x^2 - 2x + 10}} \leqslant 1.$$

Решение. Знаменатель, равный $3-\sqrt{9+(x-1)^2}$, обращается в нуль при $x=1$ и отрицателен при всех $x\neq 1$. Следовательно, на множестве $x\neq 1$ наше неравенство равносильно неравенству

$$3x+3\geqslant 3-\sqrt{x^2-2x+10} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2-2x+10}\geqslant -3x.$$

Полученное неравенство не представляет трудностей, и вы легко доведёте дело до конца самостоятельно.

Ответ: $\left[-\frac{5}{4};1\right)\cup(1;+\infty)$.

5 Замена переменной

В некоторых задачах бывает полезно сделать замену переменной, обозначив новой буквой имеющийся *корень* из некоторого выражения.

Задача 15. (*МГУ, геологич. ф-т, 1997*) Решить неравенство

$$\frac{x}{20-\sqrt{x}}<10.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x}=t$; тогда $x=t^2$. Наше неравенство принимает вид:

$$\frac{t^2}{20-t}<10 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{t^2+10t-200}{t-20}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(t-10)(t+20)}{t-20}>0.$$

Решаем полученное неравенство методом интервалов и делаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}-20<t<10,\\ t>20\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}-20<\sqrt{x}<10,\\ \sqrt{x}>20\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}0\leqslant x<100,\\ x>400.\end{array}\right.$$

Ответ: $[0;100)\cup(400;+\infty)$.

Задача 16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2006*) Решите неравенство

$$\sqrt{x+2}>x-3.$$

Решение. Вы уже знаете, как решать подобные неравенства, но в данном случае можно поступить и по-другому. Обозначим $t=\sqrt{x+2}$; тогда $x=t^2-2$, и наше неравенство принимает вид

$$t>(t^2-2)-3 \quad\Leftrightarrow\quad t^2-t-5<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1-\sqrt{21}}{2}<t<\frac{1+\sqrt{21}}{2}.$$

После обратной замены с учётом условия $\frac{1-\sqrt{21}}{2}<0$ имеем:

$$\frac{1-\sqrt{21}}{2}<\sqrt{x+2}<\frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 0\leqslant x+2<\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^2=\frac{11+\sqrt{21}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -2\leqslant x<\frac{7+\sqrt{21}}{2}.$$

Ответ: $\left[-2;\frac{7+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Задача 17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите сумму целых чисел, являющихся решениями неравенства

$$\sqrt{5x-11}-\sqrt{5x^2-21x+21}\geqslant 5x^2-26x+32.$$

Решение. Обозначим $u=\sqrt{5x-11}$, $v=\sqrt{5x^2-26x+21}$. Наше неравенство запишется в виде

$$u-v\geqslant v^2-u^2 \quad\Leftrightarrow\quad (u-v)(u+v+1)\geqslant 0.$$

Учитывая, что величина $u+v+1$ положительна при всех допустимых значениях x, имеем

$$u\geqslant v \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{5x-11}\geqslant\sqrt{5x^2-21x+21} \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}5x-11\geqslant 5x^2-21x+21,\\ 5x^2-21x+21\geqslant 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}5x^2-26x+32\leqslant 0,\\ 5x^2-21x+21\geqslant 0.\end{cases} \tag{32}$$

Система (32) равносильна исходному неравенству. Решения первого неравенства системы образуют множество $\left[2;\frac{16}{5}\right]$, которое содержит лишь два целых числа 2 и 3. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x=2$ не удовлетворяет второму неравенству (32), а $x=3$ удовлетворяет ему. Значит, исходное неравенство имеет единственное целое решение $x=3$. Это и есть ответ.

Ответ: 3.

6 Умножение на сопряжённое

В некоторых ситуациях полезно бывает умножить и разделить на выражение, сопряжённое данному.

Задача 18. (*«Физтех», 2016, 9*) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x+1}}\geqslant 1+\sqrt{x+1}\,.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}-1}+\sqrt{x+1}+1\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(\sqrt{x}-2)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}+\sqrt{x+1}+1\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{(\sqrt{x}-2)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}+\sqrt{x+1}+1\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x}+1\right)\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{x+1}+1\right)\frac{x+\sqrt{x}-2}{x}\leqslant 0.$$

ОДЗ нашего неравенства есть множество $x>0$. На этом множестве полученное неравенство равносильно неравенству

$$x+\sqrt{x}-2\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\leqslant\sqrt{x}\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

В пересечении с ОДЗ имеем $0<x\leqslant 1$.

Ответ: $(0;1]$.

Задача 19. (*МГУ, ВМК, 2006*) Решить неравенство

$$10\sqrt{3x-\sqrt{72x-144}}>3x-12.$$

Решение. Сразу делаем замену $t = 3x$:

$$10\sqrt{t-\sqrt{24t-144}} > t-12. \tag{33}$$

Найдём ОДЗ данного неравенства:

$$t-\sqrt{24t-144} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{24t-144} \leqslant t \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t \geqslant 0, \\ 0 \leqslant 24t-144 \leqslant t^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t \geqslant 0, \\ t \geqslant 6, \\ (t-12)^2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t \geqslant 6.$$

Умножим и разделим подкоренное выражение в (33) на сопряжённое $t+\sqrt{24t-144}$ (которое положительно при всех $t \geqslant 6$):

$$t-\sqrt{24t-144} = \frac{\left(t-\sqrt{24t-144}\right)\left(t+\sqrt{24t-144}\right)}{t+\sqrt{24t-144}} = \frac{t^2-(24t-144)}{t+\sqrt{24t-144}} = \frac{(t-12)^2}{t+\sqrt{24t-144}}\,.$$

В результате придём к равносильному неравенству

$$\frac{10|t-12|}{\sqrt{t+\sqrt{24t-144}}} > t-12\,. \tag{34}$$

Все значения $t \in [6;12)$ являются решениями неравенства (34), поскольку его правая часть отрицательна при данных t, а левая — положительна. Значение $t = 12$, как легко видеть, не является решением (34).

Пусть теперь $t > 12$. В этом случае неравенство (34) равносильно неравенству

$$\frac{10(t-12)}{\sqrt{t+\sqrt{24t-144}}} > t-12 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{\sqrt{t+\sqrt{24t-144}}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{t+\sqrt{24t-144}} < 10 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad t+\sqrt{24t-144} < 100 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{24t-144} < 100-t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 100-t > 0, \\ 24t-144 < (100-t)^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t < 100, \\ t^2-224t+10144 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t < 100, \\ \left[\begin{array}{l} t < 112-20\sqrt{6}, \\ t > 112+20\sqrt{6} \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t < 112-20\sqrt{6}.$$

Итак, имеем множество решений неравенства (33):

$$6 \leqslant t < 12, \quad 12 < t < 112-20\sqrt{6}.$$

Остаётся сделать обратную замену $x = t/3$ и получить множество решений исходного неравенства:

$$2 \leqslant x < 4, \quad 4 < x < \frac{112-20\sqrt{6}}{3}\,.$$

Ответ: $[2;4) \cup \left(4;\frac{112-20\sqrt{6}}{3}\right)$.

7 Задачи

Во всех задачах требуется решить неравенство.

Учёт ОДЗ

1. а) $\sqrt{x^2+2x-3} \geqslant -2$; б) $\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{x-2} > 3x-7$.

а) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; б) 2

2. (*МГУ, геологич. ф-т, 1994*) $\sqrt{4x-3-x^2} \neq 0$.

$(1; 3)$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9*)

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x+3-x^2} \geqslant 2.$$

$-1, 1, 3$

4. (*МГУ, геологич. ф-т, 1999*) $\sqrt{4x-x^2-3} \geqslant \sqrt{x^2-7x+12}-\sqrt{x^2-5x+6}$.

3

5. (*МГУ, геологич. ф-т, 2002*) $\sqrt{6x-x^2-8}-\sqrt{7-2x} \geqslant \sqrt{8x-x^2-15}$.

$3, \frac{7}{2}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*)

$$\sqrt{2x^{1006}-(x^{2012}+1)} > 3x^{1799}+1.$$

-1

7. (*МГУ, ВМК, 2006*)

$$\sqrt{\frac{x^2-22x+121}{x^2-24x+140}} \geqslant 50x-2x^2-309.$$

$(-\infty; 10) \cup \{11\} \cup (14; +\infty)$

Равносильные преобразования

8. а) $\sqrt{2-x} < \sqrt{3x^2-2x-2}$; б) $\sqrt{3x-\frac{23}{4}} \geqslant \sqrt{x^2+2x-8}$.

а) $(-\infty; -1) \cup (\frac{4}{3}; 2]$; б) $\left[2; \frac{1+\sqrt{10}}{2}\right]$

9. (*МГУ, геологич. ф-т, 2006*) $\sqrt{\frac{5}{2}x^2-x^3} \geqslant \sqrt{6x-\frac{5}{2}x^2}$.

$\{0\} \cup [2; \frac{12}{5}]$

10. (*«Ломоносов», 2011, 11*) $\sqrt{x^2-1} \leqslant \sqrt{5x^2-1-4x-x^3}$.

$(-\infty; -1] \cup \{2\}$

11. (*МГУ, ИСАА, 2004*) $\sqrt{x^2-25}\cdot(x-3)<0.$

$\boxed{(-\infty;-5)}$

12. (*МГУ, биологич. ф-т, 2006*) $\sqrt{x+1}\cdot(x^2+3x-4)\geqslant 0.$

$\boxed{\{-1\}\cup[1;+\infty)}$

13. (*МГУ, геологич. ф-т, 1988*) $(x^2+8x+15)\sqrt{x+4}\geqslant 0.$

$\boxed{\{-4\}\cup[-3;+\infty)}$

14. (*МГУ, экономич. ф-т, 1986*) $\sqrt{-25x^2+15x-2}\,(8x^2-6x+1)\geqslant 0.$

$\boxed{\left[\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right]\cup\left\{\frac{2}{5}\right\}}$

15. (*МГУ, физический ф-т, 1996*)

$$\frac{x-2}{x\sqrt{10+3x-x^2}}>0.$$

$\boxed{(-2;0)\cup(2;5)}$

16. (*МГУ, биологич. ф-т, 2001*)

$$\frac{\sqrt{x^2+5x-84}}{x-7}\geqslant 0.$$

$\boxed{\{-12\}\cup(7;+\infty)}$

17. (*МГУ, ВШБ, 2003*)

$$\frac{\sqrt{(x+5)(x-3)}}{x+5}\leqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty;-5)\cup\{3\}}$

18. (*МГУ, географич. ф-т, 2004*)

$$\frac{\sqrt{x^6-64}}{x-3}\geqslant 0.$$

$\boxed{\{-2,2\}\cup(3;+\infty)}$

19. (*МГУ, ИСАА, 2001*)

$$\frac{\sqrt{2x^2-5x-3}}{6+3\sqrt{3}\,x-2x^2}\leqslant 0.$$

$\boxed{\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left\{-\frac{1}{2},3\right\}\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)}$

20. (*МГУ, мехмат, 1983*)

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geqslant\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}\,.$$

$\boxed{[-2;-1]\cup\{3\}}$

21. (*МГУ, биологич. ф-т, 2005*) $\sqrt{x-1} < 3-x$.

$\boxed{[1;2)}$

22. (*МГУ, ф-т психологии, 2002*) $\sqrt{x+1} > x-2$.

$\boxed{\left[-1;\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)}$

23. (*МГУ, геологич. ф-т, 1992*) $\sqrt{10x-1}+1 \leqslant 5x$.

$\boxed{\left[\frac{2+\sqrt{2}}{5};+\infty\right)}$

24. (*МГУ, физический ф-т, 1979*) $\sqrt{x^2+x-2} < x$.

$\boxed{[1;2)}$

25. (*МГУ, МШЭ, 2005*) $\sqrt{x^2+2x}-x > 1$.

$\boxed{(-\infty;-2]}$

26. (*МГУ, геологич. ф-т, 1984*) $\sqrt{2x^2-18x+16} < x-4$.

$\boxed{[8;10)}$

27. (*МГУ, экономич. ф-т, 1982*) $\sqrt{x^2+x-6} > -x-1$.

$\boxed{(-\infty;-7)\cup[2;+\infty)}$

28. (*МГУ, экономич. ф-т, 2003*) $\sqrt{5-4x-x^2} \geqslant -2x-1$.

$\boxed{[-2;1]}$

29. (*МГУ, геологич. ф-т, 1994*) $\sqrt{24-10x+x^2} > x-4$.

$\boxed{(-\infty;4)}$

30. (*МГУ, биологич. ф-т, 1980*) $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

$\boxed{(3;5]}$

31. (*МГУ, геологич. ф-т, 2005*) $\sqrt{-x^2-x+6}-x \geqslant 2$.

$\boxed{\left[-3;\frac{\sqrt{41}-5}{4}\right]}$

32. (*МГУ, физический ф-т, 2005*) $\sqrt{5x-x^2+6} < \sqrt{6}-x$.

$\boxed{[-1;0)}$

33. (*МФТИ, 1998*) $\sqrt{2x^2-7x-4} > -x-\frac{1}{4}$.

$\boxed{\left(-\infty;\frac{15-\sqrt{290}}{4}\right)\cup[4;+\infty)}$

34. (*МГУ, экономич. ф-т, 1983*) $4(x-1) < \sqrt{3x^2+19x+20}$.

$\boxed{(-\infty;-5]\cup\left[-\frac{4}{3};4\right)}$

35. (*МГУ, МШЭ, 2007*) $\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant x-1$.

$\boxed{\{1\} \cup [2;+\infty)}$

36. (*МГУ, геологич. ф-т, 2004*) $\sqrt{441-x^2} \leqslant x+21$.

$\boxed{\{-21\} \cup [0;21]}$

37. (*«Физтех», 2015, 10*) $\sqrt{x^2-16} \cdot \sqrt{2x-1} \leqslant x^2-16$.

$\boxed{\{4\} \cup [5;+\infty)}$

38. (*МГУ, физический ф-т, 2006*)

$$\sqrt{(3-x)\sqrt{2x^2+2x-4}} \leqslant 3-x.$$

$\boxed{\left[-4-\sqrt{29};-2\right] \cup \left[1;\sqrt{29}-4\right] \cup \{3\}}$

39. (*МГУ, экономич. ф-т, 2007*) Для каждого значения x, удовлетворяющего условию

$$x^2-|x|-42=0,$$

найдите все числа y, для которых выполнено неравенство

$$-7\sqrt{y^2-10y+34} \geqslant 4x+7.$$

$\boxed{\text{Если } x=-7, \text{ то } y=5; \text{ если } x=7, \text{ то таких } y \text{ не существует}}$

40. (*МГУ, биологич. ф-т, 2003*)

$$1-\sqrt{\frac{1-x}{7-4x}} \leqslant x.$$

$\boxed{\left[\tfrac{3}{4};1\right] \cup \left(\tfrac{7}{4};+\infty\right)}$

41. (*МГУ, мехмат, 2010*)

$$\frac{1-x}{x} > \sqrt{\frac{3x-2}{3x+4}}.$$

$\boxed{\left[\tfrac{2}{3};\tfrac{4}{5}\right)}$

42. (*МГУ, ИСАА, 2006*)

$$\sqrt{\frac{243+9x-2x^2}{2x+3}} > 9-x.$$

$\boxed{\left(-\tfrac{3}{2};0\right) \cup \left(\tfrac{9}{2};\tfrac{27}{2}\right]}$

43. (*МГУ, мехмат, 2003-03.2*)

$$\sqrt{\frac{4x^7-10x^3}{4x-x^3-3}} \leqslant x^3.$$

$\boxed{\{0\} \cup \left[\sqrt[4]{\tfrac{5}{2}};\sqrt[3]{2}\right]}$

44. (*«Физтех», 2010*)

$$\sqrt{\frac{3-x}{1+x}} > -x.$$

$\boxed{(-1;3]}$

45. (*МФТИ, 2008*)

$$\sqrt{\frac{3}{3x^2-2x-1}} \geqslant \frac{1}{2-x}\,.$$

$\boxed{(-\infty;-\frac{1}{3}) \cup (1;\frac{13}{10}] \cup (2;+\infty)}$

46. (*МФТИ, 2008*)

$$\sqrt{\frac{2-\frac{13}{9}x}{2-x}} \leqslant x-1.$$

$\boxed{[\frac{4}{3};\frac{18}{13}] \cup [\frac{8}{3};+\infty)}$

47. (*МГУ, мехмат, 1995*)

$$\frac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x} \geqslant 0.$$

$\boxed{[-\frac{15}{4};-\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2};\frac{5}{2}]}$

48. (*МФТИ, 2003*)

$$\sqrt{16-\sqrt{132-16x^3}} < 4-x.$$

$\boxed{\left[-\sqrt[3]{\frac{31}{4}};\sqrt{2}\right)}$

49. (*МФТИ, 2006*)

$$\sqrt{\sqrt{12x+\frac{169}{4}}+\frac{13}{2}} \geqslant x.$$

$\boxed{[-\frac{169}{48};4]}$

50. (*МГУ, ИСАА, 2002*) $x\sqrt{2-x} \leqslant x^2-x-2-\sqrt{2-x}\,.$

$\boxed{(-\infty;-1] \cup \{2\}}$

51. (*МГУ, ф-т психологии, 1993*) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$

$\boxed{\left[0;\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)}$

52. (*МГУ, ф-т фунд. мед., 2003*) $\sqrt{2-x}-\sqrt{4+x} \leqslant \sqrt{x+3}\,.$

$\boxed{\left[-\frac{1+2\sqrt{29}}{5};2\right]}$

53. (*МФТИ, 2001*) $\sqrt{x^2+4x+3} < 1+\sqrt{x^2-2x+2}\,.$

$\boxed{(-\infty;-3] \cup \left[-1;\frac{\sqrt{17}-1}{8}\right)}$

54. (*МГУ, экономич. ф-т, 1998*) $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1.$

$\boxed{(-\infty;-2]\cup\left[-1;\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)}$

Дробно-иррациональные неравенства

55. (*МГУ, ф-т психологии, 1999*)

$$\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}}<1.$$

$\boxed{\left(\frac{4}{7};\frac{37+\sqrt{69}}{50}\right)}$

56. (*МГУ, ф-т гос. управления, 2005*)

$$1<\frac{\sqrt{2}(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}}\,.$$

$\boxed{(5;+\infty)}$

57. (*МГУ, ВМК, 1982*)

$$\frac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}}\leqslant 3x+2.$$

$\boxed{\left[-\frac{2}{3};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{5}{2}\right]}$

58. (*МГУ, физический ф-т, 2001*)

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}}>\frac{1}{x-2}\,.$$

$\boxed{(-\infty;2)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};3\right)}$

59. (*МГУ, физический ф-т, 2002*)

$$\frac{\sqrt{2-x}}{3-2x}<1.$$

$\boxed{(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3}{2};2\right]}$

60. (*МГУ, биологич. ф-т, 2003*)

$$\frac{\sqrt{x^2-2}}{4-2x}\geqslant -1.$$

$\boxed{\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};2\right)\cup\left[\frac{8+\sqrt{10}}{3};+\infty\right)}$

61. (*МГУ, физический ф-т, 2002*)

$$\frac{\sqrt{9+4x-x^2}}{3-x}<1.$$

$\boxed{\left[2-\sqrt{13};0\right)\cup\left(3;2+\sqrt{13}\right]}$

62. (*МГУ, ИСАА, 1993*)

$$\frac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x} \geqslant 1.$$

$\boxed{[1;3)}$

63. (*МГУ, ф-т психологии, 1983*)

$$\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1.$$

$\boxed{\left[-1-2\sqrt{13};-5\right)\cup\left(1;-1+2\sqrt{13}\right]}$

64. (*МГУ, ф-т психологии, 1998*)

$$\frac{\sqrt{4x+7}-3x+5}{16-3x^2+22x} \leqslant 0.$$

$\boxed{\left[-\frac{7}{4};-\frac{2}{3}\right)\cup\left[\frac{17+\sqrt{127}}{9};8\right)}$

65. (*МГУ, геологич. ф-т, 2003*)

$$\frac{\sqrt{x^2-6x-7}}{x-7} \geqslant \frac{x+1}{3}.$$

$\boxed{(-\infty;-2]\cup\{-1\}\cup(7;8]}$

66. (*МФТИ, 1997*)

$$\frac{13-6x+\sqrt{4x^2-2x-6}}{5-2x} > 1.$$

$\boxed{(-\infty;-1]\cup\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)}$

67. (*МГУ, мехмат, 1990*)

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \leqslant x.$$

$\boxed{[-2;-1)\cup[0;1]}$

68. (*МГУ, ДВИ, 2011.4*)

$$\frac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1} > 1.$$

$\boxed{\left[-\frac{3}{5};-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)}$

69. (*«Физтех», 2012*)

$$\frac{2x+8}{8-\sqrt{x^2-2x+65}} \leqslant 1.$$

$\boxed{[-5;1)\cup(1;+\infty)}$

70. (*МФТИ, 1999*)

$$\frac{\sqrt{2x^3-22x^2+60x}}{x-6} \geqslant 2x-10.$$

$\boxed{[0;4]\cup\{5\}\cup\left(6;\tfrac{15}{2}\right]}$

71. (*МФТИ, 2006*)

$$\frac{\sqrt{4x^3-12x+8}}{x+1} \leqslant \sqrt{4x+7}\,.$$

$\boxed{\left[-\tfrac{7}{4};-1\right)\cup\left[\tfrac{\sqrt{15}}{4}-1;+\infty\right)}$

72. (*«Ломоносов», 2010*)

$$\frac{1}{\sqrt{-x-4}}-\frac{1}{\sqrt{x+6}} \leqslant 1+\frac{1}{\sqrt{(x+6)(-x-4)}}\,.$$

$\boxed{\left(-6;-5+2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right]}$

Замена переменной

73. (*МГУ, геологич. ф-т, 1997*)

$$30 > \frac{x}{60-\sqrt{x}}$$

$\boxed{[0;900)\cup(3600;+\infty)}$

74. (*МГУ, геологич. ф-т, 1991*)

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2} \geqslant \frac{2}{4-\sqrt{x}}\,.$$

$\boxed{\{0\}\cup(16;+\infty)}$

75. (*МГУ, физический ф-т, 2000*) $2x^2+\sqrt{2x^3} > x.$

$\boxed{\left(\tfrac{3-\sqrt{5}}{4};+\infty\right)}$

76. (*МФТИ, 2005*)

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x}-\frac{2}{3}}{x-\frac{23}{27}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{3}}\,.$$

$\boxed{\left(\tfrac{1}{9};\tfrac{4}{9}\right]\cup\left[1;\tfrac{15+4\sqrt{11}}{9}\right]}$

77. (*МГУ, химический ф-т, 1979*) $\sqrt{x+3} > x+1.$

$\boxed{[-3;1)}$

78. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2006*) $\sqrt{x+3} > x-2.$

$\boxed{\left[-3;\tfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)}$

79. (*МГУ, ф-т психологии, 1997*) $\sqrt{x+3} > 5-2x$.

$\left(\frac{21-\sqrt{89}}{8};+\infty\right)$

80. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1981*) $\sqrt{4x-8} \geqslant x-5$.

$[2;11]$

81. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1996*)

$$\frac{2}{2-\sqrt{x+3}} \leqslant 1.$$

$\{-3\} \cup (1;+\infty)$

82. (*МГУ, биологич. ф-т, 1993*)

$$5\sqrt{1-\frac{1}{x}} > \frac{7x-1}{x}\,.$$

$\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{8}\right)$

83. (*МГУ, химический ф-т, 2001*)

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2-x}{x}}-\frac{x+1}{2x}\right)^2} \geqslant 0.$$

$\left(0;\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5};1\right) \cup (1;2]$

84. (*МГУ, ФНМ, 2000*)

$$\sqrt{2-\frac{2}{x+1}} < \sqrt{2+\frac{2}{x}}+1.$$

$(-\infty;-2) \cup (0;+\infty)$

85. (*МГУ, экономич. ф-т, 1998*)

$$\sqrt{x+8\left(3-\sqrt{8+x}\right)} < \frac{x+16}{2\sqrt{8+x}-10}\,.$$

$(17;248)$

86. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Найдите сумму целых чисел, являющихся решениями неравенства

$$\sqrt{6x-13}-\sqrt{3x^2-13x+13} \geqslant 3x^2-19x+26.$$

7

87. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}}} \geqslant 1.$$

$\boxed{(0;3] \cup (8;+\infty)}$

88. (*МФТИ, 2007*)

$$\sqrt{\frac{3-4x}{5+4x}}+\frac{\sqrt{5+4x}}{2\sqrt{3-4x}-2} \geqslant 0.$$

$\boxed{\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{2}\right)}$

89. (*МГУ, мехмат, 2002-05.2*)

$$\sqrt[3]{2x-x\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{1-2x} \leqslant 0.$$

$\boxed{\{0\} \cup \left[\frac{1}{2};1\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)}$

90. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11*) Один из корней квадратного уравнения

$$px^2+qx+1=0 \quad (p<0)$$

равен 2010. Решите неравенство

$$x+q\sqrt{x}+p>0.$$

$\boxed{x>\frac{1}{2010^2}}$

Умножение на сопряжённое

91. (*«Физтех», 2016, 9*) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}-2}{1-\sqrt{3-x}} \geqslant 1+\sqrt{3-x}\,.$$

$\boxed{[1;2)}$

92. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}-2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x^2+14x+40}-4}\,.$$

$\boxed{(-\infty;-12) \cup (-2;-1] \cup [2;3) \cup [8;+\infty)}$

93. (*«Ломоносов», 2015, 10–11*) Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - x - 56} - \sqrt{x^2 - 25x + 136} < 8\sqrt{\frac{x+7}{x-8}}\,.$$

$\boxed{(-\infty; -7] \cup (18; 20)}$

94. (*МГУ, мехмат, 2003-07.1*)

$$5 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}} + 4 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}} \leqslant 9\sqrt{x+4}\,.$$

$\boxed{-3}$

95. (*МГУ, ВМК, 2006*)

$$11\sqrt{2x - \sqrt{48x - 144}} > 2x - 12.$$

$\boxed{[3; 6) \cup \left(6; \frac{133-22\sqrt{6}}{2}\right)}$

96. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11*)

$$4x + 2 + \sqrt{4 - x} > x^2 + \sqrt{x^2 - 5x + 2}\,.$$

$\boxed{\left(2 - \sqrt{6}; \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right]}$