Аня, Коля и яблоки

Данная статья посвящена стандартному приему решения уравнений в целых числах с двумя переменными, который можно кратко сформулировать так: *если одна из переменных входит в уравнение линейно, то выражаем ее и в полученной дроби выделяем целую часть.*

Указанный прием позволит нам, в частности, решить трудную задачу про Аню, Колю и яблоки, которая предлагалась на Открытой олимпиаде ИТМО в 2015 году в 8 классе последним номером варианта (то есть самую сложную задачу 8.8 оттуда). При этом наше решение, как нам кажется, будет несколько короче и яснее авторского.

Но сначала давайте познакомимся с самим приемом и потренируемся в его применении, рассмотрев пару относительно несложных олимпиадных задач.

Задача. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.7*) Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых выполнено равенство

$$x^2 + xy = y + 92.$$

Решение. Видим, что переменная y входит линейно, поэтому стоит выразить ее через x:

$$xy - y = 92 - x^2,$$
$$y(x-1) = 92 - x^2.$$

При $x = 1$ получается неверное числовое равенство $0 = 91$, поэтому данное уравнение не может иметь решений с $x = 1$. Значит, делим на $x - 1$ (это не изменит множества решений уравнения):

$$y = \frac{92 - x^2}{x-1}.$$

В полученной дроби выделяем целую часть, то есть делим с остатком многочлен в числителе на многочлен в знаменателе:

$$y = \frac{92 - (x^2-1) - 1}{x-1} = \frac{91}{x-1} - \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{91}{x-1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \frac{91}{x-1} - (x+1).$$

Поскольку x и y являются натуральными числами, дробь $\frac{91}{x-1}$ также есть натуральное число. Следовательно, 91 делится на $x - 1$, так что $x - 1$ может принимать лишь значения 1, 7, 13, 91. Первые два варианта годятся и приводят к двум решениям $x = 2$, $y = 88$ и $x = 8$, $y = 4$. Третий и четвертый варианты отпадают, потому что y оказывается не натуральным.

Ответ. $(2, 88)$; $(8, 4)$.

В некоторых задачах (с виду — обычных текстовых) нужно еще догадаться, что тут придется иметь дело с уравнением в целых числах :-)

Задача. (*«Ломоносов», 2015, 7.4, 8.1*) На день рождения Андрея последней пришла Яна, подарившая ему мяч, а предпоследним — Эдуард, подаривший ему калькулятор. Испытывая калькулятор, Андрей заметил, что произведение количества всех его подарков на количество подарков, которые были у него до прихода Эдуарда, ровно на 16 больше, чем произведение его возраста на количество подарков, которые были у него до прихода Яны. Сколько подарков у Андрея?

Решение. Пусть n — возраст Андрея, x — общее (искомое) количество подарков у него. Тогда до прихода Эдуарда количество подарков равнялось $x-2$, а до прихода Яны оно было равно $x-1$. Согласно условию имеем:

$$x(x-2) = n(x-1) + 16.$$

Ну вот оно — уравнение в целых числах! Переменная n входит в него линейно, поэтому выражаем ее и выделяем целую часть[1]:

$$n = \frac{x(x-2)-16}{x-1} = \frac{x^2-2x-16}{x-1} = \frac{(x^2-x)-(x+16)}{x-1} = \frac{x(x-1)-(x+16)}{x-1} =$$
$$= x - \frac{x+16}{x-1} = x - \frac{(x-1)+17}{x-1} = x-1-\frac{17}{x-1}.$$

Ситуация аналогична предыдущей задаче: 17 делится на $x-1$, откуда $x=2$ или $x=18$. Но $x=2$ не годится, поскольку тогда $n<0$. При $x=18$ всё ок: $n=16$.

Ответ. 18.

Ну и наконец — обещанная задача 8.8.

Задача. (*Открытая олимпиада, 2015, 8.8*) Аня и Коля собирали яблоки. Оказалось, что Аня собрала столько же яблок, сколько Коля собрал процентов от общего числа собранных ими яблок, при этом Коля собрал нечетное число яблок. Сколько яблок собрали Аня и Коля вместе?

Решение. Пусть Аня собрала a яблок и Коля собрал k яблок. По условию имеем:

$$a = \frac{k}{a+k}\cdot 100,$$

то есть

$$a^2 + ak = 100k.$$

Переменная k входит линейно — выражаем ее:

$$a^2 = k(100-a),$$
$$k = \frac{a^2}{100-a}.$$

Ну и выделяем целую часть:

$$k = \frac{a^2-10^4+10^4}{100-a} = \frac{(a-100)(a+100)+10^4}{100-a} = -a-100+\frac{10^4}{100-a}.$$

Значит, 10^4 делится на $100-a$. При этом $100-a>0$, иначе k отрицательно. Следовательно, $100-a$ есть однозначный или двузначный натуральный делитель числа $10^4 = 2^4\cdot 5^4$. Нам нужно будет перебрать все такие делители.

- Пятерка не входит входит в делитель: таковы делители 1, 2, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$.

[1] В данном конкретном случае можно было бы короче:

$$n = \frac{x^2-2x-16}{x-1} = \frac{x^2-2x+1-17}{x-1} = \frac{(x-1)^2-17}{x-1} = x-1-\frac{17}{x-1},$$

но мы хотели заодно показать общую процедуру последовательного избавления от степеней x в числителе, которая может пригодиться в общем случае.

- Пятерка входит в делитель в первой степени: таковы делители 5, $2 \cdot 5 = 10$, $2^2 \cdot 5 = 20$, $2^3 \cdot 5 = 40$, $2^4 \cdot 5 = 80$.
- Пятерка входит в делитель во второй степени: таковы делители $5^2 = 25$, $2 \cdot 5^2 = 50$.
- В третьей степени и выше пятерка в делитель входить не может, ибо $5^3 = 125$.

Итого имеем для рассмотрения 13 делителей: $100 - a \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80\}$. В каждом случае находим a и k. При этом вычисляем лишь нечетные k, поскольку в ином случае нам достаточно понять только, что k четно (просто анализируя степень вхождения двойки в число k). Результаты занесем в таблицу.

$100 - a$	1	2	4	5	8	10	16	20	25	40	50	80
a	99	98	96	95	92	90	84	80	75	60	50	20
$k = \frac{a^2}{100-a}$	9801	чет	чет	1805	чет	чет	441	чет	225	чет	чет	5
$a + k$	9900			1900			525		300			25

Последняя строчка таблицы дает суммарное количество яблок, собранных Аней и Колей. Это и есть ответ :-)

Ответ. 9900, 1900, 525, 300 или 25.

Ну а вот для сравнения — авторский способ решения.

8. (5 баллов) Аня и Коля собирали яблоки. Оказалось, что Аня собрала столько же яблок, сколько Коля собрал процентов от общего числа собранных ими яблок, при этом Коля собрал нечётное число яблок. Сколько яблок собрали Аня и Коля вместе?

Ответ: 25, 300, 525, 1900, 9900.

Решение:

Все дополнительные переменные, которые будут вводится по ходу решения, натуральные.

Обозначим количество яблок, собранных Колей, за k, количество яблок, собранных Аней, за a, а общее количество собранных яблок, за n. Аня собрала столько же яблок, сколько Коля собрал процентов от общего числа собранных ими яблок, значит, $a = \frac{k}{n} \cdot 100$, откуда $100k = an$

Пусть a чётное число. Тогда подставив в полученное равенство $n = a + k$, получаем $100k = a(a + k)$. Пусть $d = \text{НОД}(a, k)$, тогда $k = dx$ и $a = dy$, где x и y взаимно просты. Получаем равенство $100dx = dy(dx + dy)$, сократив которое на d имеем $100x = dy(x + y)$. Так как x, y и $x + y$ взаимно просты, и $dy(x + y)$ делится на x, получаем, что d делится на x.

При этом из нечётности числа k и чётности a (и, следовательно, y) следует, что числа d, x и $x + y$ нечётны. Поскольку $dy(x + y)$ делится на 4, y делится на 4, т.е. $y = 4z$.

Получаем $100x = 4dz(x + 4z)$, откуда $25x = dz(x + 4z)$. Так как $\frac{25}{z(x+4z)} = \frac{d}{x}$ целое число, получаем, что 25 делится на $z(x + 4z)$. При этом $x + 4z > z$.

1) $z = 1$, $x + 4z = 5$. Тогда $x = 1$, $d = \frac{25x}{z(x+4z)} = 5$. Значит, $k = dx = 5$, $a = dy = 4dz = 20$, откуда $n = 25$.

2) $z = 1$, $x + 4z = 25$. Тогда $x = 21$, $d = \frac{25x}{z(x+4z)} = 21$. Значит, $k = dx = 21^2 = 441$, $a = dy = 4dz = 84$, откуда $n = 525$.

Пусть теперь a нечётное число (а n, соответственно, чётное). Тогда подставив в полученное равенство $a = n - k$, получаем $100k = n(n - k)$. Пусть $d = \text{НОД}(n, k)$, тогда $k = dx$ и $n = dy$, где x и y взаимно просты. Получаем равенство $100dx = dy(dy - dx)$, сократив которое на d имеем $100x = dy(y - x)$. Так как x, y и $y - x$ взаимно просты, и $dy(y - x)$ делится на x, получаем, что d делится на x.

При этом из нечётности чисел k и a следует, что числа d, x и $y - x$ также нечётны. Поскольку $dy(x + y)$ делится на 4, y делится на 4, т.е. $y = 4z$.

Получаем $100x = 4dz(4z - x)$, откуда $25x = dz(4z - x)$. Так как $\frac{25}{z(4z-x)} = \frac{d}{x}$ целое число, получаем, что 25 делится на $z(4z - x)$. Таким образом, числа z и $4z - x$ дают в произведении 1, 5 или 25 и при этом взаимно просты. Значит, одно из них единица, а второе делитель 25.

1) $z = 1$, $4z - x = 1$. Тогда $x = 3$, $d = \frac{25x}{z(4z-x)} = 75$. Значит, $k = dx = 225$, $n = dy = 4dz = 300$.

2) $z = 1$; $4z - x = 5$ или $4z - x = 25$ – эти случаи невозможны, так как получается, что $4z - x > 4z = 4$.

3) $z = 5$, $4z - x = 1$. Тогда $x = 19$, $d = \frac{25x}{z(4z-x)} = 95$. Значит, $k = dx = 19 \cdot 95 = 1805$, $n = dy = 4dz = 1900$.

4) $z = 25$, $4z - x = 1$. Тогда $x = 99$, $d = \frac{25x}{z(4z-x)} = 99$. Значит, $k = dx = 99^2 = 9801$, $n = dy = 4dz = 9900$.