

Формула биссектрисы

1. Длины сторон треугольника равны a , b и c . Биссектриса длиной ℓ проведена к стороне c .

а) Докажите, что

$$\ell = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a + b},$$

где γ — угол между сторонами a и b .

б) Докажите, что

$$\ell^2 = ab - xy,$$

где x и y — длины отрезков, на которые биссектриса разбивает сторону c .

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.2) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 3 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол BAC .

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ cos 30°

3. («Физтех», 2023, 11) Окружность проходит через вершины A и B прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), а также через точку L пересечения стороны BC с биссектрисой AL . Катет AC точкой пересечения N с окружностью оказался разделён на два отрезка: $AN = 4$, $NC = 8$. Найдите площадь треугольника ABC . При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

96

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.4) Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает окружность, описанную вокруг этого треугольника, в точке E . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $AE = d$.

$\frac{a}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{d}{a} \cos \frac{\alpha}{2} \right)$