Функции делителей

Содержание

Пусть n — натуральное число. Нас будут интересовать следующие функции числа n, связанные с его делителями:

- Количество делителей числа n; обозначается $\tau(n)$.
- Сумма всех делителей числа n; обозначается $\sigma(n)$.
- Произведение всех делителей числа n; обозначается $\pi(n)$.

1 Количество делителей числа

Стандартное рассуждение, с помощью которого ищется количество делителей числа, мы осмыслим вначале на простом примере. А затем вы самостоятельно его обобщите и напишете соответствующую формулу.

Задача. Сколько делителей у числа 720?

Решение. Разложим на простые множители: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Следовательно, всякий делитель числа 720 должен иметь вид $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, где $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$, $c \in \{0, 1\}$. Мы видим, что каждому делителю соответствует единственная упорядоченная тройка (a, b, c) и наоборот — каждой упорядоченной тройке (a, b, c) с элементами из данных множеств отвечает единственный делитель числа 720. Можно сказать, что (a, b, c) — это уникальное имя делителя, и потому делителей будет ровно столько же, сколько получится упорядоченных троек (a, b, c).

Но число a можно выбрать 5 способами, число b можно выбрать 3 способами, число c можно выбрать 2 способами; значит, упорядоченную тройку (a, b, c) можно выбрать $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ способами. Таким образом, у числа 720 имеется 30 делителей; иными словами, $\tau(720) = 30$.

1. Пусть имеется разложение натурального числа n на простые множители:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}.$$

Запишите выражение для $\tau(n)$.

2. Найдите количество делителей числа $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3$.

120

3. Найдите количество делителей числа а) 2024; б) 2025; в) 1 000 000 000.

а) 16; б) 15; в) 100

4. (*«Физтех», 2014, 7–8*) Сколько различных натуральных делителей у числа 15552?

42

5. (*«Высшая проба», 2013, 8, 10*) Сколько различных делителей у числа 999^{999}?

$\boxed{2998000}$

6. (*«Росатом», 2017, 7.2*) Сколько существует у числа $a = 441000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ различных делителей, не кратных 15? Найти наибольший такой делитель.

$\boxed{72 \text{ делителя}; d_{\max} = 49000}$

7. (*«Росатом», 2023, 8.3*) Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих

$$496125 = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2,$$

кратных 49, но не делящихся ни на 3, ни на 5?

$\boxed{5400 \text{ чисел}}$

8. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 5–6.2, 7–8.1*) Сколько натуральных чисел от 1 до 2017 имеют ровно три различных натуральных делителя?

$\boxed{14}$

9. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 5–6.2*) Сколько трёхзначных натуральных чисел имеют чётное число различных натуральных делителей?

$\boxed{878}$

10. (*Открытая олимпиада, 2019, 7.1*) Существуют ли такие два натуральных числа x и y, имеющие одинаковое количество натуральных делителей, что $x > y$, а сумма всех делителей x (включая единицу и само число) меньше суммы натуральных делителей y (включая единицу и само число)?

11. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 6.8*) Натуральное число n назовём *хорошим*, если 2020 при делении на n даёт остаток 22. Сколько существует хороших чисел?

$\boxed{10}$

12. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 7–8.5, 9.3*) Назовем число *замечательным*, если оно имеет ровно 4 различных натуральных делителя, причем среди них найдутся два таких, что ни один не кратен другому. Сколько существует замечательных двузначных чисел?

$\boxed{29}$

13. (*«Физтех», 2016, 10*) Сколько существует натуральных чисел N со следующим свойством: если к числу N справа приписать число 6125, то полученное число будет делиться на исходное число N?

$\boxed{12}$

14. (*«Физтех», 2014, 9–11*) Натуральное число имеет ровно два простых делителя. Его квадрат имеет 51 различных натуральных делителей. Какое наибольшее количество различных натуральных делителей может иметь куб этого числа?

$\boxed{100}$

15. (*«Ломоносов», 2013, 7.2*) а) Сколько натуральных делителей имеет число $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{99}$?

б) Найдите количество натуральных делителей числа N, не являющихся точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел).

а) 10000; б) 7500

16. (*«Ломоносов», 2013, 8.2*) а) Найдите количество натуральных делителей числа

$$N = 1\underbrace{00\ldots0}_{999},$$

не являющихся точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел); б) …не являющихся ни точными квадратами, ни точными кубами.

а) 750000; б) 666333

17. (*«Ломоносов», 2013, 9.2*) а) Найдите количество натуральных делителей числа

$$N = 1\underbrace{00\ldots0}_{40},$$

не являющихся ни точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел), ни точными кубами; б) …не представимых в виде m^n, где m и n — натуральные числа, причём $n > 1$.

а) 1093; б) 981

18. (*«Росатом», 2015, 8.3*) Среди простых делителей натурального числа a содержатся только 2 и 3, причем двоек в два раза больше, чем троек. Найти число a, если общее число его возможных делителей на 63 меньше числа всех делителей a^2.

1728

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9.3*) Найдите количество натуральных чисел, которые делятся на 2012 и имеют, не считая единицы и самого этого числа, ровно 2199 различных делителей.

2

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9.4*) Число 2015 можно представить в виде суммы последовательных целых чисел различным образом, например $2015 = 1007 + 1008$ или $2015 = 401 + 402 + 403 + 404 + 405$. Сколькими способами это можно сделать?

16

21. (*«Ломоносов», 2017, 10–11*) Определите количество кратных трём натуральных делителей числа 11!.

432

22. (*«Курчатов», 2019, 8.3*) Сколько существует прямых, проходящих через точку $(0, 2019)$ и пересекающих параболу $y = x^2$ в двух точках с целыми координатами по оси y?

9

23. (*«Физтех», 2012, 9–11*) Какое количество натуральных чисел a обладает следующим свойством: «Наименьшее общее кратное чисел 16, 50 и a равняется 1200»?

$\boxed{15}$

24. (*«Физтех», 2012, 9–10*) Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 5000?

$\boxed{32}$

25. (*«Физтех», 2017, 9*) Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих равенству

$$x^2 + xy = 30000000.$$

$\boxed{256}$

26. (*«Физтех», 2016, 8–9*) Сколько существует пар натуральных чисел $x > y$ таких, что их произведение на 19999 больше их суммы?

$\boxed{15}$

27. (*«Ломоносов», 2022, 7–8.2*) Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,?$$

$\boxed{53}$

28. (*«Физтех», 2023, 8*) Найдите количество пар натуральных чисел x и y, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{5}{x} + \frac{20}{y} = \frac{1}{1260}.$$

$\boxed{525}$

29. (*«Физтех», 2023, 9*) Найдите количество пар целых чисел x и y, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{7}{x} - \frac{6}{y} = \frac{1}{1008}.$$

$\boxed{479}$

30. (*«Росатом», 2021, 9.2*) Сколько существует натуральных чисел k, для которых перевод обыкновенной дроби $\frac{2k+3}{2k}$ в десятичную приведет к конечной десятичной дроби с 100 знаками после запятой?

$\boxed{20200}$

31. (*«Ломоносов», 2021, 9.2*) Сколько существует делителей числа 2021^{2021}, кубический корень из которых является натуральным числом?

$\boxed{454276}$

32. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 9.8*) Сколько существует пар натуральных чисел a и b таких, что $a \geqslant b$ и выполнено

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}\,?$$

$\boxed{5}$

33. (*«Бельчонок», 2019, 9.5*) Сколько пар натуральных чисел (x, y), в которых x и y имеют одинаковую четность, удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1764}$?

$\boxed{75}$

34. (*«Бельчонок», 2019, 9.5*) Сколько пар натуральных чисел (x, y), хотя бы одно из которых нечетно, удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3528}$?

$\boxed{50}$

35. (*«Бельчонок», 2019, 9.5*) Сколько пар различных четных натуральных чисел (x, y) удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1404}\,?$$

$\boxed{62}$

36. (*«Ломоносов», 2020, 9.6, 10.3*) Найдите разложение на простые множители наименьшего натурального числа, имеющего ровно 2020 различных натуральных делителей.

$\boxed{2^{100}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7}$

37. (*САММАТ, 2021, 9.7*) Сколько решений в натуральных числах (m, n) имеет уравнение

$$\text{НОК}\,(m, n) = 2020^3?$$

$\boxed{637}$

38. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 10.2*) Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение $x + y + 2xy = 2023$?

$\boxed{6}$

39. (*«Росатом», 2022, 10.3*) Сколько существует различных троек натуральных чисел a, b, c, для которых

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\,?$$

(Тройки, отличающиеся порядком следования элементов, считаются различными.)

$\boxed{46}$

40. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.1*) Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 42 натуральных делителя (включая единицу и само число).

$\boxed{2880}$

41. (*«Бельчонок», 2020, 11.2*) Натуральное число N имеет 30 делителей, а число $5N$ имеет 40 делителей. Приведите пример такого числа.

42. (*«Бельчонок», 2020, 11.2*) Существует ли натуральное число N, имеющее 24 делителя, такое, что число $3N$ имеет 32 делителя?

43. (*«Росатом», 2018, 11.3*) Найти натуральное число, делящееся на 225 и имеющее 15 различных делителей.

5625, 2025

44. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 11.4*) Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 55 натуральных делителей, считая единицу и само число.

$2^{10} \cdot 3^4$

45. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 10.5, 11.6*) Для натурального числа N выписали все его натуральные делители p_l в порядке возрастания: $1 = p_1 < p_2 < \ldots < p_k = N$. Обозначим количество натуральных делителей числа N через $\tau(N)$. Найдите все возможные значения $\tau(N^3)$, если известно, что

$$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geqslant N^2.$$

5629, 5632, 5635, 11260, 13132, 14992, 26236

46. (*«Курчатов», 2017, 11.5*) Пусть d_1, d_2, $\ldots$, d_n — это все натуральные делители числа $10! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10$. Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1 + \sqrt{10!}} + \frac{1}{d_2 + \sqrt{10!}} + \ldots + \frac{1}{d_n + \sqrt{10!}}.$$

$\frac{3}{16\sqrt{7}}$

2 Сумма делителей числа

Переходим ко второй функции — сумме всех делителей числа n, которая обозначается $\sigma(n)$.

47. Раскройте скобки и упростите выражение:

$$(p-1)\left(p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1\right).$$

48. Пусть $p \neq 1$. Докажите тождество:

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

49. Пусть p — простое число, k — натуральное. Чему равна $\sigma(p^k)$ — сумма делителей числа p^k?

50. Пусть p и q — простые числа.

- Напишите сумму делителей числа pq. Разложите это выражение на множители.
- Напишите сумму делителей числа $p^2 q$. Разложите это выражение на множители.
- Напишите сумму делителей числа $p^2 q^2$. Разложите это выражение на множители.

51. Пусть p, q, r — простые числа. Напишите сумму делителей числа pqr. Разложите это выражение на множители.

52. Проясняется ли закономерность? Пусть имеется разложение натурального числа n на простые множители:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}.$$

Напишите выражение для $\sigma(n)$.

53. (*«Росатом», 2017, 8.2*) Найти сумму всех делителей числа $a = 540$.

$\boxed{1680}$

54. (*«Росатом», 2019, 9.2*) Натуральное число a раскладывается в произведение трех различных простых делителей. Сумма всех его делителей, включая единицу и a, равно 72. Найти число a.

55. (*«Росатом», 2017, 9.4*) Найти сумму всех целых положительных делителей числа

$$a = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^6.$$

$\boxed{(2^9 - 1) \cdot \frac{3^4 - 1}{2} \cdot \frac{5^7 - 1}{4}}$

56. (*«Бельчонок», 2021, 9.5*) Найдите сумму всех натуральных делителей числа

$$N = 3^3 \cdot 4^4 \cdot 25^3.$$

$\boxed{(2^9 - 1) \cdot \frac{3^4 - 1}{2} \cdot \frac{5^7 - 1}{4}}$

57. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.1*) Найдите натуральное число, которое имеет десять натуральных делителей (включая единицу и само число), два из которых простые, а сумма всех его натуральных делителей равна 186.

$\boxed{80}$

58. (*Открытая олимпиада, 2020, 10.3*) Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $x(y + z) = 1000$

$\boxed{2324}$

59. (*Открытая олимпиада, 2022, 10.6*) Обозначим за $\sigma(n)$ сумму всех делителей числа n (включая само число). Для каких n выполняется неравенство $\sigma(8n) > \sigma(9n)$?

$n = 3^l x$ или $n = 6 \cdot 3^l x$, где l — целое неотрицательно число, а x — натуральное число, не делящееся ни на 2, ни на 3

60. (*«Курчатов», 2015, 11.3*) Митя сложил все нечётные натуральные делители некоторого чётного числа N (включая единицу), а Ваня сложил все чётные натуральные делители числа N (включая само число). Затем Ванину сумму умножили на Митину. Может ли произведение быть квадратом натурального числа?

3 Произведение делителей числа

Напомним, что произведение всех делителей числа n обозначается $\pi(n)$.

61. Возьмем число 20. Выпишем в порядке возрастания все его делители: 1, 2, 4, 5, 10, 20. Умножим первый делитель на шестой, второй на пятый, третий на четвертый:

$$1 \cdot 20 = 20, \quad 2 \cdot 10 = 20, \quad 4 \cdot 5 = 20.$$

Перемножьте эти три равенства и запишите $\pi(20)$ в виде степени числа 20.

62. Теперь найдем $\pi(36)$. Попробуйте проделать ту же процедуру, что и в предыдущей задаче. Возникнет небольшой нюанс, но вы справитесь. Запишите $\pi(36)$ в виде степени целого числа.

63. На самом деле можно предложить единый алгоритм вычисления $\pi(n)$, одинаково работающий для любого n. Именно, пойдем циклом по всем делителям числа n и для каждого делителя d рассмотрим *сопряжённый делитель* $d' = n/d$. Запишите все равенства $dd' = n$, перемножьте их и покажите, что

$$\pi(n) = n^{\frac{\tau(n)}{2}}.$$

64. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 9.3*) Для натурального числа n обозначим через $\pi(n)$ произведение всех его натуральных делителей (включая n).

а) Вычислите $\pi(2022)$.

б) Существует ли простое число p и натуральное число n такие, что $\pi(n) = p^{2022}$?

65. (*«Высшая проба», 2017, 7.3*) Найти все натуральные числа n от 1 до 100 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^3.

12, 18, 20, 28, 32, 44, 45, 50, 52, 63, 68, 75, 76, 92, 98, 99

66. (*«Высшая проба», 2017, 9.2*) Найдите все натуральные числа n от 400 до 600 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^5.

405, 464, 496, 512, 567, 592