Олимпиадная математика. 7 класс

Задачник 7.2023

Данное пособие содержит задачи для семиклассников, которые предлагались в последние годы на следующих олимпиадах:

1. Всероссийская олимпиада школьников, школьный этап в Москве (2021–2023)
2. Всероссийская олимпиада школьников, муниципальный этап в Москве (2020–2023)
3. Математический праздник (2021–2023)
4. Математический праздник в Математической вертикали (2020–2023)
5. Турнир Архимеда, зимний тур (2021–2023)
6. Московская устная олимпиада для 6–7 классов (2021–2023)
7. Ломоносов (2020–2023)
8. Покори Воробьёвы горы! (2020–2023)
9. Высшая проба (2021–2023)
10. Курчатов (2020–2023)
11. Росатом (2015–2023)
12. Всесибирская олимпиада (2015–2023)
13. Открытая олимпиада (2015–2023)
14. Формула Единства / Третье тысячелетие (2015–2023)
15. САММАТ (2021–2023)
16. Бельчонок (2018–2023)
17. Олимпиада КФУ (2022–2023)
18. Будущие исследователи — будущее науки (2015–2023)
19. Надежда энергетики (2015–2023)

Годы, являющиеся левой границей промежутка дат для каждой олимпиады, выбраны из следующих соображений.

- Более ранние задачи олимпиад, имеющих номера 1–10 в приведённом списке, можно найти в олимпиадных листках и в Задачнике 6–7.2019. Кстати, многие пункты оглавления настоящего задачника дублируют названия указанных листков, и тогда раздел задачника начинается со ссылки на соответствующий листок.

- В остальных случаях нижняя граница определялась либо наличием соответствующих материалов на сайтах олимпиад, либо моими личными возможностями :-)

Указание номера задачи позволяет составить представление о её сложности: чем больше номер задачи, тем она, как правило, труднее.

Распределение задач по темам зачастую сделано «на глаз»; в дальнейшем (по мере моего осмысления) некоторые задачи могут переместиться в другие темы. Актуальная версия задачника находится по адресу: http://mathus.ru/math/7math2023.pdf.

Оглавление

Глава 1

Начало

1.1 Примеры и конструкции

Дополнительные задачи — в листке Примеры и конструкции.

1.1.1. (*Всеросс., 2020, МЭ, 7.1*) Запишите десять раз число 1,11 и одиннадцать раз число 1,01. Зачеркните одно или несколько чисел так, чтобы сумма оставшихся чисел была равна 20,19.

1.1.2. (*Всеросс., 2021, МЭ, 7.1*) Нарисуйте ряд из 11 кружочков, каждый из которых либо красный, либо синий, либо зелёный. Причём из любых трёх идущих подряд кружочков должен быть хотя бы один красный, из любых четырёх идущих подряд кружочков должен быть хотя бы один синий, а зелёных должно быть больше половины. Сколько красных кружочков у Вас получилось?

1.1.3. (*Всеросс., 2020, МЭ, 7.2*) Расположите на плоскости точки A, B, C, D и E так, чтобы можно было указать ровно восемь треугольников с вершинами в отмеченных точках. Перечислите эти треугольники.

1.1.4. (*Всеросс., 2021, МЭ, 7.2*) Представьте число 32 как произведение трёх целых множителей, сумма которых равна 3. Чему равен меньший из множителей?

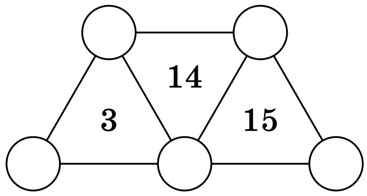
1.1.5. (*САММАТ, 2021, 7.4*) Представить число 1 в виде суммы пяти дробей вида $\frac{1}{n}$ с различными натуральными знаменателями n.

1.1.6. (*«Бельчонок», 2023, 7.1*) Расположите в каких-то клетках квадрата 6×6 по одной снежинке $(*)$ так, чтобы в любой строке было ровно три снежинки, а в любом столбце — одна или четыре снежинки.

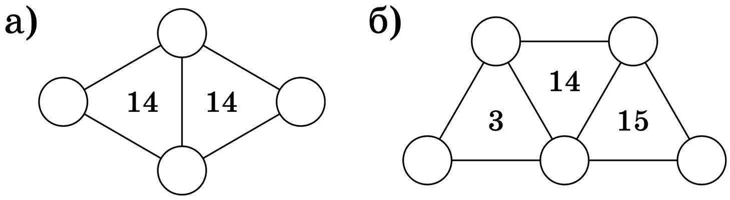
1.1.7. (*«Бельчонок», 2018, 7.1*) Лена купила два мотка шнура для вязания ковра. В одном мотке 600 м шнура, в другом — 14 м. Как Лена может отмерить 1 м шнура, не пользуясь измерительными приспособлениями?

1.1.8. (*Всесиб., 2023, 7.1*) Сто эльфов разного возраста встали в круг. Каждый из них, кто оказался старше обоих своих соседей, закрыл левый глаз. Каждый же, кто оказался младше обоих соседей, закрыл правый. В итоге оказалось, что все эльфы стоят с закрытым глазом. Приведите пример, как такое может быть возможно.

1.1.9. (*Математический праздник, 2022, 7.1*) Ваня расставил в кружках различные цифры, а внутри каждого треугольника записал либо сумму, либо произведение цифр в его вершинах. Потом он стёр цифры в кружочках. Впишите в кружочки различные цифры так, чтобы условие выполнялось.



1.1.10. (*Матпраздник в Матвертикали, 2022, 7.1*) На рисунке изображены два кодовых замка. Замок откроется, если вписать в кружочки различные цифры так, чтобы число внутри каждого из треугольников совпало или с суммой, или с произведением цифр в его вершинах. Какая комбинация из а) четырёх б) пяти различных цифр откроет замок?



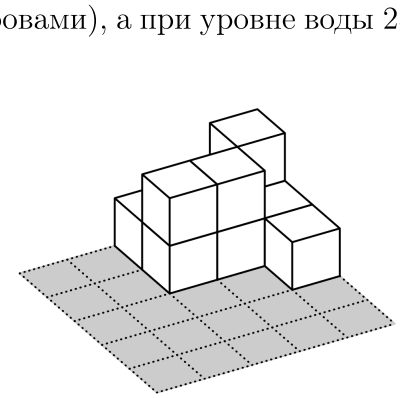
[*1 балл*] **[*3 балла*]**

1.1.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 5.1, 7.1*) Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.

1.1.12. (*Всесиб., 2020, 7.2*) Юра и Рома нашли пять натуральных чисел, идущих подряд, и возвели каждое из них в квадрат. После этого Юра забрал себе три из пяти получившихся квадратов, а Рома два оставшихся. Оказалось, что сумма чисел, которые забрал Юра, равна сумме чисел, которые забрал себе Рома. Приведите пример чисел, которые могли найти Юра и Рома, и проверьте, что они подходят.

1.1.13. (*Математический праздник, 2023, 7.2*) Посреди пустого бассейна стоит квадратная платформа 50×50 сантиметров, расчерченная на клеточки 10×10 см. На клетки платформы Лена ставит башенки из кубиков $10 \times 10 \times 10$ см. Потом Таня включает воду.

Если высоты башенок были такие, как в таблице справа, то при уровне воды 5 см был 1 остров, при уровне воды 15 см было два острова (если острова «граничат по углу», то считаются отдельными островами), а при уровне воды 25 см все башенки оказались закрыты водой и стало 0 островов.



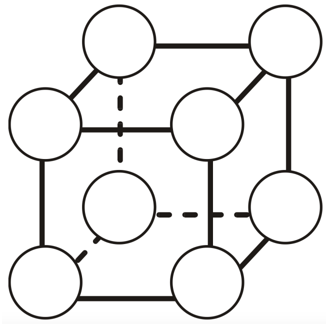
0	**0**	**1**	**1**	**2**
0	**0**	**2**	**2**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**

Придумайте, какие башенки из кубиков можно поставить, чтобы количество островов было следующим:

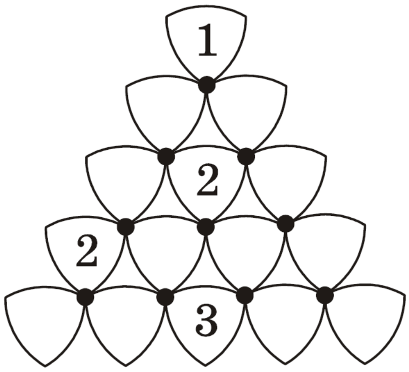
Уровень воды (см)	5	15	25	35	45
Количество островов	2	5	2	5	0

В ответе напишите в каждой клетке квадрата 5 на 5, сколько кубиков на ней стоит.

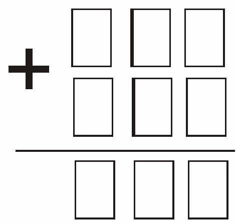
1.1.14. (*Турнир Архимеда, 2021.2*) **Расставьте цифры** от 1 до 8 по одной в вершинах куба таким образом, чтобы для каждой из шести граней суммы четырёх чисел, стоящих в вершинах этой грани, были различны.



1.1.15. (*Турнир Архимеда, 2023.1.1*) **Из лепестков сложен треугольник.** Требуется заполнить лепестки на рисунке числами 1, 2 и 3 так, чтобы в каждом лепестке было записано ровно одно число и соблюдалось правило: если три лепестка касаются одного и того же чёрного кружочка, то числа в них либо все одинаковые, либо все разные. Вася заполнил числами 4 лепестка. Помогите ему заполнить все лепестки в соответствии с правилом, так, чтобы сумма чисел в треугольнике была максимальной. Укажите эту сумму.

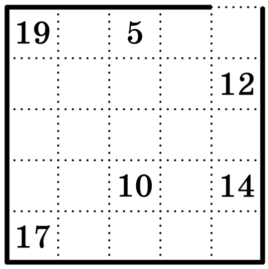


1.1.16. (*Турнир Архимеда, 2023.1.2*) **На столе** выложены карточки в виде примера на сложение (см. рис.). Оксана на каждой карточке написала по одной цифре (цифры не обязательно разные). Получился пример с верным ответом. Федя переложил карточки в первых двух строках (третью строку он не трогал) — ни одна из карточек не оказалась в том же числовом разряде, где была, поэтому ответ оказался неверным. На помощь пришла Настя. Ей удалось, поменяв одну карточку в третьей строке на свою карточку с другой цифрой, получить пример с верным ответом. Какими могли бы быть примеры Оксаны, Феди и Насти? Придумайте подходящий набор примеров. Достаточно одного набора.



1.1.17. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 7.2*) Есть 81 квадратик одинакового размера. Составьте из них два прямоугольника так, так чтобы их периметры отличались в 2 раза. Лишних квадратиков остаться не должно.

1.1.18. (*Матпраздник в Матвертикали, 2020, 7.3*) На клетчатой бумаге был нарисован лабиринт: квадрат 5×5 (внешняя стена) с выходом шириной в одну клетку, а также внутренние стенки, идущие по линиям сетки. На рисунке мы скрыли от вас все внутренние стенки, идущие по линиям сетки. Начертите, как они могли располагаться, зная, что числа, стоящие в клетках, показывают наименьшее количество шагов, за которое можно было покинуть лабиринт, стартовав из этой клетки (шаг делается в соседнюю по стороне клетку, если они не разделены стенкой). Достаточно нарисовать один пример.

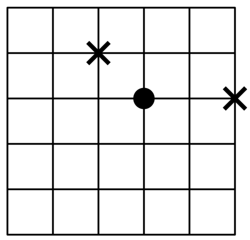


1.1.19. (*«Бельчонок», 2021, 7.3*) На клетчатой бумаге нарисованы два квадрата размерами 3×3 и 4×4 клеток. Придумайте, как разрезать по линиям сетки каждый из них на две части так, чтобы из полученных частей складывался квадрат.

1.1.20. (*САММАТ, 2021, 7.9*) Найдите пару натуральных чисел k и n таких, что

$$k^n = 2019\cdot 2020\cdot 2021 + 2020 \quad (n \neq 1).$$

1.1.21. (*Математический праздник, 2022, 6.4, 7.4*) Лабиринт для мышей (см. рисунок) представляет собой квадрат 5×5 метров, мыши могут бегать только по дорожкам. На двух перекрёстках положили по одинаковому куску сыра (обозначены крестиками). На другом перекрёстке сидит мышка (обозначена кружочком). Она чует, где сыр, но до обоих кусочков ей нужно пробежать одинаковое расстояние. Поэтому она не знает, какой кусочек выбрать, и задумчиво сидит на месте.



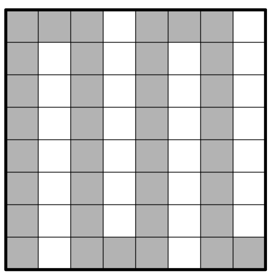
1. Отметьте ещё пять перекрёстков, где могла бы задумчиво сидеть мышка (откуда до обоих кусочков сыра ей нужно пробежать одинаковое расстояние).

2. Придумайте, на каких двух перекрёстках можно положить по куску сыра так, чтобы подходящих для задумчивой мышки перекрёстков оказалось как можно больше.

1.1.22. (*Открытая олимпиада, 2019, 7.4*) Придумайте два различных набора из восьми натуральных чисел каждый, такие что сумма чисел в каждом наборе равна их произведению.

Для разных наборов сумма и произведение могут быть разными. Числа в наборах могут повторяться.

1.1.23. (*Матпраздник в Матвертикали, 2020, 7.6*) Жюри покрасило несколько клеток доски размером 8×8, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна соседствовать ни с одной другой ранее закрашенной клеткой (соседними считаются клетки с общей стороной). Нам удалось покрасить 36 клеток (см. рис.). Побейте наш рекорд и постарайтесь закрасить как можно больше клеток.



1.2 Да или нет?

Дополнительные задачи — в листке Да или нет?.

1.2.1. (*Открытая олимпиада, 2020, 7.1*) Существуют ли такие натуральные числа a, b и c что $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$?

1.2.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 5.1, 6.1, 7.1*) За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142+2=144$, $142-4=138$ и несколько других чисел).

а) Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?

б) Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021?

1.2.3. (*«Надежда энергетики», 2022, 7.1*) Рабочая зона электрической подстанции имеет несколько трансформаторных залов. В начале рабочего дня количество залов, в которых работающих и выключенных трансформаторов было поровну, составляло шестую часть всех залов. Когда в каждом зале включили еще по одному трансформатору, количество залов, в которых работающих и выключенных трансформаторов стало поровну, увеличилось до трети от их общего количества. Могло ли в начале рабочего дня залов, в которых количество работающих и выключенных трансформаторов отличалось на единицу, быть более половины всех залов?

1.2.4. (*Открытая олимпиада, 2018, 7.1*) Существуют ли четыре таких различных делящихся на 3 числа, что сумма любых трёх из них делится на четвёртое?

1.2.5. (*Открытая олимпиада, 2016, 7.1*) Можно ли разрезать клетчатый квадрат 8×8 по клеточкам на 7 фигур равного периметра?

1.2.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 7.1*) Существует ли число, имеющее ровно 8 натуральных делителей:

$$a<b<c<d<e<f<g<h,$$

такое что $a+b+c=d$ и $e+f+g=h$?

1.2.7. (*Московская устная олимпиада, 2023, 7.1*) **По кругу.** Петя расставил по кругу числа от 1 до 15 в некотором порядке и вычислил разность каждых двух соседних чисел (вычитая из большего числа меньшее). Может ли сумма всех полученных разностей равняться 24?

1.2.8. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 7.2*) Можно ли расставить на ребрах куба 12 чисел $1, 2, \ldots, 12$ так, чтобы произведение четырех чисел верхней грани равнялось произведению четырех чисел нижней грани?

1.2.9. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 7.2*) В вершинах куба расставили целые числа, а затем для каждой грани подсчитали произведение четырех чисел в вершинах этой грани. Могло ли оказаться так, что все шесть подсчитанных произведений отрицательны?

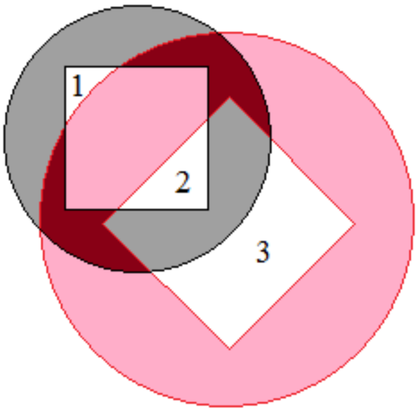
1.2.10. (*Всесиб., 2016, 7.2*) Можно ли покрасить плоскость в 2016 цветов таким образом, что среди вершин любого треугольника найдётся хотя бы два цвета?

1.2.11. (*«Бельчонок», 2019, 7.2*) Можно ли разбить куб со стороной 6 на 112 кубиков с целыми сторонами (не обязательно равных)?

1.2.12. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 7.2*) Найдутся ли три натуральных числа, больших 1, произведение которых равно 500 000 080 000 003?

1.2.13. (*Открытая олимпиада, 2016, 7.2*) Мальчик Вася посмотрел на часы и увидел там какое-то время с количеством часов, большим нуля. Увиденные цифры он прочитал как трёх- или четырёхзначное число (например 5:07 превратилось бы у него в 507). Затем он вычислил количество минут, прошедшее с полуночи. Могло ли получиться так, что первое полученное им число делится на второе?

1.2.14. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 6.3, 7.2*) Будем называть *странным кольцом* круг с квадратной дыркой в середине (центры квадрата и круга совпадают; оставшаяся часть круга при этом не должна распадаться на части). Если положить на стол два странных кольца, то может получиться фигура с несколькими дырками (например, на рисунке их 3).



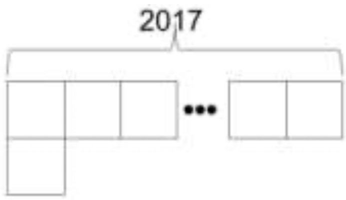
А можно ли вырезать из бумаги два странных кольца и положить их на стол так, чтобы получилось больше 5 дырок?

1.2.15. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 7.3*) Существует ли набор из 25 различных целых чисел, обладающих следующим свойством: сумма всех 25 чисел равна нулю, а для любых 24 из них модуль суммы больше 25?

1.2.16. (*Турнир Архимеда, 2022.2.1*) **На клетчатой доске** 7×9 требуется расставить 24 крестика (в каждой клетке не более одного крестика) так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 4 крестика, а в любом квадрате 5×5 — не менее 14 пустых клеток. Возможно ли это? Если да, нарисуйте пример. Если нет, объясните почему.

1.2.17. (*«Надежда энергетики», 2021, 7.3*) Дано 2021 целое число. Их произведение равно 1. Может ли сумма их кубов быть равной нулю?

1.2.18. (*Всесиб., 2017, 7.3*) Клетки бесконечной клетчатой плоскости покрасили в чёрный и белый цвета таким образом, что в любом уголке из 2018 клеток (даже повёрнутом и/или перевёрнутом) белых и чёрных клеток поровну. Верно ли, что все клетки плоскости покрашены в шахматном порядке?



1.2.19. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.6*) Произведение 2015 целых чисел равно 1. Может ли сумма их 2015-х степеней быть равной нулю?

1.2.20. (*«Бельчонок», 2019, 7.3*) Оля написала на своем листке несколько чисел, оканчивающихся на 2, а Катя написала на своем листке столько же чисел, оканчивающихся на 3. Потом Оля написала на своем листке несколько чисел, оканчивающихся на 3, а Катя написала на своем листке столько же чисел, оканчивающихся на 4. У каждой девочки на листке оказалось записано по 25 чисел. Могут ли суммы чисел Оли и Кати быть равными?

1.2.21. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.3*) На шахматную доску поставили шашки так, что во всех горизонтальных рядах число шашек различно (цвет шашек и клеток при этом не имеет значения). Возможно ли, что в каждой вертикальной колонке число шашек не равно числу шашек ни на одной из горизонталей?

1.2.22. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 6.2, 7.3, 8.1*) Полина написала восемь последовательных натуральных чисел и обвела четыре из них чёрной ручкой, а четыре — красной. Может ли произведение красных чисел оказаться в 20 раз больше произведения чёрных?

1.2.23. (*Открытая олимпиада, 2018, 7.3*) По кругу стоят 20 блюдечек, на них разложены 40 пирожков. За один ход разрешается взять 2 пирожка, лежащие на одном блюдечке, и переложить их на 2 соседних блюдечка. При любом ли начальном расположении пирожков можно добиться того, чтобы на всех блюдечках оказалось поровну пирожков?

1.2.24. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 7.4*) Есть 20 палочек длины 1, 2, ..., 20. Можно ли из них сложить

а) квадрат;

б) равносторонний треугольник? (Нужно использовать, не ломая, все палочки.)

1.2.25. (*Московская устная олимпиада, 2021, 7.4*) Можно ли расставить по кругу цифры от 1 до 9 так, чтобы любые две цифры, стоящие подряд, если их прочитать как по часовой, так и против часовой стрелки, образовывали составное двузначное число?

1.2.26. (*Московская устная олимпиада, 2022, 7.4*) На доске записаны четыре последовательных натуральных числа в порядке возрастания. Требуется между каждыми двумя соседними числами поставить знак арифметического действия и вычислить значение полученного выражения. Всегда ли можно сделать это двумя различными способами, дающими одинаковые результаты?

1.2.27. (*«Бельчонок», 2022, 7.4*) Сумма нескольких натуральных чисел равна 2022. Арина поделила каждое чётное число на два, а каждое нечётное умножила на три. Могла ли сумма чисел не измениться?

1.2.28. (*Открытая олимпиада, 2017, 7.4*) Существует ли натуральное четырёхзначное число с суммой цифр 23, которое делится на 23?

1.2.29. (*Открытая олимпиада, 2022, 7.4*) Даны три числа: пятизначное, четырёхзначное и трёхзначное. Каждое из них состоит из одинаковых цифр (каждое — из своих). Может ли получиться так, что их сумма — пятизначное число, состоящее из пяти различных цифр?

1.2.30. (*Всесиб., 2018, 7.4*) Число называется *хорошим*, если любые две соседние цифры в его записи отличаются хотя бы на 5. Вера написала хорошее число, а потом заменила одинаковые его цифры на одинаковые буквы, а разные — на разные. Могло ли у неё получиться слово НОВОСИБИРСК?

1.2.31. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 7.5*) Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: $1, 2, \ldots, 25$. Могло ли оказаться так, что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

1.2.32. (*Открытая олимпиада, 2022, 7.6*) На каждой из шести граней куба написали число. Потом на каждом из двенадцати рёбер написали сумму чисел на двух соседних с ним гранях. Можно ли, зная эти 12 чисел на рёбрах, однозначно восстановить числа на гранях?

1.2.33. (*Открытая олимпиада, 2016, 7.6*) Число, записанное на доске, разрешается умножать на 5 или переставлять в нём цифры (нельзя ставить ноль на первое место). Можно ли из числа 1 таким образом получить стозначное число $222\ldots2225$?

1.2.34. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.7, 7–8.6, 9.5*) Можно ли так расставить знаки «+» и «−» на месте звездочек так, чтобы получилось верное равенство

$$*\,1^2 * 2^2 * \ldots * 2020^2 = 2020?$$

1.2.35. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.7*) Можно ли 2015-угольник разбить на параллелограммы?

1.2.36. (*Турнир Архимеда, 2022.2.4*) **В кладовой Царя Гороха** (ЦГ) лежат 2007 мешков с монетами, в каждом из них — ровно 2022 монеты. Мешки пронумерованы различными числами от 1 до 2007. ЦГ выбирает один из мешков и перекладывает из него по одной монете в мешки с номерами большими, чем у выбранного. Иван Царевич (ИЦ) имеет право указать номера нескольких мешков, а ЦГ сообщает, ему, сколько всего монет оказалось в указанных мешках после перекладывания (в сумме!). Сможет ли ИЦ определить номер выбранного ЦГ мешка? Если да, объясните как. Если нет, объясните почему.

Глава 2

Арифметика

2.1 Десятичная запись

Дополнительные задачи — в листке Десятичная система счисления.

2.1.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 7.3*) Листы в книге пронумерованы следующим образом: первый лист — это две страницы (с номерами 1 и 2), второй лист — это следующие две страницы (с номерами 3 и 4) и так далее. Хулиган Петя вырвал из книги несколько подряд идущих листов: первая вырванная страница имеет номер 185, а номер последней вырванной страницы состоит из тех же цифр, но идущих в другом порядке. Сколько листов вырвал Петя?

2.1.2. (*«Бельчонок», 2021, 7.1*) Вася утверждает, что существует такое четырёхзначное число $\overline{abcd}$, в записи которого используются различные ненулевые цифры, что сумма $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ делится на 101. Прав ли Вася?

2.1.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 7.1, 8.1*) В четырехзначном числе Петя зачеркнул первую цифру и получил трехзначное число. Затем он разделил исходное число на это трехзначное и получил частное 3, а остаток 8. Чему равно исходное число? (Найдите все возможные числа.)

2.1.4. (*САММАТ, 2021, 7.8*) Найдите все такие трехзначные числа N, что сумма цифр числа N в 11 раз меньше самого числа N (ответ обоснуйте).

2.1.5. (*САММАТ, 2022, 7.9*) Найдите числа $\overline{abc5}$ и $\overline{mn}$, если они удовлетворяют условию

$$\overline{abc5} : 11 = \overline{mn}.$$

2.1.6. (*Открытая олимпиада, 2017, 7.1*) Подряд без пробелов выписали все натуральные числа в порядке возрастания:

$$1234567891011\ldots$$

Какая цифра стоит на 2017 месте в получившемся длинном числе?

2.1.7. (*Турнир Архимеда, 2021.1*) **На столе «касса цифр»** (набор бумажных карточек с цифрами). Маша выложила из карточек четырёхзначное число. Толя заменил в числе все карточки на другие: каждую цифру либо уменьшил на 4, либо увеличил на 1. Число уменьшилось в 4 раза. Какое число могла выложить Маша? Что могло получиться у Толи? (Найдите как можно больше вариантов ответов.)

2.1.8. (*«Высшая проба», 2023, 7.1*) Найдите наименьшее десятизначное натуральное число, все цифры которого различны, такое, что при вычёркивании всех чётных цифр остаётся 97531, а при вычёркивании всех нечётных цифр — 02468.

2.1.9. (*«Росатом», 2015, 7.2*) Первая цифра пятизначного натурального числа a равна 1. Если переставить единицу на последнее место, то полученное число будет на 5842 меньше утроенного числа a. Найти a.

2.1.10. (*«Курчатов», 2021, 7.2*) В двузначном числе каждую цифру увеличили на 2 или на 4 (разные цифры могли быть увеличены на разные числа), в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число? Найдите все возможные варианты и докажите, что нет других.

2.1.11. (*«Ломоносов», 2021, 7–8.2*) Ваня задумал двузначное число, затем поменял местами его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в четыре раза больше, чем задуманное число. Какое число задумал Ваня?

2.1.12. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 7.3*) Если первую цифру двузначного натурального числа N умножить на 4, а вторую умножить на 2, то в сумме полученные после умножения числа дадут $N/2$. Найдите N (укажите все решения).

2.1.13. (*«Надежда энергетики», 2018, 7.3*) Для нумерации домов на проспекте Столетия Революции использовано 1917 табличек с цифрами. Каждая табличка содержит одну цифру; номер дома может содержать несколько цифр; дома нумеровались без пропусков, начиная с единицы. Сколько домов на проспекте?

Если записать каждый номер на одной другой табличке стандартного размера, то можно ли сложить все стандартные таблички в несколько (больше 1) стопок одинаковой высоты? Если это возможно, то каковы минимальное число стопок и максимальная высота каждой стопки?

2.1.14. (*«Бельчонок», 2018, 7.3*) В заданном натуральном числе стёрли какую-то одну цифру и получили другое число. Затем из первоначального числа вычли полученное, в результате разность оказалась равной 34567. Найдите заданное натуральное число.

2.1.15. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 7.3*) На доске записаны два двузначных числа. Андрей их перемножил, получилось четырёхзначное число с первой цифрой 2. Паша их сложил и получил трёхзначное число. Если из числа Андрея вычеркнуть первую цифру, получится число Паши. Какие числа были записаны?

2.1.16. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 7.4, 8.2*) Три ученика написали на доске по двузначному числу, каждое из которых является точным квадратом. Оказалось, что если «склеить» их в одно шестизначное число, то оно тоже является квадратом натурального числа. Найдите все такие шестизначные числа.

2.1.17. (*«Росатом», 2015, 7.3*) Доказать, что любое целое число $a > 1$, в десятичной форме записи которого используется только одна цифра 1, не может быть квадратом целого числа.

2.1.18. (*«Ломоносов», 2022, 7–8.5*) Из цифр a, b, c, d, e составлено пятизначное число $\overline{abcde}$. Про двузначные числа $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$, составленные из тех же цифр, известно, что

$$\left(\overline{ab}+\overline{bc}\right)\left(\overline{bc}+\overline{cd}\right)\left(\overline{cd}+\overline{de}\right)=157605.$$

Найдите число $\overline{abcde}$. Многозначные числа не могут начинаться с нуля.

2.1.19. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.6*) Числа 2^{2015} и 5^{2015} в их десятичной записи написаны одно за другим без пробела. Сколько всего десятичных знаков выписано?

2.2 Сумма цифр числа

Дополнительные задачи — в листке Сумма цифр числа.

2.2.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 7.1, 8.1*) Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 5, с суммой цифр 100. Ответ обоснуйте.

2.2.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 7.1, 8.1*) Натуральное число n умножили на сумму цифр числа $3n$ и полученное число ещё умножили на 2. В результате получили 2022. Найдите n.

2.2.3. (*Всесиб., 2021, 7.1*) Приведите пример натурального числа, кратного 2020, такого, что его сумма цифр тоже кратна 2020.

2.2.4. (*«Бельчонок», 2022, 7.2*) Диана написала двузначное число, и приписала к нему двузначное число, которое получилось перестановкой цифр первого числа. Оказалось, что разность между первым и вторым числом равна сумме цифр первого числа. Какое четырехзначное число написано?

2.2.5. (*«Росатом», 2021, 7.3*) Про два двузначных, целых, положительных числа a и b известно, что

1) одно из них в три раза больше другого;
2) в их десятичной записи одна одинаковая цифра;
3) сумма цифр одного числа на 3 больше суммы цифр другого.

Найти эти числа.

2.2.6. (*«Курчатов», 2023, 7.3, 8.2*) Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?

2.2.7. (*«Росатом», 2021, 7.4*) Обозначим через $s(a)$ сумму цифр в десятичной записи натурального числа a. Найти все такие числа a, для которых $a^2+s(a)=1533$.

2.3 Ребусы

Дополнительные задачи — в листке Ребусы.

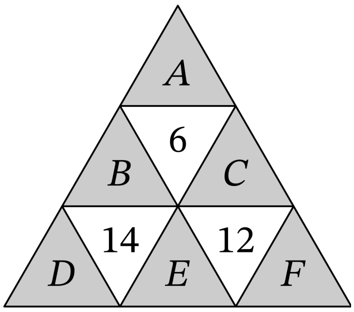
2.3.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 7.1*) Решите ребус

$$C{,}BA + A{,}AA = B{,}A.$$

(Разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми буквами — одинаковые цифры.)

2.3.2. (*«Ломоносов», 2020, 7–8.1*) Найдите все решения числового ребуса АБ = $\text{Б}^{\text{В}}$ (разным буквам соответствуют разные цифры; в левой части стоит двузначное число, а не произведение цифр А и Б).

2.3.3. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 7.2*) Денис разбил треугольник на девять треугольничков, как показано на рисунке, и расставил в них числа, при этом в белых треугольниках числа оказались равны суммам чисел в соседних с ними (по сторонам) серых треугольниках. После этого Лёша стёр числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 и вместо них написал буквы A, B, C, D, E и F в некотором порядке. Получившаяся расстановка чисел и букв изображена на рисунке.



Где какие числа стояли первоначально?

(a) Вместо буквы A	**(1)** стояло число 1
(b) Вместо буквы B	**(2)** стояло число 2
(c) Вместо буквы C	**(3)** стояло число 3
(d) Вместо буквы D	**(4)** стояло число 4
(e) Вместо буквы E	**(5)** стояло число 5
(f) Вместо буквы F	**(6)** стояло число 6

2.3.4. (*Открытая олимпиада, 2021, 7.1*) Докажите, что ребус КУСЬ + УКСЬ = УКСУС не имеет решений. (В ребусе одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, разные — разными.)

2.3.5. (*Матпраздник в Матвертикали, 2020, 7.2*) В следующих примерах замените каждую букву в левой части равенства цифрой или знаком арифметического действия (одинаковые буквы одинаково, разные — по-разному) так, чтобы получилось верное равенство. Например, в выражении ШАУРМА = 100 можно заменить Ш на 9, А на 8, У на минус, Р на 6, М на плюс, и получится $98 - 6 + 8 = 100$. В каждом из пунктов достаточно привести один пример (в ответ запишите выражение, получающееся после замены).

а) АНАКОН = 2020;

б) ЯЕМЗМЕЯ = 2020.

2.3.6. (*Турнир Архимеда, 2022.1.4*) **На нескольких карточках** Вася написал цифру, а на обороте — букву (если цифры равны, то буквы одинаковы, если цифры различны, то буквы различны). Вася выкладывает из карточек слово, и вычисляет сумму (или произведение) записанных на них цифр. Если выложить слово ЛОМ, то сумма равна 5, слово МОЛВА — сумма 21, слово ВОЛ — сумма 13, слово ВИНА — сумма 29. Какая сумма может получиться, если выложено слово ЛИАНА? Какое произведение может получиться, если выложено слово МИНА? Укажите все ответы.

2.3.7. (*«Надежда энергетики», 2020, 7.4*) В современных условиях считается актуальной **цифровизация** — перевод всей информации в цифровой код. Каждой букве алфавита можно поставить в соответствие неотрицательно целое число, называемое **кодом буквы**. Тогда можно определить **вес слова** как сумму кодов всех букв данного слова. Можно ли закодировать буквы Е, О, С, Т, Ш, Ь элементарными кодами, состоящими каждый из одной цифры от 0 до 9 так, чтобы вес слова «СТО» был бы не меньше веса слова «ШЕСТЬСОТ»? Если такое кодирование возможно, то сколькими способами его можно осуществить? Если такое кодирование возможно, то допускает ли оно однозначное восстановление слова по его коду?

2.3.8. (*Математический праздник, 2021, 7.4*) Фокусник научил Каштанку лаять столько раз, сколько он ей тайком от публики покажет. Когда Каштанка таким способом правильно ответила, сколько будет дважды два, он спрятал вкусный кекс в чемодан с кодовым замком и сказал:

— Восьмизначный код от чемодана — решение ребуса

$$\texttt{УЧУЙ} = \texttt{КЕ} \times \texttt{КС}.$$

Надо заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные разными так, чтобы получилось верное равенство. Пролай нужное число раз на каждую из восьми букв, и получишь угощение.

Но тут случился конфуз. Каштанка от волнения на каждую букву лаяла на 1 раз больше, чем надо. Конечно, чемодан не открылся. Вдруг раздался детский голос: «Нечестно! Собака правильно решила ребус!» И действительно, если каждую цифру решения, которое имел в виду фокусник, увеличить на 1, получится еще одно решение ребуса!

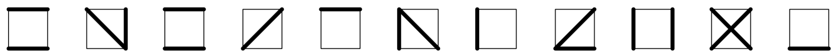
Можно ли восстановить: а) какое именно решение имел в виду фокусник; б) чему равнялось число `УЧУЙ` в этом решении?

2.3.9. (*Матпраздник в Матвертикали, 2023, 7.2*) Найдите какое-нибудь решение ребуса

$$\text{Ф}/\text{Е} + \text{ВР}/\text{АЛЬ} = 1.$$

Разным буквам соответствуют разные цифры. Черта обозначает деление.

2.3.10. (*Матпраздник в Матвертикали, 2021, 6.5, 7.5*) Вася решил зашифровать номер своего телефона. Для этого он заменил каждую цифру на символ, состоящий из одной или двух сторон/диагоналей квадрата, причём у каждой цифры свой уникальный код. Оказалось, что если у кодов двух цифр есть общий отрезок, то эти цифры отличаются не более, чем на два.



Пете удалось расшифровать номер телефона Васи, когда он догадался, что номер начинается с 8. Расшифруйте и Вы.

2.3.11. (*Открытая олимпиада, 2017, 7.6*) Дан ребус: ЖАЛО + ЛОЖА = ОСЕНЬ. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите значение буквы А.

2.3.12. (*Открытая олимпиада, 2015, 7.6*) Дан ребус: АБ + ВГ + ДЕ = ЖЗИ. Разные буквы обозначают разные цифры, ни одна из цифр не равна 9, число не может начинаться с 0. Найдите наименьшее возможное значение числа ЖЗИ.

2.3.13. (*«Ломоносов», 2023, 5–6.6, 7–8.6*) До XVIII века на Руси числа обозначались с помощью букв. Давайте перечислим те из них, которые дожили до наших дней:

$$\bar{\text{а}} = 1,\ \bar{\text{в}} = 2,\ \bar{\text{г}} = 3,\ \bar{\text{д}} = 4,\ \bar{\text{е}} = 5,\ \bar{\text{и}} = 8;$$
$$\bar{\text{к}} = 20,\ \bar{\text{л}} = 30,\ \bar{\text{м}} = 40,\ \bar{\text{н}} = 50,\ \bar{\text{о}} = 70,\ \bar{\text{п}} = 80,\ \bar{\text{ч}} = 90;$$
$$\bar{\text{р}} = 100,\ \bar{\text{с}} = 200,\ \bar{\text{т}} = 300,\ \bar{\text{у}} = 400,\ \bar{\text{ф}} = 500,\ \bar{\text{х}} = 600,\ \bar{\text{ц}} = 900.$$

С помощью букв числа записываются так: например, $\overline{\text{цла}} = \bar{\text{ц}} + \bar{\text{л}} + \bar{\text{а}} = 900 + 30 + 1 = 931$. Или $\overline{\text{мд}} = 44$. Или $\overline{\text{ра}} = 101$.

Однако не каждый набор букв обозначает число. Буквы распределены по строкам — «единицы», «десятки» и «сотни». В числе может быть только по одной букве из каждой строки, и располагаться буквы должны по убыванию своих значений. Скажем, записи $\overline{\text{да}}$, $\overline{\text{чух}}$, $\overline{\text{или}}$, $\overline{\text{ал}}$, $\overline{\text{ооооо}}$ запрещены.

Найдите два решения ребуса в современных буквах

$$(\overline{**} + \overline{*} \times \overline{***}) \times \overline{*} = \overline{*},$$

если: буквы не повторяются; умножения на единицу не происходит; в ответе ровно две гласных буквы.

2.4 Чётность

Дополнительные задачи — в листке Чётность.

2.4.1. (*Всесиб., 2017, 7.1*) Пароход «Раритет» стремительно идёт ко дну. Если капитан Алексей раздаст ровно 2017^{2017} указаний своим 26 матросам, то пароход получится спасти. Каждому следующему матросу Алексей может дать на 2 указания меньше или на 2 указания больше, чем предыдущему. Сможет ли Алексей спасти пароход?

2.4.2. (*«Высшая проба», 2022, 7.2*) Петя записал в ряд 2021 число, отличное от нуля, и перемножил все пары соседних чисел. Среди полученных произведений оказалось 1010 положительных и 1010 отрицательных чисел. Вася записал все исходные числа в том же порядке, но по кругу, и тоже перемножил все пары соседних чисел. Сколько среди этих чисел будет положительных и сколько отрицательных? Ответ необходимо обосновать.

2.4.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 7.3*) На контрольной в 7а присутствовало девочек на три человека больше, чем мальчиков. Результаты контрольной (по пятибалльной шкале) показали, что четверок было на 6 больше, чем пятерок, а троек вдвое больше, чем четверок. Докажите, что кто-то получил двойку или единицу.

2.4.4. (*Московская устная олимпиада, 2021, 7.3*) На доске записаны подряд в строку числа 1, 2, ..., 10. Разрешается из двух соседних чисел стереть левое, если разность между ними нечётная, или правое, если эта разность чётная. Может ли после девяти таких операций на доске остаться число 1?

2.4.5. (*Всесиб., 2018, 7.5*) Шахматную доску со стороной в 100 клеток по линиям сетки разрезали на квадраты с нечётными сторонами (не обязательно равные), а затем в каждом полученном квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что белых и черных клеток оказалось отмечено поровну.

2.5 Делимость

Дополнительные задачи — в листке Делимость.

2.5.1. (*Всеросс., 2022, МЭ, 7.1*) В 7 «Б» классе учится больше 3, но меньше 15 детей. На Новый год к ним пришёл Дед Мороз с мешком, в котором было 195 конфет. Раздав всем ребятам в классе поровну конфет, Дед Мороз обнаружил, что в мешке осталось 8 конфет. Сколько конфет получил каждый из ребят?

2.5.2. (*«Надежда энергетики», 2016, 7.1*) Установок 3 типов всего не менее 100. Установок типа 2 в 4 раза больше, чем типа 1, число установок типа 3 кратно числу установок типа 1. Если бы установок типа 3 было в 5 раз больше, то их было бы на 22 больше, чем установок типа 2. Найдите число установок каждого типа.

2.5.3. (*Всесиб., 2019, 7.1*) Несколько гномиков несли конфеты своему вождю Шмебулоку. По дороге каждый гномик украл и съел по одной конфете у каждого другого. В результате Шмебулоку принесли только 53 конфеты. Сколько конфет было у каждого гномика изначально, если известно, что у всех было поровну?

2.5.4. (*Всеросс., 2022, МЭ, 7.3*) В примере с дробями некоторые *двузначные* натуральные числа заменили буквами A и B
$$\frac{A-5}{A}+\frac{4}{B}=1.$$

1. Какое наименьшее значение может принимать A?

2. Какое наибольшее значение может принимать B?

2.5.5. (*«Росатом», 2020, 7.2*) Каждое из четырех чисел 2, 4, 12, 32 являются суммой, разностью, произведением и частным двух натуральных чисел. Найти эти числа.

2.5.6. (*«Ломоносов», 2021, 7–8.3*) Назовем составное натуральное число n «интересным», если все его натуральные делители можно выписать в порядке возрастания, и при этом каждый следующий делитель делится на предыдущий. Найти все «интересные» натуральные числа от 20 до 90 (включительно).

2.5.7. (*«Росатом», 2018, 7.3*) Пятизначное четное число a, являющееся квадратом целого числа, делится на 21. Найти минимальное a, удовлетворяющее этим условиям.

2.5.8. (*Всесиб., 2023, 7.3*) Профессор Фортран написал программу, которая принимает натуральное число, перемножает все его цифры и это произведение случайным образом либо вычитает из начального числа, либо прибавляет к нему. Так, из числа 239 программа может получить либо $239-2\cdot 3\cdot 9=239-54=185$, либо $239+54=293$. Результат после этого выводится на экран, а с полученным числом проделываются те же самые операции. Через некоторое время следующее число тоже появляется на экране, и так далее. Профессор Фортран запустил программу и ввёл число 141. Докажите, что это число никогда снова не будет выведено на экран.

2.5.9. (*Турнир Архимеда, 2022.1.3*) **Палиндром.** Найдите какое-нибудь натуральное число, кратное 2^{14} (произведение четырнадцати двоек, $2^{14}=128^2$) и читаемое одинаково слева направо и справа налево.

2.5.10. (*Олимпиада КФУ, 2023, 7.3*) Саша выбрал пять чисел из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 и сообщил Ане их произведение. Исходя из этих данных Аня поняла, что она не может однозначно определить чётность суммы выбранных Сашей чисел. Какое число Саша сообщил Ане?

2.5.11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.4, 7–8.3*) Докажите, что сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи, будет кратна 37.

2.5.12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.3, 9.2*) Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

2.5.13. (*САММАТ, 2022, 7.4*) При каких натуральных значениях n число $n^{n+1}-2n^2+2n-1$ нацело делится на $(n-1)^2$?

2.5.14. (*Московская устная олимпиада, 2023, 7.4*) Найдите все тройки $(a; b; c)$ натуральных чисел, для которых выполняется равенство

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{a+c}{a+b},$$

если известно, что $ab + bc + ca$ — простое число.

2.5.15. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 6.5, 7.4*) Геральт, Весемир, Эскель, Ламберт, Лютик и Цирилла купили от 1 до 6 эликсиров (Геральт взял один, Весемир — два, и т. д. в порядке перечисления). Все эликсиры стоят одинаковое чётное число оренов, но двое из покупателей — хорошие друзья продавца, поэтому купили свои эликсиры вдвое дешевле. Всего продавец получил 100 тысяч оренов. Кто именно дружит с продавцом?

2.5.16. (*«Курчатов», 2022, 7.4, 8.3, 9.3, 10.3*) Назовем *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

2.5.17. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 7.5, 8.4*) Существует ли такое натуральное число x, что среди утверждений «$x + 1$ кратно 2019», «$x + 2$ кратно 2018», «$x + 3$ кратно 2017», … «$x + 2017$ кратно 3», «$x + 2018$ кратно 2» ровно половина верных?

2.5.18. (*«Высшая проба», 2022, 7.4*) Пара различных натуральных чисел (a, b) называется удачной, если сумма наибольшего собственного делителя числа a и наименьшего собственного делителя числа b равна сумме наименьшего собственного делителя числа a и наибольшего собственного делителя числа b. Существует ли миллион удачных пар? Собственный делитель натурального числа — любой делитель, отличный от 1 и самого числа.

2.5.19. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.5*) На доске написано 15 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 8 чисел делятся на 7, а 10 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 220.

2.5.20. (*«Высшая проба», 2023, 7.5*) Андрей выписал на доску 6 последовательных четырёхзначных чисел в строчку в порядке возрастания. Затем он под каждым из этих чисел написал один из его простых делителей, причём все выписанные простые делители оказались разными. После этого Андрей стёр исходные 6 чисел и пригласил в класс Бориса. Всегда ли Борис, видя выписанные на доску простые делители, сможет однозначно определить исходные числа?

2.6 Основная теорема арифметики

Дополнительные задачи — в листке Основная теорема арифметики.

2.6.1. (*САММАТ, 2021, 7.1*) Степан спросил у Макара, сколько подъездов в доме, где живет Макар. Вместо ответа Макар сказал следующее: «В моем доме в каждом подъезде одинаковое число этажей с одинаковым числом квартир, при этом число этажей больше числа квартир на этаже, которое, в свою очередь, больше числа подъездов, а всего в доме 80 квартир». Сколько подъездов в доме у Макара?

2.6.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 7.1, 8.1*) Существуют ли такие натуральные числа m, n, что $mn(m + n) = 2020$?

2.6.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.2*) Приведите пример таких целых чисел a и b, что $(10a + b)(a + 10b)(a + b + 1) = 2015$.

2.6.4. (*Матпраздник в Матвертикали, 2021, 7.2*) Фокусник задумал два натуральных числа и сообщил Симе их сумму, а Прову — их произведение. Зная, что произведение равно 2280, Пров смог отгадать задуманные числа только после того, как Сима сообщила, что сумма у неё нечётна и двузначна. Так какие числа задумал фокусник?

2.6.5. (*«Росатом», 2016, 7.3*) Вова, Петя и Маша сидят за круглым столом и играют в устный счет. Игра состоит в том, что каждый, услышав «на ушко» от соседа справа число, умножает его на свое, заранее придуманное простое число, и сообщает результат соседу слева. Круг игры начинается с Вовы и заканчивается им, игра завершается после 3 кругов. Первое натуральное число сообщает Вове «на ушко» его бабушка. Вова объявляет всем последнее услышанное им число 86400. Какое число сообщила Вове бабушка, если все придуманные игроками числа были различными?

2.6.6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.4, 7–8.3, 9.1*) Найдите все пары простых чисел p и q, для которых выполнено равенство

$$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}.$$

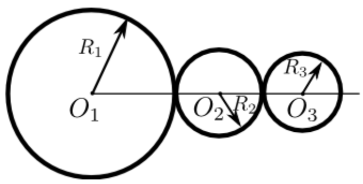
Напоминаем, что «простыми» называют натуральные числа, отличные от 1*, которые делятся только на* 1 *и на само себя.*

2.6.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 7.4, 8.3*) Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой куб некоторого натурального числа.

2.7 НОД и НОК

Дополнительные задачи — в листке НОД и НОК.

2.7.1. (*САММАТ, 2022, 7.2*) Центры трех кругов с радиусами $R_1 = 78$ см, $R_2 = 30$ см и $R_3 = 24$ см расположены на одной прямой так, что круги касаются друг друга (см. рис.) и могут вращаться вокруг своих центров. Первый круг начинает вращаться, приводя во вращение второй и третий круг. Все круги вращаются без проскальзывания друг относительно друга. За какое минимальное количество оборотов второго круга система из трех кругов примет исходное (начальное) состояние?



2.7.2. (*САММАТ, 2022, 7.5*) Каким минимальным количеством ящиков в форме куба можно полностью заполнить склад, представляющий прямоугольный параллелепипед с длиной 728 см, шириной 616 см и высотой 399 см? (Суммарный объем ящиков должен равняться объему параллелепипеда).

2.7.3. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 7.4*) Маша и Оля купили в магазине много одинаковых ручек для нового учебного года. Известно, что одна ручка стоит целое число рублей, большее 10. Маша купила ручек ровно на 357 рублей, а Оля — ровно на 441 рубль. Сколько суммарно ручек они купили?

2.7.4. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 7.6*) Расстояние между городами А и Б составляет целое число километров. На дороге между городами каждый километр стоит табличка: на одной стороне написано расстояние до города А, на другой — до города Б. Слава шёл пешком из города А в город Б. В течение своего путешествия Слава посчитал для каждой таблички НОД чисел, написанных на ней. Оказалось, что среди посчитанных НОДов встречаются только числа 1, 3 и 13. Чему равняется расстояние между городами?

2.7.5. (*Открытая олимпиада, 2023, 7.3*) Натуральные числа a и b таковы, что $a < b$ и

$$\frac{\text{НОК}\,(a, b)}{\text{НОД}\,(a, b)} = 200.$$

Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a}{b}$? Ответ запишите в виде неправильной несократимой дроби.

2.7.6. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.5*) Почтальон Печкин работает на почте с 8-00 до 16-00. В начале рабочего дня он отправляет одновременно тележки для писем, бандеролей и посылок. Тележка для писем уезжает на 10 минут, тележка для бандеролей — на 15 минут и тележка для посылок — на 25 минут. Затем тележки возвращаются, и за 5 минут Печкин должен погрузить на них соответственно коробку с письмами, бандеролями или посылками. Если оказалось, что тележки встречаются у пункта погрузки, то Печкин грузит ту тележку, которая приходит реже, а другая уезжает пустой. Сколько каких тележек с грузом сможет отправить Печкин за рабочий день?

2.7.7. (*Открытая олимпиада, 2020, 7.6*) Имеет ли решение уравнение

$$a + b + \text{НОД}\,(a, b) + \text{НОК}\,(a, b) = 512$$

в натуральных числах при $a \neq b$?

2.7.8. (*Открытая олимпиада, 2021, 7.7*) Натуральные числа a, b, c таковы, что

$$\text{НОД}\,(\text{НОК}\,(a, b), c) \cdot \text{НОК}\,(\text{НОД}\,(a, b), c) = 200.$$

Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}\,(\text{НОК}\,(a, b), c)$?

2.8 Остатки

Дополнительные задачи — в листке Деление с остатком.

2.8.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.2, 7–8.1*) Определите, является ли число

$$N = 7 \times 9 \times 13 + 2020 \times 2018 \times 2014$$

простым или составным. Ответ обоснуйте.

2.8.2. (*«Надежда энергетики», 2019, 7.2*) Может ли число $n^2 + n + 2$ делиться на 2019 при каких-либо натуральных n? Либо найдите такое минимальное n, либо докажите невозможность.

2.8.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 7.2, 8.1, 10.1*) Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты A, B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8?

2.8.4. (*Открытая олимпиада, 2023, 7.5*) Трёхзначное число АБВ даёт при делении на 37 остаток 4. Какой остаток даёт при делении на 37 число БВА? Не забудьте доказать, что другие ответы не подходят.

2.9 Последняя цифра

Дополнительные задачи — в листке Последняя цифра.

2.9.1. (*«Надежда энергетики», 2020, 7.2*) Какой цифрой оканчивается значение суммы

$$2019^{2020} + 2020^{2019}?$$

2.9.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.3, 7–8.2, 9.1*) Найдите последнюю цифру числа

$$202^{303^{404}}.$$

2.9.3. (*«Росатом», 2023, 7.4*) Найти последнюю цифру в десятичной записи числа

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 2023^2.$$

2.10 Дроби

Дополнительные задачи — в листке Дроби.

2.10.1. (*Всесиб., 2015, 7.1*) Составьте три несократимые (не обязательно правильные) дроби, произведение которых равно 1, используя в качестве числителей и знаменателей шесть чисел из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. (Каждое число можно использовать один раз или не использовать вовсе.)

2.10.2. (*«Бельчонок», 2022, 7.1*) После того, как вытянули репку, осталась куча земли. Дедка убрал половину кучи, Бабка убрала треть оставшейся земли, Внучка — четверть остатка, Жучка — пятую часть остатка, Кошка — шестую часть, Мышка — седьмую. Какая часть кучи осталась?

2.10.3. (*Московская устная олимпиада, 2021, 7.1*) Петя записал четыре дроби, сумма которых равна 1. У каждой из них числитель 1, а знаменатель — натуральное число. То же самое сделал и Вася. Могут ли все восемь дробей оказаться попарно различными?

2.10.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 7.2*) Агент 007 хочет зашифровать свой номер с помощью двух натуральных чисел m и n так, чтобы $0{,}07 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Сможет ли он это сделать?

2.10.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 7.2*) Коля хочет представить в десятичной форме дробь $\frac{3}{7}$, записав на доске 0 целых и 1000 знаков после запятой. Затем он собирается стереть 500-й знак после запятой. Какое число у него получится после этого: больше или меньше $\frac{3}{7}$?

2.10.6. (*«Росатом», 2018, 7.2*) Дробь $\frac{p}{q}$ с натуральными p, q такова, что возрастание числителя на 1, а знаменателя — на 5 делает ее большей. Найти такую дробь, если $p + q < 8$.

2.10.7. (*«Надежда энергетики», 2023, 7.3*) Представьте число $\dfrac{2}{7}$ в виде суммы нескольких различных обыкновенных дробей, числители которых равны единице.

2.10.8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.3, 7–8.2*) Пусть $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{399} - \frac{1}{400}$ и дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Какой остаток даёт a при делении на 601?

2.10.9. (*«Росатом», 2022, 7.4*) Сколько существует различных обыкновенных несократимых дробей вида $\dfrac{143}{p}$ на интервале $\left(\dfrac{1}{144}; \dfrac{1}{143}\right)$?

2.10.10. (*«Росатом», 2017, 7.3*) Сколько существует различных несократимых дробей вида p/q: $p > 0$, $0 < q \leqslant 5$, $p \neq q$, $p, q \in \mathbb{Z}$ для которых $\frac{p-1}{q} < \frac{p}{q+1}$? Указать наименьшую такую дробь.

2.11 Числовые неравенства

2.11.1. (*САММАТ, 2023, 7.9*) Задана величина

$$m = \frac{1}{1686} + \frac{1}{1687} + \frac{1}{1688} + \ldots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022}.$$

Докажите, что $\frac{1}{6} < m < \frac{1}{5}$.

2.11.2. (*Всесиб., 2022, 7.3*) Какое из чисел больше:

$$2017^{2022} \cdot 2018^{2021} \cdot \ldots \cdot 2022^{2017} \quad \text{или} \quad 2017^{2017} \cdot 2018^{2018} \cdot \ldots \cdot 2022^{2022}?$$

(Обоснуйте свой ответ.)

2.11.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.4, 7–8.3, 9.2*) Сравните числа

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad 2 + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

2.11.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.6, 7–8.4, 9.3*) Сравните числа

$$\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \times \ldots \times \frac{1020}{1021} \times \frac{1022}{1023} \quad \text{и} \quad \frac{5}{16}.$$

2.11.5. (*«Надежда энергетики», 2017, 7.5*) Что больше:

$$\frac{2{,}00000000004}{(1{,}00000000004)^2 + 2{,}00000000004}$$

или

$$\frac{2{,}00000000002}{(1{,}00000000002)^2 + 2{,}00000000002}?$$

Глава 3

Текстовые задачи

3.1 Движение

Дополнительные задачи — в листке Движение.

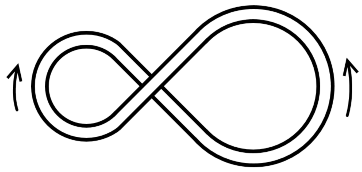
3.1.1. (*«Бельчонок», 2019, 7.1*) Серый и рыжий бельчата направились по тропинке от полянки к дубу, серый побежал, а рыжий пошел. Серый через 18 минут добежал до дуба, сразу побежал назад навстречу рыжему, и встретился с ним через 6 минут. Сколько минут потребуется рыжему бельчонку, чтобы дойти от места встречи до дуба?

3.1.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 7.1, 8.1*) Перед соревнованиями по бегу Петя планировал бежать всю дистанцию с постоянной скоростью V. Однако, узнав результаты соперников, Петя решил, что нужно повысить запланированную скорость на 25%. С такой повышенной скоростью он пробежал половину дистанции, но устал, так что вторую половину дистанции он бежал со скоростью, на 20% меньшей скорости V. Какое время показал Петя: больше или меньше запланированного?

3.1.3. (*«Росатом», 2018, 7.1*) Половина пути от дома до школы проходит по равнине, остальная часть — по холмам. Петя вышел из дома в 8 час, а вернулся из школы в 15 час, при этом он 6 часов находился в школе и сразу после уроков отправился домой. Скорость его движения на спусках — 6 км/час, на подъемах — 3 км/час, на ровных участках — 4 км/час. Найти длину пути от дома до школы.

3.1.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.2, 7–8.1*) Из пункта A в пункт B выехали велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист прибыл в пункт B, сразу же развернулся и отправился обратно в пункт A. В этот момент велосипедист уже проехал 10 км. Когда велосипедист проехал еще 2 км, он встретил возвращающегося мотоциклиста. Найдите расстояние между пунктами A и B.

3.1.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 6.2, 7.1*) Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рис.).



Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. Ещё через 15 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?

3.1.6. (*САММАТ, 2023, 7.6*) На карте нанесены 4 населенных пункта А, Б, В, Г. Расстояние от города А до города Б по прямой 25 км, расстояние от города Б до города В по прямой 35 км, от города В до города Г по прямой — 60 км, а от города А до города Г по прямой — 120 км. Какое время велосипедист затратил бы на прохождение пути по прямой от А до В, если его скорость 10 км/час?

3.1.7. (*«Ломоносов», 2021, 7–8.1, 9.1*) Два автомобиля преодолели одинаковое расстояние. Скорость первого была постоянна и в 3 раза меньше, чем начальная скорость второго. Второй автомобиль проехал первую половину пути, не меняя скорость, затем он резко сбросил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью еще четверть пути и снова снизил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё восьмую часть пути, и т. д. После восьмого понижения скорости он не менял её до конца поездки. Во сколько раз второму автомобилю потребовалось больше времени на преодоление всего пути, чем первому?

3.1.8. (*«Росатом», 2021, 7.1*) Петя совершил прогулку по маршруту: от дома по горизонтальной тропинке до подъема на гору, подъем на вершину горы и спуск с нее по тому же склону, возвращение по тропинке домой. Путь от дома до подъёма на гору не менее, чем в два раза превышает путь по склону горы. По горизонтальной тропе Петя шел со скоростью 4 км/час, на подъеме — 2 км/час, на спуске — 6 км/час. Какой наименьший при этих условиях путь мог пройти Петя, если спустя 5 часов он вернулся домой?

3.1.9. (*«Надежда энергетики», 2021, 7.2*) Автомобиль двигался без остановки 3,5 часа. В течение любого промежутка времени длительностью в один час (в течение этих трех с половиной часов) он проходил ровно 70 км. Можно ли утверждать, что средняя скорость автомобиля 70 км/ч?

3.1.10. (*Всесиб., 2022, 7.2*) Дорога из пункта А в пункт Б идёт сначала в гору, а потом под гору. Кошка доходит из А в Б за 2 часа 12 минут, обратный путь занимает у неё на 6 минут больше. Скорость кошки, идущей в гору, 4 км/ч, а под гору — 5 км/ч. Сколько километров составляет путь от А до Б? *(Приведите полное решение, а не только ответ.)*

3.1.11. (*Математический праздник, 2021, 6.3, 7.2*) Братья Петя и Вася решили снять смешной ролик и выложить его в интернет. Сначала они сняли, как каждый из них идет из дома в школу — Вася шел 8 минут, а Петя шел 5 минут. Потом пришли домой и сели за компьютер монтировать видео: они запустили одновременно Васино видео с начала и Петино видео с конца (в обратном направлении); в момент, когда на обоих роликах братья оказались в одной и той же точке пути, они склеили Петино видео с Васиным. Получился ролик, на котором Вася идет из дома в школу, а потом в какой-то момент вдруг превращается в Петю и идет домой задом наперед. А какой длительности получился ролик?

3.1.12. (*Матпраздник в Матвертикали, 2021, 7.4*) Братья Петя и Вася решили снять смешной ролик и выложить его в интернет. Сначала они сняли, как каждый из них идёт из дома в школу — Вася шёл 8 минут, а Петя шёл 6 минут. Потом пришли домой и сели за компьютер монтировать видео: они запустили одновременно Васино видео с начала и Петино видео с конца (в обратном направлении); в момент, когда на обоих роликах братья оказались в одной и той же точке пути, они склеили Петино видео с Васиным. Получился ролик, на котором Вася идёт из дома в школу, а потом в какой-то момент вдруг превращается в Петю и идёт домой задом наперёд. А какой длительности получился ролик?

3.1.13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 5–6.3, 7–8.2, 9.2*) Иван Семенович каждый день выезжает в одно и то же время, едет на работу с одной и той же скоростью и приезжает ровно в 9:00. Однажды он проспал и выехал на 40 мин. позднее обычного. Чтобы не опоздать, Иван Семенович поехал со скоростью на 60% большей, чем обычно и приехал в 8:35. На сколько процентов он должен был увеличить обычную скорость, чтобы приехать ровно в 9:00?

3.1.14. (*Всеросс., 2023, МЭ, 7.3*) Крош и Ёжик решили проверить, кто из них быстрее добежит по прямой дороге от домика Копатыча до домика Лосяша. Когда Крош пробежал 20 метров, Ёжик пробежал всего 16 метров. А когда Крошу оставалось 30 метров, Ёжику оставалось 60 метров. Сколько метров составляет длина дороги от домика Копатыча до домика Лосяша? (Крош и Ёжик выбежали одновременно, каждый из них бежал со своей постоянной скоростью.)

3.1.15. (*«Надежда энергетики», 2021, 7.4*) По трем параллельным железнодорожным путям движутся три поезда одинаковой длины. Первый поезд движется в том же направлении, что и второй, но с меньшей скоростью. Второй поезд проходит мимо первого за 4 минуты 12 секунд. Третий поезд движется в противоположном направлении относительно первых двух, и проходит мимо второго за 36 секунд. За какое время третий поезд пройдет мимо первого?

3.1.16. (*Всесиб., 2016, 7.4*) Маша и Миша вышли навстречу друг другу одновременно каждый из своего дома и встретились в одном километре от дома Маши. В другой раз они снова вышли каждый из своего дома навстречу друг другу одновременно, но Маша шла в 2 раза быстрее, и Миша в 2 раза медленнее, чем в прошлый раз. В этот раз они встретились в 1 километре от дома Миши. На каком расстоянии находятся дома Маши и Миши друг от друга?

3.1.17. (*Всесиб., 2021, 7.4*) Два пловца стартовали одновременно по соседним дорожкам в 50-метровом бассейне на дистанции 1 км. Каждый плыл со своей постоянной скоростью. Первый пловец, завершив заплыв, вышел из бассейна. Второй продолжал плыть по дистанции. Всего пловцы встретились 16 раз (когда первый догоняет второго — это тоже встреча; момент старта встречей не считается). Во сколько раз первый пловец может быть быстрее второго? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

3.1.18. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 7.5, 8.5*) Андрей и Сева собрались в гости к Боре. Андрей находится в пункте A, а Боря — в пункте B на расстоянии 30 км от пункта A по прямому шоссе. Сева находится в пункте C ровно посередине между A и B. Друзья решили отправиться одновременно: Андрей на велосипеде, а Сева пешком, но Андрей оставит велосипед в условленном месте, чтобы им воспользовался Сева (Андрей закончит путь пешком). На велосипеде мальчики двигаются со скоростью 20 км/час, а пешком — со скоростью 5 км/час. Где надо оставить велосипед, чтобы друзья смогли вместе как можно раньше попасть к Боре?

3.1.19. (*Турнир Архимеда, 2021.5*) **Емеля** устроился на работу царским хлебопёком. Как-то утром отправился он на царёву службу. Выехал он поздновато, поэтому печь пекла пироги прямо на ходу. Одновременно с Емелей навстречу ему отправились два посыльных: Фёдор и Иван. Фёдор идёт пешком, поэтому движется в 3 раза медленнее печи, а Иван — верхом на лошади — в 4 раза быстрее, чем печь. При встрече с посыльными Емеля (на ходу) отдаёт им все изготовленные к этому моменту пироги, а сам продолжает движение. Известно, что Фёдор получил на 133 пирога больше, чем Иван, а встречи с посыльными состоялись как раз в тот момент, когда он доставал из печи очередной пирог. Сколько всего пирогов испекла печь по пути на царёву службу? Печь начала работать с момента отправления и печёт пироги равномерно.

3.1.20. (*Турнир Архимеда, 2022.2.3*) **Домики** Винни-Пуха (ВП), Пятачка (П) и Кролика (К) стоят на берегу круглого озера, вокруг которого проложена тропа. В понедельник П вышел из дома в 10:00, а ВП в 10:40. Друзья пошли в гости к К и добрались до места в 12:00 (при этом мимо домов друг друга они не проходили). На следующий день ВП вышел в 10:00, а П в 10:20 и пошли они в направлениях, противоположных тем, которые были у них в понедельник. Во вторник ВП и П встретились у домика К в 12:00. Встречались ли они пока шли по тропе? Скорости ВП и П не обязательно равны между собой, но одни и те же во все дни. Обоснуйте Ваш ответ.

3.1.21. (*Открытая олимпиада, 2021, 7.6*) По круговой трассе с равными постоянными скоростями движутся три бегуна. Когда два бегуна встречают друг друга, они мгновенно разворачиваются и начинают бежать в противоположные стороны.

В какой-то момент первый бегун встретился со вторым. Через 15 минут второй бегун впервые встретился с третьим. Ещё через 25 минут третий бегун впервые встретился с первым.

За сколько минут один бегун пробегает всю трассу?

3.1.22. (*Московская устная олимпиада, 2021, 7.7*) Два джентльмена прогуливаются по бульвару. Они одновременно начинают прогулку в одном из концов и идут каждый со своей постоянной скоростью. Дойдя до конца бульвара, джентльмен мгновенно разворачивается и с той же скоростью идёт обратно. Встретившись в третий раз, джентльмены заметили, что друг друга они не обгоняли, а расстояние от третьей точки встречи до каждой из двух первых равно 200 м. Сколько пройдёт каждый из джентльменов до следующей встречи?

3.2 Работа

Дополнительные задачи — в листке Работа.

3.2.1. (*Матпраздник в Матвертикали, 2020, 7.1*) Варя и Артур сели рисовать котиков. Варя рисует котиков в 1,5 раза быстрее, но она торопится на олимпиаду, поэтому у неё в два раза меньше времени, чем у Артура. Всего они нарисовали 28 котиков. Определите, сколько всего котиков нарисовал Артур.

3.2.2. (*«Курчатов», 2023, 7.1*) Пока Малыш был в школе, Карлсон нашёл N пирожных и начал их есть. За первый час он съел 35 штук. Затем он понял, что если будет продолжать есть пирожные с той же скоростью, то сможет их все доесть только через час после возвращения Малыша. Тогда он начал есть на 15 пирожных в час больше и успел всё съесть за полчаса до прихода Малыша. Найдите N.

3.2.3. (*Турнир Архимеда, 2023.2.2*) **В гостях у Кролика** Винни-Пух и Пятачок получили по банке меда (разного размера) и сели завтракать. Если бы они сели за стол одновременно, то и завтрак бы закончили одновременно — в 10:00. Но Пятачок (как воспитанный поросенок) первые 12 минут мыл руки. Винни-Пух, закончив свою порцию, стал «помогать» другу, и в 10:03 они доели весь мед. Во сколько раз порция Винни-Пуха больше порции Пятачка?

3.2.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 7–8.2, 9.1*) Работники должны были вскопать несколько одинаковых грядок. В первый день работники вскопали 10 грядок, причем каждый вскопал одинаковое количество (не обязательно целое число) грядок. На следующий день некоторые работники заболели COVID-19 и на работу вышло только 7 человек. Пришедшие работали половину рабочего дня с такой же производительностью, как и в первый день, и доделали оставшуюся работу.

Сколько всего грядок было на подсобном участке?

3.2.5. (*Матпраздник в Матвертикали, 2022, 7.4*) На быстрой зарядке телефон полностью заряжается за 1 час 20 минут, а на обычной — за 4 часа. Федя поставил полностью разряженный телефон сначала на обычную зарядку, а потом, когда нашёл нужный блок, переставил на быструю до окончания зарядки. Найдите общее время зарядки телефона, если известно, что на быстрой зарядке телефон находился одну треть от общего времени зарядки. Считайте, что и при быстрой, и при обычной зарядке телефон заряжается равномерно.

3.2.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 7.3, 10.3*) Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 8 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через полтора часа после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны.

3.2.7. (*«Бельчонок», 2021, 7.4*) Дима и Лена, ни на что не отвлекаясь, начали одновременно есть чипсы из одной большой пачки (каждый со своей постоянной скоростью). Если бы Дима ел со скоростью Лены, то чипсы бы они ели на 3 минуты дольше, а если бы Лена ела со скоростью Димы, то чипсы они бы съели на 2 минуты быстрее. За какое время Дима и Лена съели все чипсы?

3.2.8. (*«Бельчонок», 2022, 7.4*) Бельчата Пушистик и Лохматик съели корзину ягод и пакет семечек, в котором было больше 50, но меньше 65 семечек, начав и закончив одновременно. Сначала Пушистик ел ягоды, а Лохматик — семечки, потом (в какой-то момент) они поменялись. Лохматик ел ягоды в шесть раз быстрее Пушистика, а семечки — только в три раза быстрее. Сколько семечек съел Лохматик, если ягод Лохматик съел в два раза больше Пушистика?

3.2.9. (*«Надежда энергетики», 2020, 7.5*) За 10 минут Женя съедает 5 ватрушек с творогом, а Саша — только 3. В субботу все испеченные ватрушки достались Жене, а в воскресенье — Саше. При этом всего было съедено 70 ватрушек ровно за три часа чистого времени. Сколько ватрушек с творогом досталось каждому из детей?

3.3 Стоимость

Дополнительные задачи — в листке Стоимость.

3.3.1. (*«Бельчонок», 2022, 7.2*) Тетрадка стоит 10 рублей. Восемь детей купили тетрадки, у каждого осталось разное количество рублей (не нулевое), но ни у кого не хватало на ещё одну тетрадку. Дети сложили оставшиеся рубли, и их хватило в точности ещё на несколько тетрадок. Сколько денег оставалось у каждого из детей до складывания?

3.3.2. (*САММАТ, 2023, 7.7*) Ученик купил ручки по 2 рубля за штуку и карандаши по 3 рубля за штуку. Если бы ручки стоили по 3 рубля за штуку, а карандаши по 4 рубля, то ему пришлось бы заплатить на 16 рублей больше, а если бы ручки стоили 4 рубля, а карандаши — по 1 рублю, то тогда бы он заплатил на 4 рубля меньше. Сколько ручек и карандашей купил ученик и на какую сумму?

3.4 Части и отношения

Дополнительные задачи — в листке Части и отношения.

3.4.1. (*САММАТ, 2022, 7.10*) Из полного кувшина, вмещающего 300 грамм концентрированного сока, отлили третью часть и столько же долили воды. Затем из кувшина отлили четвертую часть разведенного сока и снова долили воды. После этого отлили еще третью часть, но водой не доливали. Сколько оказалось в кувшине сока и воды?

3.4.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 5.3, 6.1, 7.1*) Двум воронам както бог послал немного сыру. Первой вороне досталось 100 г, из которых часть отняла лисица. Кусочек у второй вороны оказался вдвое больше, чем у первой, но и съесть она успела вдвое меньше, чем первая ворона. Доставшаяся же лисице часть сыра от второй вороны оказалась втрое больше, чем от первой. Сколько всего сыра досталось лисице?

3.4.3. (*Всесиб., 2020, 7.1*) Паша и Саша сделали три одинаковых машинки. Саша сделал третью часть первой машинки, пятую часть второй машинки и пятнадцатую часть третьей машинки. Какую часть всей работы сделал Саша?

3.4.4. (*«Надежда энергетики», 2023, 7.2*) Летом Пончик ест медовые коврижки четыре раза в день: вместо утренней зарядки, вместо дневной прогулки, вместо вечерней пробежки и вместо ночного купания. При этом количества коврижек, съеденных вместо зарядки и вместо прогулки относятся как $3 : 2$; вместо прогулки и вместо пробежки — как $5 : 3$; а вместо пробежки и вместо купания — как $6 : 5$. На сколько больше или меньше коврижек съел Пончик вместо зарядки, чем вместо купания в тот день, в который было съедено суммарно 216 коврижек?

3.4.5. (*Всеросс., 2020, МЭ, 7.3*) В поезде 18 одинаковых вагонов. В некоторых вагонах свободна ровно половина мест, в некоторых других — ровно треть мест, а в остальных заняты все места. При этом во всём поезде свободна ровно одна девятая всех мест. В скольких вагонах все места заняты?

3.4.6. (*Открытая олимпиада, 2015, 7.3*) Среди чисел от 1 до 56 000 — каких чисел больше — тех, которые делятся на 7, но не делятся на 8 или тех, которые делятся на 8?

3.4.7. (*Всеросс., 2021, МЭ, 7.7*) Петя рассказал Мише, что в его классе ровно две трети всех девочек — блондинки, ровно седьмая часть мальчиков — блондины, а всего со светлыми волосами треть класса. Миша сказал: «Ты как-то рассказывал, что у вас в классе не более 40 человек. О! Я знаю, сколько у вас в классе девочек!» Сколько?

3.4.8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.4, 7–8.2, 9.1*) На первом занятии кружка по программированию учитель спросил участников, какими языками программирования они владеют. Четверо сразу признались, что не знают ни одного языка программирования. Остальные сказали, что знают или Python или Java или оба этих языка сразу. Доля знающих Python среди тех, кто владеет хотя бы одним языком, составила 60%, причем 1/6 из знающих Python знает также и Java. А доля владеющих языком Java среди всех участников кружка составила 5/12. Сколько всего участников кружка?

3.5 Проценты

Дополнительные задачи — в листке Проценты.

3.5.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 7.1, 8.1*) В 7а классе 52% девочек. Все ученики класса могут выстроиться в ряд так, чтобы мальчики и девочки чередовались. Сколько учеников в классе?

3.5.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 7.1*) Дан квадрат и прямоугольник. Большая сторона прямоугольника на 11% больше стороны квадрата, а меньшая сторона — на 10% меньше стороны квадрата.

а) Больше или меньше площадь прямоугольника по сравнению с площадью квадрата, и на сколько процентов?

б) Ответьте на те же вопросы относительно периметров прямоугольника и квадрата.

3.5.3. (*Открытая олимпиада, 2015, 7.1*) Аня и Коля собирали яблоки. Оказалось, что Аня собрала столько же яблок, сколько Коля собрал процентов от общего числа собранных ими яблок и наоборот, Коля собрал столько же яблок, сколько Аня собрала процентов от общего числа собранных ими яблок. Сколько яблок собрала Аня и сколько Коля?

3.5.4. (*«Курчатов», 2021, 7.1*) Пете на дом задали несколько задач по физике и несколько по математике. Все решённые Петей задачи составляют 5% от количества всех задач по физике и 20% от количества всех задач по математике. Сколько процентов от общего количества задач решил Петя?

3.5.5. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 7.2*) Влад и Дима решили подзаработать. Каждый из них решил положить по 3000 рублей в банк, а через год все деньги снять.

Влад выбрал вклад «Уверенность»: за год сумма увеличивается на 20%, но при снятии банк взимает комиссию 10%.

Дима выбрал вклад «Надёжность»: за год сумма увеличивается на 40%, но при снятии банк взимает комиссию 20%.

(«Банк взимает комиссию $n\%$» означает то, что банк оставляет себе $n\%$ от текущей величины вклада, а оставшуюся часть вклада возвращает его владельцу.)

Кто получит бо́льшую годовую прибыль от вклада?

Чему будет равна разница? Ответ выразите в рублях. Если прибыль одинакова, то запишите 0.

3.5.6. (*САММАТ, 2021, 7.2*) Укажите наименьшее положительное число, обладающее следующими свойствами: 27% и 45% от него — целые числа.

3.5.7. (*Всеросс., 2020, МЭ, 7.4*) У бабушки в саду созрели яблоки; антоновка, грушовка и белый налив. Если бы антоновки было втрое больше, то суммарное количество яблок выросло бы на 70%. Если бы втрое больше было грушовки, то оно выросло бы на 50%. На сколько процентов изменилось бы суммарное количество яблок, если бы втрое больше было белого налива?

3.5.8. (*Московская устная олимпиада, 2022, 6.1, 7.1*) В водоёмах некоторой страны водятся крокодилы и бегемоты. В 20% водоёмов с крокодилами есть и бегемоты, в 25% водоёмов с бегемотами есть и крокодилы. 20% водоёмов свободны от животных. Какой процент водоёмов страны составляют те, в которых есть и крокодилы, и бегемоты?

3.5.9. (*Открытая олимпиада, 2023, 7.1*) Вася и Петя работают вместе. Они получили заказ на изготовление определённого количества деталей и договорились сделать поровну. Однако Петя недовыполнил свой план на 20% и Васе пришлось сделать часть его работы. На сколько процентов Вася изготовил больше деталей, чем Петя?

3.5.10. (*«Бельчонок», 2018, 7.2*) Каждый год 1 марта в городе проходит перепись населения. В 2014 году население увеличилось по сравнению с 2013 годом ровно на 5%. В 2015-2018 гг. прирост населения каждый год тоже составлял ровно 5%, причем по данным переписи 2018 года в городе проживало не более 5000000 человек. Сколько человек жило в городе 1 марта 2018 года?

3.5.11. (*Открытая олимпиада, 2018, 7.2*) Аня готовила блинчики, рассчитывая, чтобы трём членам её семьи досталось одинаковое количество блинов. Но что-то пошло не так: каждый третий блин Аня не смогла перевернуть; 40% от блинов, которые Аня смогла перевернуть, пригорели; а $\frac{1}{5}$ от съедобных блинов Аня уронила на пол. Сколько процентов от задуманного количества блинов Аня смогла предложить своей семье?

3.5.12. (*Открытая олимпиада, 2021, 7.2*) В некоторой фирме 20% самых полезных сотрудников выполняют 80% работы. Какой наименьший процент работы могут выполнять 40% самых полезных сотрудников?

Более полезным мы будем называть сотрудника, выполняющего больше работы.

3.5.13. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 7.3*) В 7-а классе 25 человек, и каждый посещает танцевальный кружок или драмкружок (некоторые посещают оба кружка). Контрольную по математике писали все, и учитель по её результатам подсчитал процент двоечников отдельно среди «танцоров» и среди «актёров». Оказалось, что процент одинаковый и равен 30%. Может ли быть процент двоечников во всём классе больше 35%?

3.5.14. (*«Росатом», 2023, 7.3*) Петя, Ваня, Сергей и Иван Иванович являются учредителями предприятия с некоторым начальным капиталом. Если Петя удвоит свою долю в начальном капитале, то он возрастет на 20%. Если то же проделает Ваня, то капитал возрастет на 30%. Если Сергей увеличит свою долю в три раза, то рост капитала составит 40%. Во сколько раз должен увеличить свою долю капитала Иван Иванович, чтобы его доля в начальном капитале превысила 51%?

3.5.15. (*«Бельчонок», 2022, 7.2*) Бельчонок насушил грибов: 85% белых грибов, а остальные рыжики. Потом он съел часть белых грибов, теперь рыжики составляли 30% оставшихся грибов. Какую часть грибов съел бельчонок?

3.5.16. (*«Бельчонок», 2022, 7.2*) У бельчонка был запас кедровых и еловых шишек, кедровые составляли 60%. В августе он набрал ещё еловых шишек, теперь кедровые составляли 20%. В сентябре бельчонок набрал ещё кедровых шишек, теперь кедровые шишки составляли 80%. Во сколько раз увеличилось общее число шишек за два месяца?

3.5.17. (*Открытая олимпиада, 2019, 7.3*) У Васи была коллекция покемонов. В феврале цены на всех покемонов упали на 10%. Затем в марте покемоны снова подорожали, каждый по-своему, и общая стоимость Васиной коллекции стала такой же, как в конце января. При этом состав коллекции не менялся. Докажите, что какой-то покемон подорожал больше, чем на 11%.

3.5.18. (*Открытая олимпиада, 2022, 7.3*) Все жители острова либо блондины, либо брюнеты с зелёными или голубыми глазами. Доля брюнетов среди голубоглазых составляет 65%. Доля голубоглазых среди блондинов составляет 70%. И, наконец, доля блондинов среди зеленоглазых составляет 10%. Сколько процентов населения острова составляют зеленоглазые брюнеты?

3.5.19. (*Открытая олимпиада, 2016, 7.5*) Аня, Ваня, Даня, Саня и Таня собирали яблоки. Оказалось, что каждый из них собрал целое количество процентов от общего числа собранных яблок, причём все эти числа различны и больше нуля. Какое минимальное количество яблок могло быть собрано?

3.6 Смеси и концентрации

Дополнительные задачи — в листке Смеси и концентрации.

3.6.1. (*«Ломоносов», 2020, 7–8.3*) В трёх колбах находится концентрированная кислота: в первой 10 г, во второй 20 г, в третьей 30 г. Имеется также четвёртая колба с водой. Если некоторое количество воды из четвёртой колбы добавить в первую колбу, а остальную воду вылить во вторую колбу, то в первой колбе концентрация кислоты будет составлять 5%, а во второй — $23\frac{1}{3}\%$. Какова будет концентрация кислоты в третьей колбе, если вылить в неё всю воду из четвёртой колбы?

3.7 Часы, время, календарь

Дополнительные задачи — в листке Разные арифметические задачи.

3.7.1. (*Математический праздник, 2023, 7.1*) Аня называет дату красивой, если все 6 цифр её записи различны. Например, 19.04.23 — красивая дата, а 19.02.23 и 01.06.23 — нет. А сколько всего красивых дат в 2023 году?

3.7.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.2, 7–8.1*) Часы со стрелками показывают полдень. Сколько минут пройдет до ближайшего момента времени, когда прямая, делящая пополам угол между часовой и минутной стрелкой, пройдет через отметку на циферблате, соответствующую 43 минутам?

3.7.3. (*«Надежда энергетики», 2017, 7.3*) Снег пошёл, когда часы на башне показывали z часов y минут (часы показывают время в формате от 00.00 до 23.59), и продолжал идти в течение x часов z минут. Когда снег перестал, на часах было y часов x минут. Найдите все возможные значения разности $x - y$.

3.7.4. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.4*) После полудня прошло целое число минут, и в этот момент угол между часовой и минутной стрелками составил ровно 120 градусов. Какое время показывают часы, если это событие произошло впервые после полудня?

3.7.5. (*«Ломоносов», 2023, 5–6.5, 7–8.1*) Некто раздобыл вот такие часы. Чтоб от них был хоть какой-то прок, он отломал все стрелки, кроме часовой, и настроил ход механизма так, чтоб часовая стрелка действительно делала оборот за 11 (общепринятых) часов, как утверждает циферблат. Например, если в полночь они показывали 00:00, то за следующие сутки такие часы успеют сделать два полных оборота, и ещё пройти до двух.

Ночью с 28 февраля на 1 марта, в полночь, этот человек настроил часы на 00:00.

Какую долю времени в марте показания этих часов будут совпадать с показаниями нормальных?

3.8 Возраст

Дополнительные задачи — в листке Разные арифметические задачи.

3.8.1. (*«Высшая проба», 2022, 7.1*) Гражданин Сидоров на 6 лет старше своей жены гражданки Сидоровой. Однажды Сидоров обнаружил, что ровно половину своей жизни он провёл в браке с Сидоровой. Ровно через 14 лет после этого Сидорова обнаружила, что она провела в браке с Сидоровым ровно две третьих своей жизни. Сколько лет будет гражданину и гражданке Сидоровой, когда они отпразднуют золотую свадьбу — пятидесятилетие своей супружеской жизни?

3.8.2. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.3*) Семья состоит из трех человек: отца, матери и сына. В настоящее время сумма их возрастов составляет 65 лет. 9 лет назад эта сумма составляла 40 лет. 4 года назад отец был старше сына в 9 раз. Сколько лет отцу?

3.9 Неравенства

Дополнительные задачи — в листке Неравенства.

3.9.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 7.3*) Смешарики Крош, Ёжик, Нюша и Бараш суммарно съели 86 конфет, причём каждый из них съел не менее 5 конфет. Известно, что:

- Нюша съела конфет больше, чем каждый из остальных смешариков;
- Крош и Ёжик суммарно съели 53 конфеты.

Сколько конфет съела Нюша?

3.9.2. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.1*) 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников — сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?

3.9.3. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.1*) Станция связана линиями с несколькими предприятиями, при этом

1. среди любых 3 линий есть ведущая на предприятие города М;
2. среди любых 4 линий есть ведущая на предприятие поселка П.

Если же выбрать наугад пять линий, то какое максимальное количество среди них могут идти и не в город М, и не в поселок П?

3.9.4. (*Матпраздник в Матвертикали, 2021, 7.1*) У садовника Феди в саду растёт чудо-дерево с семью ветками. На каждой из веток может расти либо 6 яблок, либо 5 груш, либо 3 апельсина. Федя обнаружил, что на дереве есть фрукты всех видов, причём больше всего выросло груш, а меньше всего — яблок.

Сколько всего фруктов выросло на чудо-дереве?

3.9.5. (*Олимпиада КФУ, 2023, 7.1*) В кружке занимается 36 школьников. Если на занятие придут любые 33 из них, то девочек в любом случае будет больше половины. А если на занятие придет 31 ученик, то может оказаться так, что больше половины из них — мальчики. Сколько девочек занимается в кружке?

3.9.6. (*«Высшая проба», 2021, 7.2*) На доске написано положительное число, с которым разрешается делать следующие операции:

1. умножать на два;
2. прибавлять один.

Каждый из трёх школьников один раз применил к имеющемуся числу первую операцию и два раза вторую операцию в некотором порядке. При этом все три числа оказались различными, и число, полученное первым школьником, превосходит число, полученное вторым школьником, более чем на 60%. Докажите, что число, полученное третьим школьником, превосходит число, полученное вторым школьником, более чем на 30%.

3.9.7. (*«Высшая проба», 2023, 7.3*) На складе стоят несколько ящиков. Известно, что ящиков не более 60, и в каждом из них находятся либо 59 яблок, либо 60 апельсинов. После того, как на склад принесли коробку с некоторым количеством апельсинов, фруктов на складе стало поровну. Какое наименьшее количество апельсинов могло быть в принесённой коробке?

3.9.8. (*«Курчатов», 2022, 7.3*) В некоторой компании 100 акционеров, причем любые 66 из них суммарно владеют хотя бы 50% акции компании. Каким наибольшим процентом всех акции может владеть один акционер? (Количество процентов акции компании, принадлежащих акционеру, может быть нецелым.)

3.10 Средние величины

3.10.1. (*САММАТ, 2022, 7.1*) В классе присутствуют учитель и несколько учеников. Найти число учеников, если возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе.

3.11 Разные арифметические задачи

Дополнительные задачи — в листке Разные арифметические задачи.

3.11.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 7.1*) Саша и Ваня играют в игру. Саша задаёт Ване вопросы. Если Ваня отвечает на вопрос правильно, то Саша даёт ему 7 конфет. Если же Ваня отвечает неправильно, то он даёт Саше 3 конфеты. После того, как Саша задал 50 вопросов, оказалось, что у каждого из них столько же конфет, сколько было в начале. На сколько вопросов Ваня ответил правильно?

3.11.2. (*САММАТ, 2022, 7.6*) Две коробки конфет и 3 пачки чая стоят 910 рублей, а три коробки конфет и 5 пачек чая стоят 1440 рублей. Сколько стоят 4 коробки конфет и 2 пачки чая?

3.11.3. (*САММАТ, 2023, 7.10*) На кольцевой линии метро курсируют 24 поезда. Они следуют в одном направлении с одинаковыми скоростями и равными интервалами. Сколько поездов надо добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на 20%?

3.11.4. (*«Бельчонок», 2020, 7.1*) Миша за лето прочитал на 6 книг меньше, чем Ваня и Слава вместе. Ваня прочитал на 8 книг меньше, чем Миша и Слава вместе. Сколько книг прочитал Слава?

3.11.5. (*«Бельчонок», 2020, 7.1*) Бельчонок нашел 30 орехов и спрятал их в двух местах: в старом дупле и в новом. Он переложил несколько орехов из старого дупла в новое, в старом дупле орехов стало в два раза меньше, а в новом в два раза больше. Сколько орехов он переложил?

3.11.6. (*«Ломоносов», 2022, 7–8.1*) Три друга-штангиста А, Б и В приехали на соревнования. Они все соревновались в одной весовой категории, и один из них стал победителем. Если вес, поднятый штангистом А, сложить с весом, поднятым штангистом Б, получится 220 кг, если сложить веса, поднятые штангистами А и В, то получится 240 кг, а если сложить веса, поднятые штангистами Б и В, то получится 250 кг. Какой вес поднял победитель соревнований?

3.11.7. (*«Надежда энергетики», 2017, 7.1*) На автобазе 31 машина. Закуплено некоторое количество топлива из расчета a литров в неделю на каждую машину. Но получилось, так что каждую неделю одна из машин полностью выходила из строя, поэтому закупленного топлива хватило на двойной срок. Какое количество топлива было закуплено и на сколько времени оно было рассчитано?

3.11.8. (*«Надежда энергетики», 2019, 7.1*) Головастики триасовой дискоглоссы имеют по пять ног, а у головастиков саблезубой лягушки отрастает несколько хвостов (у всех одинаковое количество). Сотрудник парка юрского периода зачерпнул вместе с водой несколько головастиков. Оказалось, что всего у пойманных было 100 ног и 64 хвоста. Сколько же хвостов имеет каждый головастик саблезубой лягушки, если все пятиногие головастики имеют один хвост, а все многохвостые — четыре ноги?

3.11.9. (*«Росатом», 2020, 7.1*) Компания «Рельс» занимается перевозкой пассажиров по железной дороге между городами A и B. В планах компании осуществлять перевозки в следующем режиме:

1. в начале каждого часа суток из городов A и B навстречу друг другу отправляются два состава, которые прибывают в конечный пункт спустя 6 часов;

2. после 3-часовой стоянки на запасных путях состав опять отправляется в путь.

Сколько составов нужно закупить компании, чтобы осуществить свои планы?

3.11.10. (*«Росатом», 2017, 7.1*) Половина учеников класса отличники и хорошисты, одна четверть — троечники, одна седьмая — двоечники. Помимо них в классе учатся еще и второгодники, но их не более 5. Сколько учеников в классе?

3.11.11. (*«Росатом», 2016, 7.1*) Учитель попросил Петю задумать целое положительное число. Умножить его на число, превышающее задуманное на два и прибавить к результату единицу. После объявления результата счета 36, учитель сразу назвал число, которое задумал Петя. Найти это число.

3.11.12. (*Всеросс., 2023, МЭ, 7.2*) Каждое из натуральных чисел 1, 2, 3, ..., 377 покрашено либо в красный, либо в синий цвет (оба цвета присутствуют). Известно, что количество красных чисел равно наименьшему красному числу, а количество синих чисел равно наибольшему синему числу. Чему равно наименьшее красное число?

3.11.13. (*«Росатом», 2022, 7.2*) В тетрадь написали несколько положительных чисел. Каждое из них равно трети от суммы остальных. Сколько чисел записано в тетради?

3.11.14. (*«Бельчонок», 2023, 7.2*) Даша, Маша и Настя записали по натуральному числу. Даша умножила своё число на число Насти, а также свое число на число Маши; эти два произведения отличались друг от друга на 1. Маша умножила своё число на Дашино и своё на Настино; эти произведения отличались на 25. Наконец, Настя умножила своё число на Дашино и своё на число Маши. На сколько отличались произведения у Насти? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*

3.11.15. (*«Надежда энергетики», 2017, 7.2*) В гости были приглашены 20 человек. Екатерина танцевала с семью кавалерами, Ольга — с восемью, Ирина — с девятью и так далее до Алены, которая танцевала со всеми кавалерами. Сколько танцоров-кавалеров было приглашено в гости?

3.11.16. (*«Надежда энергетики», 2016, 7.3*) Множество M состоит из n чисел, n нечетно, $n > 1$. Оно таково, что при замене любого его элемента на сумму остальных $n-1$ элементов из M сумма всех n элементов не изменяется. Найдите произведение всех n элементов множества M.

3.11.17. (*Математический праздник, 2023, 6.3, 7.3*) Сто сидений карусели расположены по кругу через равные промежутки. Каждое покрашено в жёлтый, синий или красный цвет. Сиденья одного и того же цвета расположены подряд и пронумерованы 1, 2, 3, ... по часовой стрелке. Синее сиденье №7 противоположно красному №3, а жёлтое №7 — красному №23. Найдите, сколько на карусели жёлтых сидений, сколько синих и сколько красных.

3.11.18. (*Матпраздник в Матвертикали, 2020, 7.4*) На кружок по акробатическим танцам набрали 21 человека, из которых только 4 мальчика. При этом для проведения занятий нужно, чтобы количество мальчиков было не меньше трети от количества участников всей группы. Какое минимальное количество мальчиков ещё надо добрать в группу, чтобы можно было проводить занятия?

3.11.19. (*«Росатом», 2015, 7.4*) Сколько баллов получил Петя на ЕГЭ, сколько лет его учительнице по математике, какой длины хвост его кота, если умножение этих чисел дает $19758 = 222 \cdot 89$, учительнице не более 80 лет, а длина хвоста кота (несколько сантиметров) не менее 4 см, но не более 36 см?

3.11.20. (*Олимпиада КФУ, 2022, 7.4*) Даны действительные числа a, b, c. Известно, что числа $a+b$, $b+c$, $c+a$ — это три последовательные целые числа, записанные в каком-то порядке (необязательно по возрастанию), причем наибольшее из них нечетно. Докажите, что числа a, b, c также являются тремя последовательными целыми числами, записанными в каком-то порядке.

3.11.21. (*«Бельчонок», 2020, 7.5*) У 14 чисел $1, 2, \ldots, 13, 14$ посчитаны суммы всех троек чисел. Сколько среди этих сумм различных составных чисел?

3.11.22. (*«Бельчонок», 2020, 7.5*) Из 20 чисел $1, 2, \ldots, 19, 20$ Петя выбирает 15 чисел и находит их сумму. Выбирая разные числа, сколько он может получить различных сумм, делящихся на 7?

3.11.23. (*«Курчатов», 2020, 7.5*) Шесть мальчиков и шесть девочек встали в круг, чередуясь. Каждый из них написал в своём блокноте ненулевое число. Известно, что каждое число, написанное мальчиком, равно сумме чисел, написанных рядом стоящими девочками, а каждое число, написанное девочкой, равно произведению чисел, написанных рядом стоящими мальчиками. Чему может равняться сумма всех двенадцати чисел?

3.11.24. (*Московская устная олимпиада, 2023, 6.6, 7.6*) Ученики писали олимпиаду в двух залах. Ни в одном из залов не было трёх тёзок. У 100 учеников были два тёзки в другом зале. У 144 учеников было хотя бы по одному тёзке в каждом зале. У скольких учеников было ровно по одному тёзке в каждом зале? *(Напомним, что тёзками считаются люди с одинаковыми именами.)*

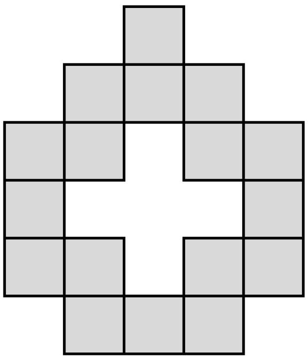
Глава 4

Комбинаторика

4.1 Перебор вариантов

Дополнительные задачи — в листке Перебор вариантов.

4.1.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 7.4*) На рисунке изображена фигура, состоящая из 17 клеток. Сколько существует способов разрезать её на 8 прямоугольников 1×2 и один квадратик 1×1?



4.1.2. (*Всеросс., 2023, МЭ, 7.4*) Рассмотрим семизначные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 встречается ровно один раз.

1. У скольких из них цифры с первой по шестую расположены в порядке возрастания, а с шестой по седьмую — в порядке убывания?

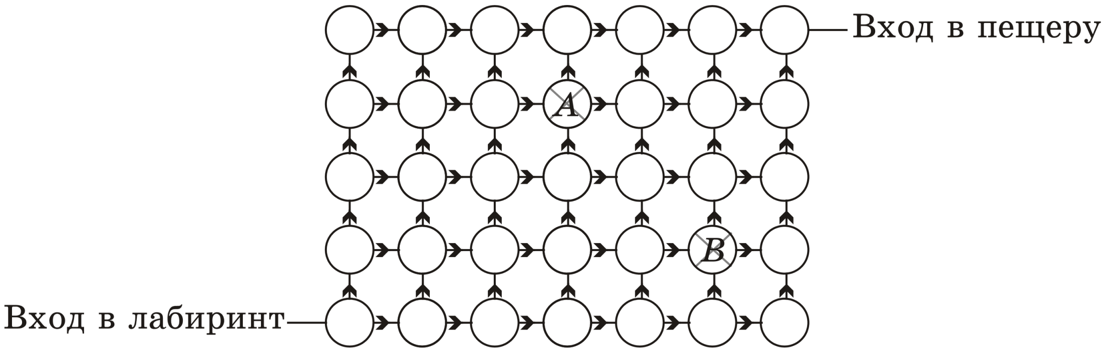
2. У скольких из них цифры с первой по пятую расположены в порядке возрастания, а с пятой по седьмую — в порядке убывания?

4.1.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 7.4*) а) Докажите, что существует такая пара двузначных чисел, что если к первому числу прибавить 15, а из второго вычесть 20, то полученные числа останутся двузначными, а их произведение окажется равным произведению исходных чисел.

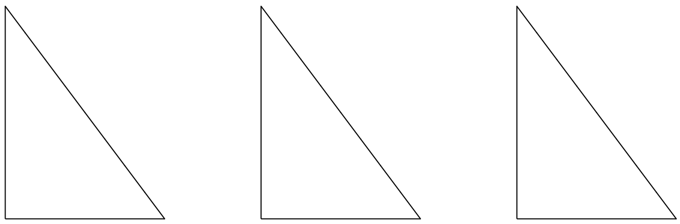
б) Сколько всего таких пар?

4.1.4. (*«Физтех», 2016, 5–7*) Сколько целых чисел от 378 до 2433 имеют сумму цифр, делящуюся на 5?

4.1.5. (*Турнир Архимеда, 2021.3*) **Али-баба** на пути к пещере с сокровищами проходит через лабиринт (схема лабиринта — на рисунке). Лабиринт состоит из одинаковых комнат (на схеме — кружочки) и коридоров между ними. Из каждой комнаты можно выходить в двух направлениях (на схеме — направо или вверх). Две комнаты (A и B) для прохода закрыты. Сколько различных путей ведут в пещеру с сокровищами?



4.1.6. (*«Ломоносов», 2023, 7–8.7*) На плоскости есть три одинаковых прямоугольных треугольника со сторонами 3, 4, 5 (см. рис.). Они одинаково ориентированы, их можно двигать и вращать, но нельзя накладывать друг на друга (касаться сторонами можно) и нельзя класть обратной стороной вверх (то есть, как бы вы ни двигали треугольник, стороны 3 - 4 - 5 будут расположены по ходу часовой стрелки).



Посчитайте, сколько различных «жёстких» фигур можно собрать, используя все эти треугольники. Фигура считается «жёсткой», если у каждого её треугольника есть с каким-нибудь другим треугольником общая вершина и общий граничный отрезок с концом в этой вершине (необязательно целая сторона).

4.1.7. (*«Высшая проба», 2021, 7.6*) (*Сингапур-2015*) Некоторые клетки квадрата 9 на 9 покрашены в чёрный цвет так, что в каждом прямоугольнике из шести клеток ровно две чёрные. Сколько всего клеток в квадрате покрашено? Дайте полный и обоснованный ответ на этот вопрос.

4.2 Правило произведения

Дополнительные задачи — в листках

- Правило произведения
- Комбинаторика-7

4.2.1. (*«Надежда энергетики», 2023, 7.1*) Совет деревни тайного трубопровода собирается за круглым столом, причем каждый приходящий может сесть на любое свободное место. Сколько возможно различных варантов рассадки, если на совет соберется 7 участников? (Две рассадки считаются одинаковыми, если слева и справа от каждого участника сидят те же лица, пустые места не учитываются.)

4.2.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 5.3, 7.1*) Сколько есть способов разрезать квадрат 10×10 по клеткам на несколько прямоугольников, сумма периметров которых равна 398? Способы, совмещаемые поворотом или переворотом, считаются различными.

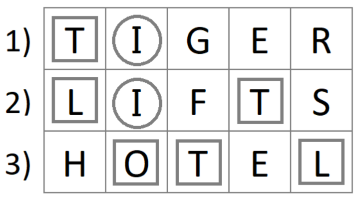
4.2.3. (*«Росатом», 2023, 7.1*) Каждая из четырех сторон квадрата разделена точками на 9 равных отрезков. На каждой стороне квадрата выбирается по точке деления, исключая вершины, и они являются вершинами выпуклого четырехугольника. Сколько существует таких четырехугольников, у которых ни одна из диагоналей не параллельна сторонам квадрата?

4.2.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.1*) В некотором языке есть 3 гласных и 7 согласных букв. Слог может состоять из любой гласной буквы и любой согласной в любом порядке, а слово — из любых трёх слогов. Слово называется забавным, если в нём встречаются две одинаковые буквы подряд. Сколько забавных слов в этом языке?

4.2.5. (*Всесиб., 2017, 7.2*) У Данила есть 6 карточек с буквами, из которых он смог сложить слово WNMWNM, изображённое на картинке. Заметим, что данное слово обладает замечательным свойством: если его перевернуть на 180 градусов, получится оно же. Сколько всего слов, обладающих таким свойством, может составить Данил, используя сразу все 6 карточек?

4.2.6. (*«Ломоносов», 2023, 7–8.2*) Есть три одинаковых кубика, грани каждого из которых покрашены в одни и те же 6 цветов одинаковым образом (каждая грань — полностью в один цвет, разные грани одного кубика — в разные цвета, взаимное расположение цветов на гранях всех кубиков одинаково). Ангелина ставит эти кубики друг на друга и получает башню в форме прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times 3$ кубика. Сколько разных раскрасок может иметь получившаяся башня? Раскраски считаются одинаковыми, если получаются друг из друга поворотом всей башни вокруг вертикальной оси.

4.2.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 6.2, 7.2*) В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Известно, что все буквы в загаданном слове различны.



Паша сделал три попытки и получил результат, показанный на рисунке. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям?

В английском алфавите 26 букв.

4.2.8. (*«Курчатов», 2020, 6.3, 7.2*) У Лёни есть карточки с цифрами от 1 до 7. Сколько существует способов склеить из них два трёхзначных числа (одна карточка не будет использоваться) так, чтобы каждое из них делилось на 9?

4.2.9. (*«Ломоносов», 2020, 5–6.2, 7–8.2, 9.2*) Сколькими способами можно прочитать слово «РОТОР», двигаясь по буквам рисунка, если возвращаться по пути к пройденным буквам нельзя, а прочтения, отличающиеся только направлением, считаются одинаковыми?

Р О Т О Р
О Т О Р
Т О Р
О Р
Р

4.2.10. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.2*) Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

4.2.11. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2022, 7–8.3, 9.2*) Будем обозначать $\overline{abc}$ трехзначные числа, записанные цифрами a, b, c. Сколько существует трехзначных чисел, таких, что разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 72 без остатка?

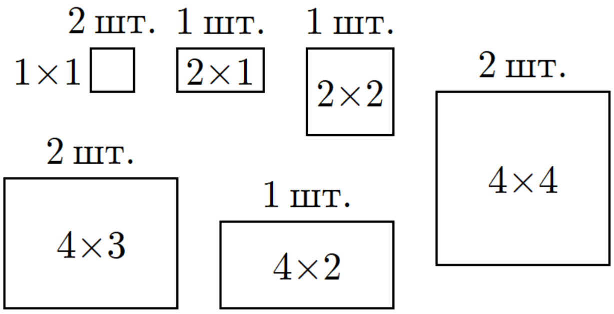
4.2.12. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 6.5, 7.4*) Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.

4.2.13. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 7.4*) В клетчатом прямоугольнике 20210×1505 провели две диагонали и покрасили все клетки, внутри которых они прошли. Сколько клеток оказалось закрашено?

4.2.14. (*«Высшая проба», 2021, 7.4*) (*По материалам американских математических соревнований)* Собственным делителем числа называется любой делитель, отличный от 1 и самого числа. Найдите число способов, которыми можно раскрасить в три цвета числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так чтобы цвет каждого числа отличался от цвета любого его собственного делителя. Не забудьте объяснить предложенный Вами способ подсчёта.

4.2.15. (*Московская устная олимпиада, 2022, 6.8, 7.6*) Имеется два набора полосок, в каждом из которых есть по одной полоске с размерами 1×1, 1×2, $\ldots$, 1×10. В первом наборе все полоски красные, а во втором — синие. Требуется, используя некоторые из этих полосок, сложить квадрат размером 10×10 так, что все красные полоски горизонтальные, а все синие — вертикальные. Сколькими способами это можно сделать?

4.2.16. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 7.5*) Несколько лет назад в компьютерной игре «Майнкрафт» было 9 различных картин (см. рис.): по одной горизонтальной размерами 2×1 и 4×2 и квадратной 2×2, а также по две штуки размерами 1×1, 4×3 (горизонтальные) и 4×4. Сколькими способами все 9 картин можно разместить на прямоугольной стене размером 12 блоков в длину и 6 в высоту? Картины не должны накладываться друг на друга; поворачивать их нельзя.



4.3 Количество делителей числа

Дополнительные задачи — в листке Функции делителей.

4.3.1. (*Открытая олимпиада, 2019, 7.1*) Существуют ли такие два натуральных числа x и y, имеющие одинаковое количество натуральных делителей, что $x > y$, а сумма всех делителей x (включая единицу и само число) меньше суммы натуральных делителей y (включая единицу и само число)?

4.3.2. (*«Росатом», 2017, 7.2*) Сколько существует у числа $a = 441000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ различных делителей, не кратных 15? Найти наибольший такой делитель.

4.3.3. (*«Ломоносов», 2022, 7–8.2*) Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,?$$

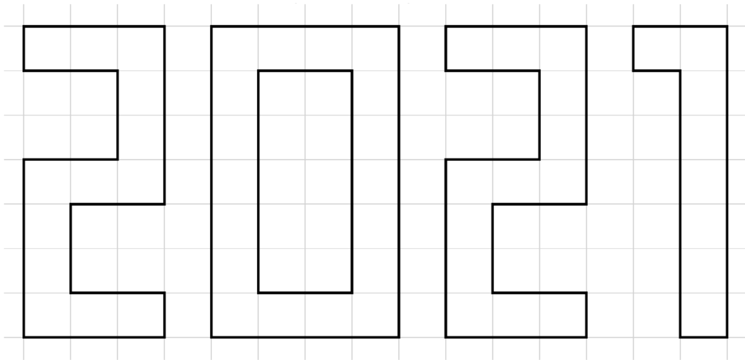
4.4 Сочетания

Дополнительные задачи — в листке Сочетания.

4.4.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.6*) Есть 7 красных, 6 белых и 8 желтых шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 3 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

4.4.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.5, 9.3*) Есть 7 красных, 6 белых, 8 желтых и 5 черных шаров, все шары пронумерованы различными числами. Сколькими способами можно выбрать 4 шара, так, чтобы не все были одного цвета и не все разных цветов? Способы, отличающиеся только порядком шаров, считаем одинаковыми.

4.4.3. (*«Ломоносов», 2021, 7–8.6*) Наташа хочет выложить мозаикой число 2021, показанное на рисунке. У неё есть 4 одинаковые плитки размером 1×1 клетку и 24 одинаковые плитки размером 1×2 клетки. Сколькими способами Наташа может осуществить задуманное?



4.5 Формула включений и исключений. Круги Эйлера

Дополнительные задачи — в листке Формула включений и исключений.

4.5.1. (*«Росатом», 2019, 7.1*) Каждый пятнадцатый брюнет имеет голубые глаза. Среди обладателей голубых глаз каждый десятый — брюнет. Во сколько раз число брюнетов, не обладающих голубым цветом глаз, больше числа голубоглазых, не являющимися брюнетами?

4.5.2. (*«Росатом», 2015, 7.1*) Среди 35 учеников 7 «А» класса не любят есть конфеты 13, торты — 12, пряники — 9 учеников. Кроме того, не любят есть конфеты и торты 3, пряники и торты — 6, конфеты и пряники — 5 учеников. Наконец, не любят есть конфеты, торты и пряники 2 ученика. Сколько в классе ребят, которые любят есть конфеты, торты и пряники?

4.5.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.6, 7–8.5, 9.4*) Найдите количество натуральных чисел, кратных 3, не кратных 5 и принадлежащих отрезку $[1200; 2020]$.

4.5.4. (*«Росатом», 2019, 7.4*) Среди натуральных чисел от 1 до 2019 есть n чисел кратных 7, но не кратных 8 и m чисел кратных 8, но не кратных 7. Найти $n - m$.

4.5.5. (*«Будущие исследователи – будущее науки», 2022, 7.2*) Пусть a — количество шестизначных чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 17, и b — количество шестизначных чисел, делящихся на 17, но не делящихся на 13. Найдите $a - b$.

4.5.6. (*Всесиб., 2015, 7.3*) Известно, что у всех *кракозябр* есть рога или крылья (возможно, и то, и то). По результатам всемирной переписи кракозябр выяснилось, что у 20% кракозябр, имеющих рога, есть ещё и крылья, а 25% кракозябр, у которых есть крылья, имеют ещё и рога. Сколько кракозябр осталось в мире, если известно, что их больше 25, но меньше 35?

4.6 Принцип Дирихле

Дополнительные задачи — в листке Принцип Дирихле.

4.6.1. (*«Надежда энергетики», 2022, 7.2*) Верно ли, что среди любых восьми целых чисел можно выбрать два, разность которых кратна семи?

4.6.2. (*«Надежда энергетики», 2019, 7.3*) Винтик и Шпунтик проектировали нановездеход. Винтик начертил прямоугольник 9×11 см и отметил в нем двести точек — мест под заклепки. Шпунтик разлиновал прямоугольник на квадратные отсеки со стороной 1 см. При этом ни одна пометка Винтика не попала на линии Шпунтика. Докажите, что обязательно найдется отсек, на который приходится три или более заклепки.

4.6.3. (*САММАТ, 2021, 7.7*) В черном ящике лежат 40 разноцветных елочных шаров: 14 красных, 10 золотистых, 8 зеленых и 8 синих. Какое наименьшее число елочных шаров нужно вытащить Пете из ящика, чтобы среди них обязательно оказалось: 1) 2 красных шара? 2) 1 красный шар и 1 золотистый? 3) 3 шара одного цвета?

4.6.4. (*«Курчатов», 2020, 7.3, 8.2*) У квадрата 5×5 есть 5 столбцов, 5 строк и 18 диагоналей, включая диагонали длины один. В каждой клетке этого квадрата Вова написал число 1, 3, 5 или 7, а Лёша посчитал сумму чисел по каждому столбцу, строке и диагонали. Докажите, что среди полученных Лёшей сумм есть хотя бы две равные.

4.6.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 6.5, 7.4*) В 100 пакетах лежат 2018 конфет, причём нет двух пакетов с одинаковым числом конфет и нет пустых пакетов. При этом некоторые пакеты могут лежать в других пакетах (тогда считается, что конфета, лежащая во внутреннем пакете, лежит и во внешнем). Докажите, что в каком-то пакете есть пакет с пакетом внутри.

4.6.6. (*Всесиб., 2015, 7.5*) Вася выписал на доске все натуральные числа от 1 до 2014, после чего Петя стёр 1006 из них. Докажите, что среди оставшихся чисел найдутся два таких, что одно будет делителем другого.

4.7 Подсчёт двумя способами

Дополнительные задачи — в листке Подсчёт двумя способами.

4.7.1. (*«Надежда энергетики», 2019, 5.4, 6.4, 7.4*) В двух отделах лаборатории «Фантасмагория» разрабатывают мобильные приложения под Android и под iOS. В один из рабочих дней все сотрудники этих отделов обменялись некоторым количеством сообщений. При этом каждый разработчик из Android-отдела отправил по 7, а получил по 15 сообщений, а каждый разработчик из iOS-отдела отправил по 15, а получил по 9 сообщений. Сообщения могли быть отправлены как сотруднику своего, так и чужого отдела. В каком отделе работает больше сотрудников?

4.8 Взаимно-однозначные соответствия

Дополнительные задачи — в листке Биекции.

4.8.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 7.5*) На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников 2×1), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а F — количество способов поставить на эту доску 16 фишек (в одну клетку нельзя ставить более одной фишки). Что больше — N или F? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

4.9 Графы

Дополнительные задачи — в листках

- Степень вершины
- Связные графы
- Обход графов
- Ориентированные графы

4.9.1. (*Всесиб., 2019, 7.5*) В некоторой стране есть 2019 городов, любые два из которых соединены двусторонним рейсом одной из многочисленных авиакомпаний. Известно, что каждая авиакомпания обслуживает не более 2017 рейсов. Докажите, что найдутся три таких города, что все попарные рейсы между ними обслуживают разные авиакомпании.

4.9.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 7.6, 8.6*) Шахматный конь проскакал по доске 3×4, причём на первой клетке своего пути написал число n, на второй — число $n+1$, ..., на последней — $n+11$. Могло ли оказаться, что сумма чисел в каждой строке кратна трём и сумма чисел в каждом столбце кратна трём?

4.9.3. (*Открытая олимпиада, 2023, 7.7*) В Странной стране некоторые города соединены двусторонними авиалиниями, причём из каждого города можно добраться на самолёте ровно в два других. Если из одного города можно добраться до другого на самолётах, это всегда можно сделать не более чем с 3 пересадками. При этом ни для каких двух городов не существует двух разных способов добраться из одного в другой менее, чем с 3 пересадками. Какое наибольшее количество городов НЕ может быть в этой стране?

4.9.4. (*Открытая олимпиада, 2022, 7.8*) В Волшебной Стране 100 городов, некоторые города соединены между собой двусторонними авиалиниями. Между любыми двумя городами можно добраться, сделав не более 11 пересадок, причём единственным образом. Если из города A в город B нельзя добраться с 10 пересадками или менее, назовём их оба окраинными. Какое наибольшее число окраинных городов может быть в стране?

Глава 5

Алгебра

5.1 Алгебраические преобразования

Дополнительные задачи — в листке Алгебраические преобразования.

5.1.1. (*Всесиб., 2016, 7.1*) Доказать, что если $a + \frac{1}{a}$ — целое число, то и $a^2 + \frac{1}{a^2}$ — целое число.

5.1.2. (*Открытая олимпиада, 2015, 7.2*) У мальчика Васи в тетраде были записаны два числа. Он уменьшил каждое из них на 1 и обнаружил, что произведение чисел осталось прежним. Найдите сумму исходных чисел.

5.1.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 7.2, 8.2*) Существуют ли три целых числа (среди которых могут быть одинаковые) такие, что если из произведения любых двух из них вычесть третье, то получится 2018?

5.1.4. (*«Росатом», 2023, 7.2*) При каком натуральном n справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} = 50?$$

5.1.5. (*САММАТ, 2021, 7.3*) Даны различные числа x и y такие, что $\frac{x}{y} + x = \frac{y}{x} + y$. Найдите $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

5.1.6. (*САММАТ, 2023, 7.3*) Известно, что

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} = \frac{9}{10}, \quad \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = \frac{51}{10}.$$

Найти $x + y + z$.

5.1.7. (*САММАТ, 2023, 7.4*) Сколько различных пар взаимно простых натуральных чисел m и n $(m > n)$ существует таких, что частное многочленов $m^3 - m^2 + m^2n - n^2m + n^2 - n^3$ и $m^2 - n^2$ равно 17? В ответе укажите пары таких чисел.

5.1.8. (*САММАТ, 2021, 7.5*) Какое из чисел больше: $\frac{202020202023}{202020202027}$ или $\frac{202120212024}{202120212028}$? Ответ обосновать с помощью алгебраического решения (не прибегая к непосредственному делению).

5.1.9. (*«Росатом», 2020, 7.3*) Представить число 2021 в виде суммы или разности квадратов трех целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы или разности квадратов четырех целых чисел.

5.1.10. (*«Надежда энергетики», 2016, 7.4*) Числа x, y, z таковы, что отношения

$$\frac{x+y}{z}, \quad \frac{x+z}{y}, \quad \frac{y+z}{x}$$

принимают одинаковое значение. Найдите его

5.1.11. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.4*) Для положительных чисел x, y, z заданы значения $xyz = 1$, $x + \frac{1}{z} = 5$, $y + \frac{1}{x} = 29$. Найдите значение $z + \frac{1}{y}$.

5.2 Уравнения и системы

5.2.1. (*САММАТ, 2022, 7.3*) Решить уравнение:

$$\frac{(n-2)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{12}.$$

Указание: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

5.2.2. (*«Росатом», 2021, 7.2*) Решить уравнение

$$1 + 1 : \Bigg(1 + 1 : \bigg(1 + 1 : \big(1 + 1 : (2x-3)\big)\bigg)\Bigg) = x.$$

5.2.3. (*«Росатом», 2020, 7.4*) Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0, \\ x^2 + z^2 - 4x - 6z = 0, \\ y^2 + z^2 + 2y - 6z = 0. \end{cases}$$

5.3 Задачи с параметрами

5.3.1. (*«Росатом», 2016, 7.2*) При каких целых a уравнение

$$(2a+3)x = 4a + 9$$

имеет целые решения?

5.3.2. (*«Росатом», 2016, 7.4*) Найти a, при которых множество решений системы

$$\begin{cases} ax-2\leqslant 0, \\ 2x+a\geqslant 0, \end{cases}$$

представляет отрезок на действительной оси длиной 2.

5.3.3. (*«Ломоносов», 2020, 7–8.4*) Найдите все a, при которых уравнение

$$a^2(x-2)+a(39-20x)+20=0$$

имеет хотя бы два различных корня.

5.3.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.7, 9.6*) Найдите наименьшее возможное значение $x-y$ при условии $x^2-2xy-x+y^2+y\leqslant 0$.

5.4 Уравнения в целых числах

Дополнительные задачи — в листке Уравнения в целых числах.

5.4.1. (*САММАТ, 2023, 7.1*) Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$39^x=1521\left[39^{x-2}+\frac{1}{39x}\right]-y.$$

5.4.2. (*«Надежда энергетики», 2021, 7.1*) Зная, что $2021=43\cdot 47$, решите в целых числах уравнение

$$x^2+4x=2021.$$

5.4.3. (*САММАТ, 2022, 7.7*) Найти все целые значения m, при которых дробь $\frac{3m+2}{m-4}$ является натуральным числом.

5.4.4. (*«Ломоносов», 2023, 7–8.3*) Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2-y^2-4x-6y-58=0.$$

5.4.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 7–8.4, 9.3*) Найдите все пары натуральных чисел (x,y), для которых выполнено равенство

$$(x+y)\cdot(x+y+1)+2y=100.$$

5.4.6. (*«Высшая проба», 2021, 7.5, 8.4*) Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d, для которых выполнены равенства

$$\begin{cases} a+b=cd; \\ c+d=ab. \end{cases}$$

5.5 Целая и дробная части

5.5.1. (*«Надежда энергетики», 2022, 6.2*) Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leqslant x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] = 2x + 4.$$

5.5.2. (*«Надежда энергетики», 2022, 7.5*) Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leqslant x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x}{10}\right] + \left[\frac{x+1}{10}\right] + \dots + \left[\frac{x+9}{10}\right] = x^2.$$

5.5.3. (*МЦНМО, 7*) Решите уравнение

$$[x^3] + [x^2] + [x] = \{x\} - 1.$$

5.5.4. (*«Росатом», 2018, 7.4*) Целой частью числа x, обозначение $[x]$, называют наибольшее целое число, не превосходящее x. Число $\{x\} = x - [x]$ называют дробной частью числа x. Найти x, для которого $2x + [x] = 4$.

5.5.5. (*«Надежда энергетики», 2020, 7.3*) На координатной плоскости выделен квадрат K с вершинами в точках $(0, 0)$ и $(10, 10)$. Изобразите внутри этого квадрата множество M точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению

$$[x] = [y],$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a (то есть наибольшее целое число, не превосходящее a; например, $[10] = 10$, $[9{,}93] = 9$, $[1/9] = 0$, $[-1{,}7] = -2$). Какую часть площади квадрата K составляет площадь множества M?

5.5.6. (*«Росатом», 2017, 7.4*) Обозначим через $[a]$ целую часть числа a, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a. Область D на плоскости содержит точки $M(x; y)$, для которых координаты x, y удовлетворяют уравнению $2[x + 1] + 3[y + 2] = 13$ и условию $x \in [-2; 3]$. Нарисовать область D на координатной плоскости и найти ее площадь.

5.6 Вычисление сумм

Дополнительные задачи — в листке Вычисление сумм.

5.6.1. (*«Росатом», 2019, 7.2*) Найти сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 2019, которые могут быть представлены в виде суммы двух взаимно простых чисел, больших 1.

5.6.2. (*«Ломоносов», 2021, 7–8.4*) Решите уравнение:

$$(x + 1)^2 + (x + 3)^2 + (x + 5)^2 + \ldots + (x + 2021)^2 = x^2 + (x - 2)^2 + (x - 4)^2 + \ldots + (x - 2020)^2.$$

5.6.3. (*«Надежда энергетики», 2018, 7.5*) Даны числа x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_{2018}. Известно, что $x_1 = 1/2$ и

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2nx_{n-1}+1} \quad \text{для } n = 2, \ldots, 2018.$$

Найдите сумму $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2018}$.

5.6.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.6*) Дан набор из 30 гирь, самая легкая весит 3 грамма, каждая следующая имеет вес на 1 грамм меньший, чем удвоенный вес предыдущей гири. Найдите общий вес гирь.

5.7 Последовательности

5.7.1. (*«Ломоносов», 2022, 7–8.4*) Для бесконечной последовательности чисел x_1, x_2, x_3, $\ldots$ при всех натуральных $n \geqslant 4$ выполняется соотношение $x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$. Известно, что $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Найдите x_{2022}.

5.7.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 7–8.5, 9.4*) Дана последовательность чисел, члены которой удовлетворяют соотношению:

$$b_n \cdot b_{n-2}^3 = b_{n-3} \cdot b_{n-1}^3$$

при всех $n = 4, 5, 6 \ldots$ Найдите b_{2023}, если известно, что $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$.

Глава 6

Алгоритмы, процессы, игры

6.1 Алгоритмы и операции

Дополнительные задачи — в листке Алгоритмы и операции.

6.1.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 7.1*) Петя записал на доску 20 натуральных чисел $1, 2, \ldots, 20$. Вася сначала стёр все чётные числа, а затем стёр все числа, дающие остаток 4 при делении на 5. Сколько чисел осталось на доске?

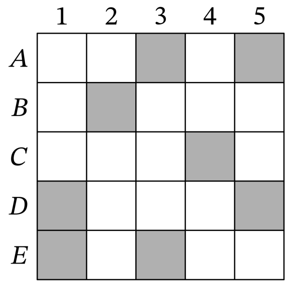
6.1.2. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 7.2*) На День учителя благодарные ученики подарили Егору Сергеевичу несколько железнодорожных билетов, чтобы он совершил путешествие по России. Билеты были для проезда между следующими парами городов:

- Санкт-Петербург и Тверь,
- Ярославль и Нижний Новгород,
- Москва и Казань,
- Нижний Новгород и Казань,
- Москва и Тверь,
- Москва и Нижний Новгород.

Билеты были с открытой датой: по каждому билету можно проехать один раз в любую сторону между городами.

Егор Сергеевич в итоге смог побывать ровно по одному разу в шести городах. В каком городе могло начаться путешествие? Укажите все возможные варианты.

6.1.3. (*Всеросс., 2022, МЭ, 7.2*) В белом клетчатом квадрате 5×5 Петя закрасил несколько клеток в чёрный цвет так, что в каждом клетчатом квадрате 2×2 оказалось не более двух чёрных клеток. Его друг Вася, посмотрев на рисунок, решил перекрасить в белый цвет некоторые 5 клеток, любые две из которых находятся в разных строках и в разных столбцах. После этого получился рисунок, изображённый ниже.



Какие пять клеток перекрасил Вася?
Постройте соответствие.

- В строчке A перекрашенная клетка стоит
- В строчке B перекрашенная клетка стоит
- В строчке C перекрашенная клетка стоит
- В строчке D перекрашенная клетка стоит
- В строчке E перекрашенная клетка стоит

- в столбце с номером 1.
- в столбце с номером 2.
- в столбце с номером 3.
- в столбце с номером 4.
- в столбце с номером 5.

6.1.4. (*Турнир Архимеда, 2022.1.1*) **На экране** высвечено число 48. При нажатии кнопки все цифры числа перемножаются, к результату прибавляется 27, полученное число высвечивается на экране (предыдущее число стирается). Кнопку нажали 2022 раза. Какое число теперь на экране?

6.1.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.2, 7–8.1, 9.3*) На кухне лежит пакет с пакетами. Каждый из пакетов либо пустой (не содержит других пакетов), либо содержит ровно 5 пакетов (в некоторых из них могут быть другие пакеты). Определите, сколько всего пакетов, если известно, что 101 пакет пустой.

6.1.6. (*Турнир Архимеда, 2022.1.2*) **На клетчатой бумаге** нарисованы схемы лабиринтов (рис. 1, 2). Шарик может двигаться по лабиринту в одном из четырёх направлений с постоянной скоростью (вправо, влево, вверх и вниз, начальное направление показано стрелочкой). При столкновении с барьером шарик отражается от него, меняя направление движения на 90°. Барьер после удара шарика поворачивается на 90° относительно своего центра. Если шарик касается внешней стенки лабиринта, он останавливается.

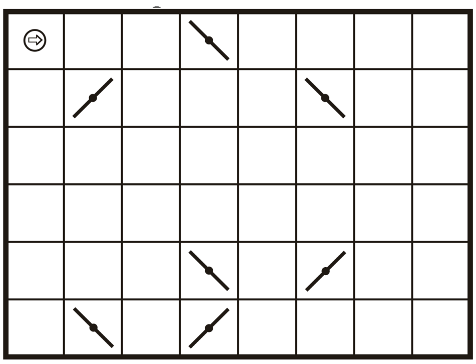


Рис.1

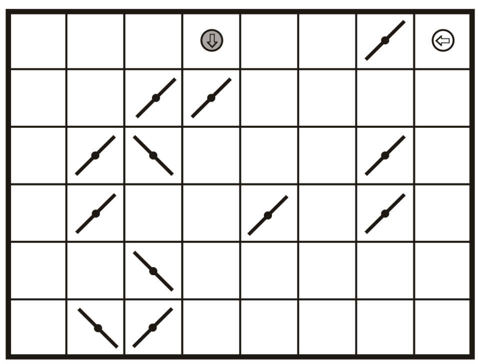


Рис.2

1. В лабиринте движется один шарик. На рисунке 1 изображено начальное состояние лабиринта. Изобразите конечное состояние лабиринта.

2. В лабиринте одновременно начинают двигаться два шарика. При столкновении шариков направления их движений меняются на противоположные. На рис. 2 изображено начальное состояние лабиринта. Изобразите конечное состояние лабиринта (начальные скорости шариков одинаковые, после любых столкновений скорости не меняются).

6.1.7. (*«Бельчонок», 2020, 7.3*) Маленький бельчонок умеет прыгать только на 30 см и на 40 см, зато и вперед и назад. Докажите, что он может преодолеть любое целое число метров за число прыжков, кратное 6.

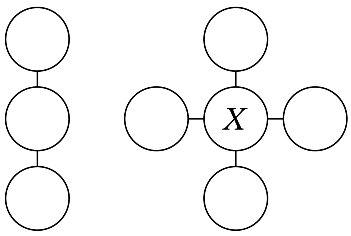
6.1.8. (*Открытая олимпиада, 2016, 7.3*) У Ани было два треугольника, каждый из которых был составлен в точности из трех палочек натуральной длины. Затем из всех этих палочек сложили квадрат со стороной равной 5. Какие пары треугольников могли быть у Ани? Перечислите все возможные варианты и докажите, что других быть не могло.

6.1.9. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 7.4*) На доске было записано 10 чисел. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b, а вместо них записать $a + 2b$ и $b + 2a$. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций все числа на доске окажутся одинаковыми, если вначале были записаны

а) числа 1, 2, ..., 10;

б) произвольные 10 различных чисел (не обязательно целых)?

6.1.10. (*Всеросс., 2022, МЭ, 7.6*) В кружочки на рисунке расставлены натуральные числа 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 (каждое число — в одном кружочке) так, что все три суммы трёх чисел вдоль каждой линии равны. Какое число может оказаться в кружочке X? Укажите все возможные варианты.



6.1.11. (*Турнир Архимеда, 2023.1.4*) **Хакер Вася** испортил секретную информацию, представленную в виде ряда натуральных чисел. Известно, что у него было 4 вируса:

1. Вирус «А» стирает все числа, кратные 3.

2. Вирус «Б» стирает все числа, при делении на 5 дающие остаток 2.

3. Вирус «Г» стирает все числа, большие 17, но не превосходящие 33.

4. Вирус «Д» стирает все числа, кратные 4.

Выяснилось, что вирус «А» стёр числа 9, 18, 90, 99; вирус «Б» — 2, 7, 17, 62, 67; вирус «Г» — 22, 23, 25, 29; вирус «Д» — 16, 32, 36, 44 и 88. В каком порядке Вася запускал вирусы?

6.1.12. (*Турнир Архимеда, 2023.2.1*) **Конь Юлий**, заработав тяжким трудом 100 золотых и 100 серебряных монет, решил отдохнуть на Бали. В рекламе вклада «Дупло дуба» сказано, что если «положить в дупло» 1 золотую монету, то счёт в банке Бали вырастет на 4 рупии, а если 1 серебряную, то на 2. Все так и оказалось, но Юлию «забыли» объяснить, что при «взносе в дупло» нескольких монет сразу (не одной!) власти Бали взимают комиссию в 25% размера взноса (в рупиях). В результате, вложив все свои деньги, Юлий обнаружил на счёте всего 454 рупии. Сколько раз Юлий «положил в дупло» ровно 1 золотую монету, если ровно 1 серебряную монету он положил 2 раза?

6.1.13. (*«Надежда энергетики», 2016, 7.5*) Мама поставила на стол вазу с 15 мандаринами. Один из гостей взял два мандарина, мама взамен положила одно яблоко. Другие гости тоже стали брать по два фрукта. Каждый раз, когда гость брал два одинаковых фрукта (два мандарина или два яблока), мама взамен клала в вазу одно яблоко; если же гость брал два разных фрукта (один мандарин и одно яблоко), мама клала в вазу один мандарин. В итоге в вазе остался один фрукт. Какой?

6.1.14. (*«Бельчонок», 2022, 7.5*) На 900 карточках записаны все натуральные числа от 1 до 900. Карточки, на которых записаны квадраты целых чисел, убирают, а оставшиеся перенумеровывают, начиная с 1. Потом операцию удаления квадратов повторяют. Сколько раз придётся повторить эту операцию, чтобы удалить все карточки?

6.1.15. (*Открытая олимпиада, 2019, 7.5*) Из натурального числа вычли его наибольшую цифру. Затем из получившегося числа также вычли его наибольшую цифру, и т. д. После шести таких операций получилось число 100. Какое число могло быть написано изначально? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

6.1.16. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 7.5*) Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Для каких n можно раскрасить доску так, чтобы на ней было ровно n равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

6.1.17. (*Всесиб., 2021, 7.5, 8.5*) Архипелаг состоит из n островов, между любыми двумя из которых ходит свой паром. Проезд на каждом пароме стоит одинаково в обе стороны, но при этом на любых двух различных паромах стоимости различны. Путешественник хочет прилететь на вертолёте на один из островов, а затем проплыть на $n-1$ пароме таким образом, что каждый раз за проезд он будет платить меньше, чем платил до этого. То, что он может оказаться на каком-то острове несколько раз, его не смущает. Прилететь на вертолёте можно на любой остров, все стоимости проезда путешественнику известны. Докажите, что он сможет осуществить задуманное.

6.1.18. (*Математический праздник, 2022, 6.6, 7.6*) Шеренга солдат-новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, остальные — направо. Оказалось, что в затылок соседу смотрит в шесть раз больше солдат, чем в лицо. Затем по команде «кругом» все развернулись в противоположную сторону. Теперь в затылок соседу стали смотреть в семь раз больше солдат, чем в лицо. Сколько солдат в шеренге?

6.1.19. (*Турнир Архимеда, 2023.2.4*) **Заминированные клетки** прямоугольника 5×9 образуют квадрат 2×2. У сапёра есть прибор, с помощью которого можно выделить любую группу клеток, и, если среди выделенных клеток есть хотя бы одна клетка с миной, то на приборе загорается лампочка. Предложите способ, позволяющий гарантированно найти все заминированные клетки за наименьшее число измерений. Докажите, что не существует способа, позволяющего гарантированно найти все заминированные клетки за меньшее число измерений.

6.1.20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.6, 7–8.6, 9.6*) К середине XXII века человечество освоило 100 обитаемых планет в других звездных системах. От каждой планеты расходится 40 гиперпространственных порталов, и к каждой планете ведёт 40 порталов от других планет. Все порталы строго односторонние, т. е. если есть портал, ведущий из A в B, то нет портала, ведущего из B в A. Мистер Риггз хочет добраться с Галатеи-37 на Пандору за наименьшее число гиперпространственных прыжков. Сколько прыжков ему может потребоваться (укажите все варианты)?

6.1.21. (*Математический праздник, 2021, 7.6*) Пять друзей подошли к реке и обнаружили на берегу лодку, в которой могут поместиться все пятеро. Они решили покататься на лодке. Каждый раз с одного берега на другой переправляется компания из одного или нескольких человек. Друзья хотят организовать катание так, чтобы каждая возможная компания переправилась ровно один раз. Получится ли у них это сделать?

6.1.22. (*Московская устная олимпиада, 2023, 7.7*) На доске записаны числа 1000, 1001, $\ldots$, 2999. На каждом шаге разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число, равное $\frac{\min(a,b)}{2}$. После 1999 таких операций на доске останется одно число. Докажите, что оно меньше 1.

6.1.23. (*Открытая олимпиада, 2018, 7.7*) С числом, записанным на доске, разрешается выполнять одну из следующих операций:

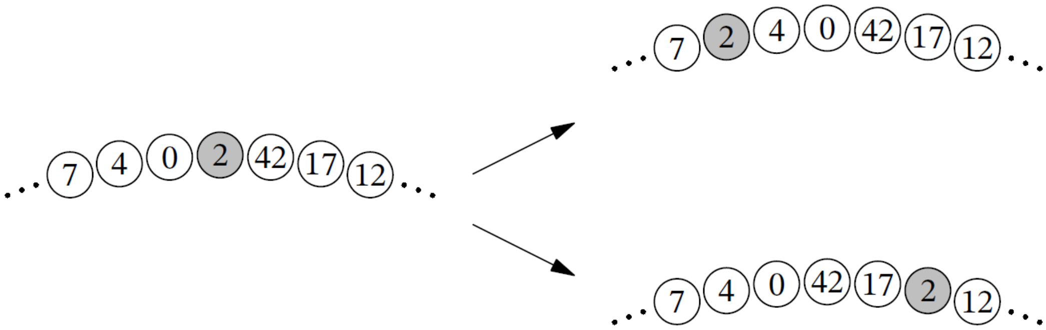
1. Если в исходном числе есть цифра, не равная 9, имеющая две соседние цифры, большие 0, можно увеличить эту цифру на 1, а соседние уменьшить на 1.
2. Вычесть из любой ненулевой цифры, кроме последней, 1, а к следующей прибавить 3.
3. Уменьшить любую достаточно большую цифру на 7.

Если в результате какой-то из этих операций в числе на одном или нескольких первых местах оказываются нули, они автоматически отбрасываются.

Изначально на доске было записано число из ста восьмёрок. В конце осталось однозначное число. Какое именно?

6.1.24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.7, 9.6*) Функция $f(x)$ определена и положительна при всех $x > 0$. Известно, что $f(1) + f(2) = 20$ и $f(a + b) = f(a) + f(b) + 2\sqrt{f(a)f(b)}$ при всех $a, b > 0$. Найдите $f(2020)$.

6.1.25. (*«Высшая проба», 2023, 7.6*) На столе по кругу лежат n монет, пронумерованных числами от 0 до $n-1$ в некотором порядке. За одну операцию разрешается взять какую-то монету с номером k и переместить её на k позиций в произвольном направлении, сместив при этом промежуточные монеты (например, операция над монетой с номером 2 может быть выполнена одним из двух способов, показанных на рисунке ниже). Докажите, что из любого начального положения можно получить такое, в котором, начиная с некоторого места, монеты 0, 1, 2, …, $n-1$ лежат по часовой стрелке.



6.2 Взвешивания

Дополнительные задачи — в листке Взвешивания.

6.2.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 7.1*) Имеется 19 кг крупы. Можно ли с помощью трех взвешиваний на чашечных весах отмерить 1 кг, если есть одна трехкилограммовая гиря?

6.2.2. (*САММАТ, 2021, 7.6*) Имеются чашечные весы и гирька массой 1 грамм. Как, воспользовавшись весами 11 раз, взвесить 2021 грамм сахара-песка, если после каждого взвешивания новая порция сахара отсыпается в отдельную емкость? Приведите последовательность взвешиваний.

6.2.3. (*«Бельчонок», 2021, 7.2*) По кругу лежат 4 одинаковых с виду ореха, два из которых весят 9 г и 11 г, а два других весят по 10 г каждый. Известно, что орехи весами 9 г и 11 г соседние. Требуется гарантированно определить вес каждого ореха. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь это можно сделать?

6.2.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 7.3*) У Коли семь старинных монет: четыре одинаковых дублона и три одинаковых кроны. Точный вес монет он забыл, но помнит, что дублон весит 5 или 6 грамм, а крона — 7 или 8 грамм. Сможет ли он узнать точный вес монет при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

6.2.5. (*Турнир Архимеда, 2023.1.3*) **Два золотоискателя** делят добытое золото. Всего у них 9 самородков весом соответственно 64, 68, 40, 34, 8, 13, 16, 32 и 48 г. Золотоискатели кладут самородки на чашечные весы так, чтобы получилось равновесие (если не получается, то можно некоторые самородки на весы не класть). Если весы в равновесии, золотоискатели забирают золото с чашек, всё остальное берет бригадир. Сколько золота гарантированно получит бригадир? Укажите, как при этом достигается равновесие на весах.

6.2.6. (*«Бельчонок», 2019, 7.4*) На каждой из 8 запечатанных посылок написан вес этой посылки в килограммах: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Однако вес одной из посылок на 0,5 кг больше, чем указано в надписи. Как найти эту посылку за два взвешивания на чашечных весах?

6.2.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 7.4, 8.4*) Имеется десять монет разного веса и чашечные весы без гирь. Требуется выделить две монеты — самую тяжелую и самую легкую. Можно ли этого добиться за 13 взвешиваний?

6.2.8. (*«Бельчонок», 2023, 7.4*) Есть мешок с орехами весом 1 г, 2 г, …, 50 г и чашечные весы. Бельчата Вася и Петя по очереди кладут на весы по одному ореху из мешка, каждый на свою чашу, начинает Вася. После хода каждого игрока его чаша должна перевесить. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

6.2.9. (*«Надежда энергетики», 2019, 7.5*) Как-то раз Баба Яга и Кощей Бессмертный пытались поровну поделить чудесный порошок, который все обращает в золото. Баба Яга достала весы и взвесила весь порошок. Весы показали 6 золотников. Затем она стала убирать порошок, пока весы не показали 3 золотника. Однако Кощей заподозрил, что весы врут, и взвесил отдельно на тех же весах (других не было) отсыпанную часть порошка. Весы показали 2 золотника. Определите точный вес тех двух частей, на которые Баба Яга разделила порошок. Считайте, что если весы врут, то всегда на одну и ту же величину.

6.2.10. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 7.5, 8.5*) У Пети есть 4 медных советских монеты — по одной номиналом 1, 2, 3 и 5 копеек. Он узнал из интернета такой факт: эти монеты должны весить ровно столько граммов, каков их номинал. Петя хочет проверить этот факт с помощью чашечных весов. Сможет ли он это сделать, если у него есть всего одна гирька в 9 граммов?

6.2.11. (*«Бельчонок», 2022, 7.5*) Из шести неразличимых на вид орехов два искусственных (настоящие орехи весят одинаково, искусственные орехи тоже одинаково и легче настоящих). Есть чашечные весы, за каждое взвешивание на которых надо отдать один орех. Если отданный орех настоящий, весы показывают правильный результат, а если искусственный — могут показать всё что угодно. Как найти (и не отдать) один настоящий орех?

6.2.12. (*Всесиб., 2017, 7.5*) Есть 12 монет, из которых одна, фальшивая, легче остальных. Также имеются чашечные весы без гирь. Про них известно, что они либо обычные (то есть на них всегда перевешивает тяжёлая кучка), либо волшебные (на таких всегда перевешивает лёгкая кучка, равенство показывается правильно), но неизвестно, волшебные они всё-таки, или обычные. Можно ли за три взвешивания на таких весах найти фальшивую монету?

6.2.13. (*Матпраздник в Матвертикали, 2023, 7.6*) У царя есть 7 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты весят 7 г, во втором 8 г, в третьем 9 г, в четвёртом 10 г, в пятом 11 г, в шестом 12 г, в седьмом 13 г, но не помнит, где какие. Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее).

а) Может ли мудрец за одно взвешивание проверить, верно ли, что в указанном мешке хранятся монеты по 7 г?

б) Может ли мудрец определить, какие монеты в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний?

6.2.14. (*Математический праздник, 2023, 7.6*) У царя есть 7 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты весят 7 г, во втором 8 г, в третьем 9 г, в четвёртом 10 г, в пятом 11 г, в шестом 12 г, в седьмом 13 г, но не помнит, где какие.

Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее). Может ли мудрец определить, какие монеты в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний?

6.2.15. (*Московская устная олимпиада, 2022, 7.9*) У царя есть 12 различных украшений из чистого золота. Царь и ювелир знают, что украшения весят 28, 29, 30, ..., 39 граммов, но только ювелир помнит, какое украшение сколько весит. Царь не доверяет ювелиру и считает, что тот всё напутал. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь ювелир сможет доказать царю, что выбранное им украшение действительно весит 39 граммов?

6.3 Таблицы

Дополнительные задачи — в листке Таблицы.

6.3.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 7.3*) В клетках квадрата расставили числа так, что суммы чисел в каждой вертикали, горизонтали и каждой диагонали из трёх клеток равны. Затем некоторые числа скрыли. Чему равна сумма чисел в двух закрашенных клетках?

16		
		10
8		12

6.3.2. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 7.6*) Магический квадрат — это таблица 3×3, в которой расставлены числа так, что суммы по всем строкам, столбцам и двум главным диагоналям одинаковы. На рисунке изображён магический квадрат, в котором все числа, кроме трёх, стёрты. Найдите, чему равно число в левом верхнем углу квадрата.

?	31	9
13		

6.3.3. (*Всеросс., 2021, МЭ, 7.4*) В таблицу, содержащую A столбцов и 100 строк, вписали по строкам натуральные числа от 1 до $100 \cdot A$ в порядке возрастания, начиная с первой строки. Число 31 стоит в пятой строке. В какой строке число 100?

6.3.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 7.4*) В квадрате 4×4 (клетки) поставили крестики в восьми клетках. Обязательно ли в какой-то строке или в каком-то столбце будет ровно два крестика?

6.3.5. (*Всеросс., 2021, МЭ, 7.6*) На поле игры «Сапёр» в некоторых клетках стоит по одной мине. В остальных клетках расставлены числа, равные количеству мин в соседних (по стороне или углу) клетках. На поле 9×6 известны некоторые числа, как показано на рисунке. Сколько мин на этом поле? Найдите все варианты.

	1			2			1	
1		1	1		1	1		1
1	1		1	1	1		1	1

6.3.6. (*«Надежда энергетики», 2018, 7.4*) Все числа 1, 2, 3, ..., n^2 располагают в виде квадратной $n \times n$-таблицы. Найдите все n, для которых сумма чисел в каждой следующей строке такой таблицы на 1 больше суммы чисел предыдущей строки.

6.3.7. (*Московская устная олимпиада, 2022, 6.3, 7.3*) Дана таблица размером 100×100 клеток. Петя выбирает строку и в каждую из её клеток ставит число 1. Затем Вася выбирает столбец и в каждую его свободную клетку ставит число -1. Затем Петя выбирает другую строку и в каждую её свободную клетку ставит 1. И так далее, пока в таблице есть свободные клетки. Чему равна сумма чисел в таблице, заполненной таким образом?

6.3.8. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 7.5*) В каждую клетку клетчатого квадрата 9×9 записаны нули. За один ход разрешается выбрать строку и прибавить произвольное положительное число к любым двум соседним клеткам в выбранной строке (прибавляемое число разрешается менять от хода к ходу). Можно ли за несколько ходов составить квадрат, в котором суммы во всех девяти столбцах совпадают?

6.3.9. (*Открытая олимпиада, 2021, 7.5*) Можно ли в прямоугольной таблице 6×7 (6 строк и 7 столбцов) расставить натуральные числа от 1 до 42 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом вертикальном прямоугольнике 1×2 сумма чисел была чётной?

6.3.10. (*Открытая олимпиада, 2022, 7.5*) В клетках таблицы 7×7 записаны попарно различные целые неотрицательные числа. Оказалось, что у любых двух чисел, находящихся в одной строке или одном столбце, отличаются неполные частные при делении на 8. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из чисел в таблице?

6.3.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 7.5, 8.4*) В каждую клетку таблицы 10×10 записали натуральное число. Потом закрасили каждую из клеток, для которой выполняется свойство: число, написанное в этой клетке, меньше одного из своих соседей, но больше другого соседа. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) В результате незакрашенными остались только две клетки. Какова минимально возможная сумма чисел в этих двух клетках?

6.3.12. (*Всеросс., 2023, МЭ, 7.8*) Клетки таблицы 50×50 раскрашены в n цветов так, что для любой клетки в объединении её строки и столбца встречаются клетки всех n цветов. Найдите наибольшее возможное количество клеток синего цвета, если

1. $n = 2$;
2. $n = 25$.

6.3.13. (*Московская устная олимпиада, 2022, 7.7*) В клетки таблицы размером 4×4 расставляют числа от 1 до 16. На какое наибольшее натуральное число может делиться сумма чисел в каждом квадрате размером 2×2?

6.3.14. (*Открытая олимпиада, 2016, 7.8*) В таблице 8×8 расставлены целые числа от 0 до 10 (естественно, числа могут повторяться, не обязательно все указанные числа встречаются). Известно, что в каждом прямоугольнике 3×2 или 2×3 сумма чисел равна 10. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице.

6.3.15. (*Открытая олимпиада, 2015, 7.8*) В клетках таблицы 5×7 расставлены числа 1, 2 и 3, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

6.4 Игры и стратегии

Дополнительные задачи — в листке Игры и стратегии.

6.4.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 7.2*) Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска из 9 клеток. Каждым ходом игрок вписывает любую цифру в любую свободную клетку. Ходят по очереди, начинает Петя. Если в конце игры полученное число окажется точным квадратом, то выигрывает Петя, иначе — Вася. При этом они считают, что число может начинаться с одного или нескольких нулей. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

6.4.2. (*Открытая олимпиада, 2017, 7.3*) Петя и Вася играют в игру на изначально белом клетчатом поле 101×101. Первым ходит Петя и он своим первым ходом может закрасить чёрным цветом одну клетку. Каждым следующим ходом игрок может закрасить чёрным любой вертикальный или горизонтальный белый клетчатый прямоугольник $1 \times n$ на этом поле, где n — натуральное число, при этом оно может либо совпадать с количеством клеток, только что закрашенных другим игроком, либо превосходить его на один. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

6.4.3. (*«Бельчонок», 2020, 7.4*) На доске написаны числа 17 и 18. Женя и Гриша начинают игру по таким правилам: за один ход можно либо поделить какое-нибудь число пополам (если есть чётное число), либо из любого числа вычесть ненулевую цифру, которая в этот момент написана на доске. Выигрывает тот, кто получит 0. Первый ход делает Женя. Кто из мальчиков выигрывает при правильной игре, и как он должен действовать?

6.4.4. (*«Бельчонок», 2020, 7.4*) Перед Колей и Мишей лежат 4 карточки:

15	37	42	53

Коля выбирает любую карточку, Миша любую из оставшихся. Через число секунд, равное выбранному им числу, каждый из мальчиков выбирает следующее число из оставшихся на этот момент. Выигрывает тот, у кого больше сумма взятых им чисел. Кто из мальчиков выигрывает при правильной игре, и как он должен действовать?

6.4.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 7.4*) Двое играют в такую игру. Они по очереди называют восьмизначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее. Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

6.4.6. (*Всесиб., 2020, 7.4*) Петя и Волк играют в игру. Изначально на доске написано число 0, каждым ходом написанное число нужно увеличить на 2, 3, 8 или 9. Ходы делаются по очереди, первым ходит Петя. Выигрывает тот, после чьего хода получится число, кратное 2020. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

6.4.7. (*Открытая олимпиада, 2015, 7.5*) Петя и Вася играют в игру. Всего в игре три хода. Первым ходом Петя ломает палочку длиной 10 см на две части. Затем Вася ломает одну из получившихся палочек на две части. Последним ходом Петя ломает одну из трёх имеющихся палочек на две части. Вася выигрывает, если из каких-нибудь трёх получившихся частей можно составить треугольник. Петя — в противном случае. Кто выиграет при правильной игре?

6.4.8. (*Олимпиада КФУ, 2023, 7.5*) Петя и Вася играют в такую игру. На крайнем левом поле клетчатой полоски, состоящей из 13 клеток, лежит кучка из 2023 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из ребят своим ходом может сдвинуть любой камень на одно или на два поля вправо. Выигрывает тот, кто первым поставит любой камень на крайнюю правую клетку. Кто из ребят может выиграть вне зависимости от игры соперника?

6.4.9. (*«Курчатов», 2021, 7.5*) Таблица 9×9 разделена на девять квадратов 3×3. Петя и Вася по очереди вписывают в клетки таблицы числа от 1 до 9 по правилам судоку, то есть ни в какой строке, ни в каком столбце и ни в одном из девяти квадратов 3×3 не должно быть написано двух одинаковых чисел. Петя начинает игру; проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

6.4.10. (*Московская устная олимпиада, 2021, 7.6*) Прямоугольная полоска шириной в одну клетку имеет длину более трёх клеток. На каждой из трёх крайних слева клетках стоит фишка. Двое играют в следующую игру. Каждый игрок своим ходом может перенести любую фишку на любую свободную клетку вправо. Ходят по очереди, проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

6.4.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.6*) На плоскости нарисован 2015-угольник со всеми диагоналями. Дима с Сашей играют в следующую игру. Они поочерёдно стирают либо от 1 до 10 соседних сторон нарисованного многоугольника, либо от 1 до 9 его диагоналей. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Первым ходит Дима. Кто из играющих может обеспечить себе победу при любой игре соперника? Как он сможет это сделать?

6.4.12. (*Открытая олимпиада, 2017, 7.7*) У Алисы и Боба есть три равных отрезка. Сначала Алиса ломает один из отрезков на две неравные части. Затем Боб ломает другой из исходных отрезков на две любые части. В результате получается пять отрезков, из которых десятью способами можно выбрать три отрезка. Алиса выигрывает, если хотя бы 4 из этих десяти способов дают тройки отрезков, образующие треугольник. В противном случае выигрывает Боб. Кто выигрывает при правильной игре обоих соперников?

6.4.13. (*Турнир Архимеда, 2021.7*) **Кощей Бессмертный** (КБ) играет в игру. В начале игры он в каждой клетке таблицы 100×100 записывает по одному натуральному числу от 1 до 100^2, так, что все числа в таблице в начале игры — различны. Затем включается искусственный интеллект (ИИ). На первом шаге ИИ одновременно заменяет каждое число в таблице на наибольшее из соседних чисел (соседние — те, которые расположены в клетках с общей стороной). На втором шаге ИИ снова заменяет каждое число в таблице на наибольшее из соседних чисел, и так далее.

а) Может ли КБ расставить числа в начале игры так, чтобы через некоторое время все числа в таблице стали одинаковыми?

б) Какое наибольшее количество различных чисел может остаться в таблице через 10000 ходов?

в) Какое наименьшее число может остаться в таблице через 10000 ходов?

6.4.14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 7–8.6, 9.5*) Алиса и Боря по очереди зачёркивают буквы в надписи «Покори Воробьевы горы». За ход разрешается зачеркнуть одну букву или несколько одинаковых букв (большие и маленькие буквы не различаются). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Алиса ходит первой. Есть ли у одного из игроков стратегия, гарантированно позволяющая выиграть?

6.4.15. (*«Ломоносов», 2020, 7–8.7, 9.8, 10.8*) Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа 0, 1, 2, ..., 7, 8, 7, 6, ..., 2, 1. За столом сидят 16 игроеов, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 13 вращений стола игрок номер 5 набрал в сумме 72 очка, а игрок номер 9 набрал в сумме 84 очка. Сколько очков набрал игрок номер 1?

6.5 Турниры

Дополнительные задачи — в листке Турниры.

6.5.1. (*«Росатом», 2019, 7.3*) Несколько московских дворов договорились участвовать в турнире по футболу по следующим правилам: каждый с каждым играет мини турнир, состоящий из пяти матчей. После окончания соревнований оказалось, что всего было сыграно 180 игр. Сколько дворов участвовало в турнире?

6.5.2. (*«Росатом», 2022, 7.3*) За победу в партии на шахматном турнире участник получает одно очко, за ничью — половину очка, за поражение 0 очков. Петя сыграл на турнире 24 партии и набрал $16\frac{1}{2}$ очков. На сколько партий он выиграл больше, чем проиграл?

6.5.3. (*Московская устная олимпиада, 2023, 6.3, 7.3*) В турнире участвовали десять шахматистов. Каждый сыграл с каждым два раза: один раз белыми и один раз чёрными, причём какую-то из этих партий он выиграл, а другую проиграл (ничьих не было). Могло ли оказаться так, что половину всех партий выиграли белые, а половину — чёрные?

6.5.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.4*) По вновь придуманным правилам в каждом математическом бою участвуют одновременно 3 команды. Организаторы хотят провести турнир из нескольких (более одного) боёв так, чтобы каждые две команды встречались между собой ровно один раз. Какое наименьшее число команд нужно для этого пригласить?

6.5.5. (*«Бельчонок», 2021, 7.5*) В турнире первокурсников по футболу участвовало 4 команды A, B, C, D. Каждая команда сыграла со всеми остальными по одному разу. Места, занятые командами, распределились в следующем порядке: A, B, C, D. При этом количества очков у команд, занявших соседние места, отличаются ровно на 1. Сколько очков набрала каждая из команд? Приведите пример такого турнира. В футболе за победу команде начисляется 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.

6.5.6. (*Всеросс., 2022, МЭ, 7.8*) В шахматном турнире участвовали 30 шахматистов, каждый сыграл с каждым ровно один раз. За победу давалось 1 очко, за ничью — 1/2, а за поражение — 0. У какого наибольшего числа шахматистов по окончании турнира могло оказаться ровно 5 очков?

6.5.7. (*Олимпиада КФУ, 2022, 7.5*) Восемь шахматистов играют однокруговой турнир (всего играется семь туров, в каждом туре шахматисты разбиваются на четыре пары и в каждой паре играют друг с другом. В итоге каждый играет с каждым ровно по одному разу). За победу дается 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражение — 0 очков. Через какое наименьшее количество туров может оказаться так, что единоличный победитель турнира уже выявился досрочно? Обоснуйте свой ответ.

6.5.8. (*Открытая олимпиада, 2015, 7.7*) В турнире по волейболу участвуют 30 команд. Каждое утро организатор составляет расписание матчей на сегодня. Согласно этому расписанию, команды разбиваются на пары и играют по одному матчу. Каждый матч заканчивается победой одной из команд, ничьих не бывает.

Докажите, что как бы организатор ни составлял расписание, команды могут играть между собой так, что никогда не появится команда, проигравшая пять матчей подряд.

Глава 7

Рассуждения и методы

7.1 Логика

Дополнительные задачи — в листке Логика.

7.1.1. (*«Надежда энергетики», 2020, 7.1*) Если на педсовете Марья Ивановна сидит ВКонтакте, то Иван Ильич и Александра Варфоломеевна тоже сидят ВКонтакте. Этот факт директор знает давно. Также ему известно следующее. Только один из двух — Александра Варфоломеевна или Петр Петрович — сидит ВКонтакте. Хотя бы один из двух других — Ивана Ильича и Марьи Ивановны — сидит ВКонтакте. Также известно, что Петр Петрович и Иван Ильич либо оба сидят, либо оба не сидят ВКонтакте. Пользуясь только этими четырьмя верными утверждениями, директор без труда определяет, кто на педсовете сидит ВКонтакте. Сможете ли Вы? Не забудьте обосновать однозначность ответа.

7.1.2. (*Матпраздник в Матвертикали, 2023, 7.1*) Дети посетили дельфинарий. Катя запомнила, что там было ровно 7 то ли выдр, то ли тюленей; Юра — что там было ровно 6 то ли морских котиков, то ли тюленей; Игорь — что там было ровно 5 то ли выдр, то ли морских котиков; Серёжа — что меньше всего там было то ли тюленей, то ли выдр. Никто из них не ошибся. Сколько выдр, тюленей и морских котиков было в дельфинарии?

7.1.3. (*«Курчатов», 2020, 6.2, 7.1*) Поезд состоит из 20 вагонов, которые пронумерованы от 1 до 20, начиная от начала поезда. Некоторые вагоны являются почтовыми. Известно, что

- всего почтовых вагонов — чётное число;
- номер ближайшего к началу поезда почтового вагона равен общему количеству почтовых вагонов;
- номер последнего почтового вагона в четыре раза больше количества почтовых вагонов;
- любой почтовый вагон сцеплен хотя бы с одним другим почтовым вагоном.

Найдите номера всех почтовых вагонов в поезде.

7.1.4. (*«Высшая проба», 2021, 7.1*) В трёх коробках лежат шарики. В первой — красные, во второй — белые, в третьей лежат шарики и красного, и белого цвета. На каждой коробке сделана надпись «красные», «белые», «смешанные», но известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Семиклассник Сергей хочет узнать, где какие шарики. Для этого он может распечатать ровно одну коробку и вынуть оттуда ровно один шарик. Сможет ли он добиться своей цели?

7.1.5. (*Всеросс., 2021, МЭ, 7.3*) В шляпе лежат три карточки: синяя, зелёная, красная. Пете, Васе и Толе дали по одной из них и попросили назвать цвета. Петя сказал «синяя», Вася — «синяя», Толя — «зелёная». После этого карточки опять скинули в шляпу и раздали заново. Теперь Петя сказал «синяя», Вася — «зелёная», Толя — «зелёная». Оказалось, что каждому мальчику доставались карточки разных цветов, и каждый раз ровно один ребёнок обманывал. Определите, какую карточку не видел Петя, какую — Вася и какую — Толя.

7.1.6. (*Открытая олимпиада, 2023, 7.2*) Есть три близнеца: Петя, Вася и Саша. Петя говорит правду только в понедельник и пятницу, Вася — только во вторник и в воскресенье, а Саша — только в среду и субботу. Однажды все трое сказали: «Сегодня суббота». Какой на самом деле день недели?

7.1.7. (*Открытая олимпиада, 2022, 7.2*) Лиса Алиса загадала двузначное число, и сообщила Буратино, что это число делится на 2, 3, 4, 5 и 6. Однако Буратино узнал, что из этих пяти утверждений ровно два на самом деле неверны. Какие числа могла загадать лиса Алиса? В ответе укажите количество возможных вариантов.

7.1.8. (*Всесиб., 2015, 7.2*) Оля, Олег, Поля и Паша участвовали в соревновании и заняли первый 4 места, после соревнования Поля сразу же ушла, а остальные сделали по 2 заявления, причем правду сказал только один ребенок, а остальные оба раза соврали. Каждый сказал, что первое место занял он. Кроме этого, Оля сказала, что все нечетные места заняли мальчики; Олег, что они с Олей заняли два соседних места; Паша, что все нечетные места заняли люди, чьи имена начинаются на О. Определите, кто какое место занял.

7.1.9. (*Математический праздник, 2022, 6.3, 7.3*) Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами A, B, C, D, E, F, G, H, I, J в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы нескольких различных букв. Например, если спросить «$A + B =$?», то в случае, когда $A = 9$, $B = 1$, $C = 0$, ответом будет «$A + B = BC$». Как можно за пять таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют?

7.1.10. (*Всесиб., 2021, 7.3*) В некотором городе есть улица в форме правильного шестиугольника, в каждой из вершин которого живёт человек. Любой житель этой улицы является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Каждый из них знает своих соседей и имена остальных (но не знает, где они живут), однако, никто ни про кого не знает, рыцарь он или лжец. Однажды Лёшка, живущий в одной из вершин, решил узнать, кто живёт в противоположном от него доме. Он может отправить письмо на имя любого человека и спросить: «Верно ли, что ты соседствуешь с тем-то?», на что получит ответ «Да» или «Нет». После этого он может отправить следующее письмо, возможно, другому человеку с вопросом про другого, и т. д. Как Лёшка может осуществить задуманное, если он собирается отправить не более четырёх писем?

7.1.11. (*«Надежда энергетики», 2022, 7.4*) Охотник Пулька для своей собаки Бульки заказал на АлиЭкспресс три куля собачьего корма. Наутро после доставки один куль оказался съеден. Под подозрение попали Торопыжка, Пончик и Сиропчик. Незнайке удалось установить следующее.

- Если Торопыжка не ел корм, то Пончик тоже не ел, а Сиропчик ел.
- Если Пончик ел, то Сиропчик тоже ел, а Торопыжка нет.
- Если Сиропчик ел, то Пончик тоже ел, а Торопыжка нет.

Помогите Незнайке выяснить, кто же съел за ночь целый куль собачьего корма (либо покажите, что информации для этого недостаточно).

7.1.12. (*«Надежда энергетики», 2023, 7.5*) Аксинья, Дарина, Милана, Ратибор и Ярополк — цирковые дрессировщики. Их возраст — 18, 19, 20, 22, 25 лет. Их подопечные — лисица, попугай, тигр, морж и коза. Номера дрессировщиков называются «Восточная сказка», «Вокруг света», «Прыжок над бездной», «Весенняя мелодия», «Загадка сфинкса». Репетируют со своими питомцами они в разное время: 9:00, 10:00, 11:00, 12:00, 14:00. Определите возраст, питомца, название номера и время репетиции каждого из дрессировщиков, если известно следующее.

- Лиса Ратибора репетирует раньше питомца Ярополка, но позже козы, которая работает не с Дариной.
- У 19-летнего дрессировщика морж в «Весенней мелодии» репетирует позже, чем питомец Аксиньи.
- Репетиция номера «Вокруг света», начинающаяся позже 10:00, проходит не с лисицей. Артист цирка в этом номере младше дрессировщика из «Восточной сказки», но старше Ярополка.
- Подопечный Аксиньи выступает позже тигра, но раньше животного из номера «Загадка сфинкса».
- Милана, питомец которой не коза и которая не участвует в номере «Прыжок над бездной», младше Ратибора.
- Тигр, дрессирует которого не Дарина, начинает репетировать в четный час.

7.1.13. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 6.6, 7.5*) На одной конференции встретились известный ученый Франсуа и трое его не менее известных друзей: Карл, Рене и Леонард.

Франсуа, помимо своих научных достижений, известен ещё и тем, что является отцом нескольких детей, которые все родились в разные годы, но все в одну и ту же дату. Друзья поинтересовались, сколько лет каждому из детей, на что Франсуа дал им задачку. «Произведение возрастов моих детей, — сказал он, — как раз равно сумме дня и месяца их рождения. Сейчас я сообщу Карлу количество моих детей, Рене — месяц рождения, а Леонарду — день рождения, и попробуйте угадать, сколько им лет». После этого он шепнул на ухо друзьям указанную информацию.

Немного подумав, Карл воскликнул, что он точно знает возраст двоих детей Франсуа. «Ну тогда мы все понимаем, сколько детей, и сколько лет двум из них. Но я всё ещё не могу понять возраст остальных», — ответил Леонард. Рене тут же заметил: «А вот мне известен возраст всех детей, кроме самого старшего». После этого Леонард заключил, что теперь ему и, следовательно, всем троим точно известны возрасты всех детей. Сколько же у Франсуа детей и сколько лет каждому из них?

7.1.14. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 6.6, 7.6, 8.5*) На слёт «Plants VS Zombies» приехали несколько растений и зомби (всего не больше 20 существ), причём оказалось, что все существа разного роста. Растения всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Зомби же, наоборот, врут более низким существам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я растение». Если какое-то существо не могло так сказать, то оно хлопало в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько существ приехало на слёт, и расставьте их по росту.

7.2 Рыцари и лжецы

Дополнительные задачи — в листке Логика.

7.2.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 5–6.1, 7–8.1*) На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Однажды они собирали бананы и кокосы. Оказалось, что количество собранных бананов и количество собранных кокосов у всех разное. Каждый житель острова высказал два утверждения:

1. «Нет шести жителей, которые собрали бананов больше, чем я»,
2. «Хотя бы у семи жителей больше кокосов, чем у меня».

Могло ли это быть и, если да, сколько и каких жителей могло быть на острове? Укажите все возможные ответы.

7.2.2. (*Олимпиада КФУ, 2022, 7.1*) На острове рыцарей и лжецов живет 2022 человека, каждый из которых является либо рыцарем (который всегда говорит правду), либо лжецом (который всегда лжет). Однажды каждый из них сказал: «Среди остальных 2021 жителя острова есть по меньшей мере один лжец». Сколько рыцарей живет на острове? Обоснуйте свой ответ.

7.2.3. (*Всесиб., 2018, 7.1*) На некотором острове живёт 2018 человек, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Известно, что каждый человек дружит ровно с двумя другими. Однажды каждый из островитян заявил, что дружит ровно с одним лжецом. Обязательно ли все островитяне лжецы?

7.2.4. (*«Курчатов», 2022, 6.2, 7.2*) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды за круглый стол сели 30 жителей этого острова. Каждый из них сказал какую-то из двух фраз: «мой сосед слева — лжец» или «мой сосед справа — лжец». Какое наименьшее количество рыцарей может быть за столом?

7.2.5. (*«Курчатов», 2023, 6.3, 7.2*) На кастинг для кинофильма пригласили 10 пар близнецов. Известно, что в каждой паре близнецов один всегда говорит правду, а другой всегда лжёт. Все 20 человек расселись за круглым столом. У каждого спросили: «Правда ли, что ваш близнец сидит рядом с вами?» Десять человек ответили «Да». Сколько ответов «<Да» могли дать оставшиеся десять человек? (У каждого человека есть только один близнец среди присутствующих.)

7.2.6. (*Всесиб., 2023, 7.2*) На некотором острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Как-то раз 99 жителей этого острова встали в круг, и каждый из них сказал: «Все десять человек, следующие за мной по часовой стрелке, являются лжецами». Сколько среди вставших в круг могло быть рыцарей?

7.2.7. (*Открытая олимпиада, 2019, 7.2*) Рыцари и лжецы сыграли в «испорченный телефон» по следующим правилам: первый в цепочке называет какое-то число на ушко второму, второй — третьему и так далее. Последний в цепочке озвучивает число вслух. При этом рыцарь называет то же самое число, которое ему сказали, а лжец добавляет или вычитает единицу.

Первый человек (лжец) назвал своему соседу число 7. Последний человек озвучил число 3.

После этого участники сыграли в эту игру ещё раз, однако сооообщали друг другу числа по цепочке в обратную сторону. Последний человек назвал своему соседу число 5, а первый в конце игры озвучил число 2.

Кем был последний человек в цепочке?

7.2.8. (*Открытая олимпиада, 2017, 7.2*) В классе собрались 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, всегда сообщающий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждого из них попросили назвать сначала число рыцарей в комнате, затем число лжецов. Оказалось, что каждое число от 0 до 9 названо ровно по два раза. Сколько могло быть в классе рыцарей? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

7.2.9. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 7.3*) На острове, где живут рыцари и лжецы, несколько (больше двух) человек, собрались за круглым столом. Известно, что за столом были и рыцари и лжецы, и каждый сказал такую фразу: «Только один из двух моих соседей рыцарь». Кого за столом больше: рыцарей или лжецов, и во сколько раз? (Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут; и все знают, кто есть кто).

7.2.10. (*Открытая олимпиада, 2021, 7.3*) В ряд стоят 30 человек, каждый из них — либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Их пронумеровали слева направо, после чего каждый человек с нечётным номером сказал: «Все люди с большими, чем у меня, номерами — лжецы», а каждый человек с чётным номером произнёс: «Все люди с меньшими, чем у меня, номерами — лжецы».

Сколько могло быть лжецов? Если правильных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

7.2.11. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 7.6*) В классе учатся 25 школьников, каждый из которых либо отличник, либо хулиган. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут.

Однажды 5 учеников этого класса сказали: «Если я перейду в другой класс, то среди оставшихся учеников будет больше половины хулиганов».

Каждый из оставшихся 20 сказал: «Если я перейду в другой класс, то среди оставшихся учеников хулиганов будет в три раза больше, чем отличников».

Сколько отличников учится в классе? Укажите все возможные варианты.

7.2.12. (*Всеросс., 2023, МЭ, 7.5*) В лесу живут эльфы и гномы. Однажды 60 жителей этого леса встали в ряд лицом в одну сторону, в этот момент некоторые из них могли быть в колпаках. (Эльфов могло быть от 0 до 60 включительно, жителей в колпаках тоже могло быть от 0 до 60 включительно.)

Каждый из 60 жителей сказал одну из следующих фраз:

- «Мой сосед справа — эльф».

- «Мой сосед справа — в колпаке».

Известно, что эльфы без колпаков всегда говорят правду, а эльфы в колпаках всегда лгут. У гномов всё наоборот: гномы без колпаков всегда лгут, а гномы в колпаках всегда говорят правду.

1. Какое наибольшее количество эльфов без колпаков могло быть в ряду?
2. Какое наибольшее количество эльфов в колпаках могло быть в ряду?

7.2.13. (*Всеросс., 2022, МЭ, 7.5*) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 35 жителей острова расселись за 7 столов, по 5 человек за каждым. Каждого из этих 35 жителей спросили: «Столов, за которыми сидят хотя бы 3 рыцаря, больше трёх?»

1. Какое наибольшее число жителей могли ответить «Да»?
2. Какое наибольшее число жителей могли ответить «Нет»?

7.2.14. (*Открытая олимпиада, 2016, 7.4*) На Острове Невезения живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды в комнате собралось n островитян.

Первый из них сказал: «В точности каждый первый из присутствующих в этой комнате — лжец».

Второй сказал: «В точности каждый второй из присутствующих в этой комнате — лжец».

...

Человек с номером n сказал: «В точности каждый n-й из присутствующих в этой комнате — лжец».

Сколько человек могло быть в комнате?

7.2.15. (*Всесиб., 2022, 7.4*) На некотором острове живёт 100 человек, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Однажды все жители этого острова выстроились в ряд, и первый из них сказал: «Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 1». Затем второй сказал: «Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 2», и так далее до сотого, который сказал: «Количество рыцарей на этом острове является делителем числа 100». Определите, сколько рыцарей может проживать на этом острове. *(Найдите все ответы и докажите, что других нет.)*

7.2.16. (*«Высшая проба», 2023, 7.4*) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 100 жителей этого острова выстроились в ряд, и каждый из них сказал одну из следующих фраз:

- «Слева от меня лжецов столько же, сколько и рыцарей.»
- «Слева от меня лжецов на 1 больше, чем рыцарей.»
- «Слева от меня лжецов на 2 больше, чем рыцарей.»
- ...
- «Слева от меня лжецов на 99 больше, чем рыцарей.»

Известно, что каждую фразу сказал ровно один человек. Какое наименьшее количество лжецов может быть среди этих 100 жителей?

7.2.17. (*Турнир Архимеда, 2021.6*) **За круглым столом** сидели 13 гостей. Среди них были рыцари (всегда говорят правду), лжецы (всегда лгут) и марсиане. Про марсиан известно, что правду они говорят только марсианам, а всем остальным лгут. Каждые двое сидящих рядом сказали друг другу: «Ты не рыцарь». Сколько лжецов могло сидеть за столом, если известно, что их было больше, чем марсиан? Найдите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

7.2.18. (*Турнир Архимеда, 2022.2.2*) **В замке** живут Рыцари и Лжецы. Рыцари всегда говорят правду, Лжецы всегда лгут. Известно, что все жители разного возраста и количество золотых монет у всех разное. Каждый житель замка высказал два утверждения: 1) «Нет трёх жителей старше меня», 2) «Хотя бы у пяти жителей больше золотых монет, чем у меня». Могло ли это быть? Если да, сколько жителей могло быть в замке (укажите все ответы)?

7.2.19. (*Открытая олимпиада, 2018, 7.5*) В комнате собрались рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут (и те, и другие точно есть). Им задали вопрос: «Сколько лжецов находится в комнате?». На этот вопрос были получены все возможные ответы от 1 до 100 (некоторые, возможно, несколько раз). Сколько на самом деле могло быть лжецов?

7.2.20. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 7.6*) В Тридевятом царстве 17 островов, на каждом из которых живут 119 человек. Жители царства делятся на две касты: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Во время переписи населения каждого человека сперва спросили: «Не считая вас, на вашем острове живёт поровну рыцарей и лжецов?». Оказалось, что на 7 островах все ответили «Да», а на остальных все ответили «Нет». Затем каждого человека спросили: «Правда ли, что, считая вас, людей вашей касты меньше половины жителей острова?». На этот раз на каких-то 7 островах все ответили «Нет», а на остальных все ответили «Да». Сколько лжецов в царстве?

7.2.21. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 7.6*) Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат 8×8 клеток. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:

- нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
- нельзя проводить две диагонали с общим концом.

Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машином рисунке?

7.2.22. (*Открытая олимпиада, 2020, 7.7*) Жители племени мумба всегда говорят правду, а жители племени юмба всегда лгут. Некоторое количество членов этих племён расставили на клетчатой площади 10×10 (в каждой клетке обязательно стоит ровно один человек). Соседями будем называть людей, стоящих на клетках, имеющих общую сторону или угол.

Каждый из людей, стоящих на клетках площади, сказал, что среди его соседей нет его соплеменников. Какое наибольшее количество членов племени мумба могло быть на площади?

7.3 Оценка плюс пример

Дополнительные задачи — в листке Оценка плюс пример.

7.3.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 5.2, 6.1, 7.1*) Если из прямоугольника на клетчатой бумаге вырезали (тоже по клеткам) прямоугольник, один (и только один) из углов которого совпадает с каким-то из углов исходного, то фигуру, оставшуюся после такого вырезания, будем называть Г-образной. Квадрат какого наименьшего размера можно разрезать на Г-образные фигуры?

7.3.2. (*«Надежда энергетики», 2018, 7.1*) Автопарк некоторого предприятия состоит из 5 различных машин. Подготовка одного водителя для работы на конкретном типе машины обходится в 10 000 рублей. Директор автопарка хочет обучить 8 водителей таким образом, что при отсутствии любых 3 водителей все машины можно бы было использовать в работе. Как организовать обучение с наименьшими затратами? Какова минимальная достаточная для обучения сумма?

7.3.3. (*«Росатом», 2022, 7.1*) В классе 30 учеников. У одного из них есть 15 красных карандашей, 20 — синих, 25 — зеленых и 40 — черных. Этот ученик решил подарить каждому своему однокласснику по одному набору из трех карандашей разных цветов. Сможет ли он осуществить задуманное? Какое максимальное число таких наборов он сможет собрать?

7.3.4. (*«Надежда энергетики», 2016, 7.2*) Треугольник разрезали на два треугольника. Найдите наибольшее значение N такое, что среди 6 углов этих двух треугольников ровно N одинаковых.

7.3.5. (*Московская устная олимпиада, 2022, 6.2, 7.2*) Клетчатый квадрат разбит по клеткам на несколько прямоугольников. Не все прямоугольники равны друг другу, но все имеют равный периметр. Найдите наименьший возможный размер квадрата.

7.3.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 7.2*) На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если первый прямоугольник содержит 2015 клеток, а второй — 2016.

7.3.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 7.2*) Катя решила сосчитать сумму кубов всех натуральных делителей некого натурального числа, и у неё получился результат $MATH$. Но потом она обнаружила, что забыла один из делителей. Прибавив его куб, она получила верный результат — $MASS$. Найдите наименьшее возможное значение числа $MATH$. ($MATH$ и $MASS$ — четырёхзначные числа, в которых каждая цифра заменена буквой, причём одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные — разными.)

7.3.8. (*Открытая олимпиада, 2020, 7.2*) В подарок на Восьмое марта Вася и Петя заказали пятнадцати одноклассницам воздушные шарики. Каждая девочка должна зайти в класс и выбрать себе три шарика, причём девочка будет довольна, только если её шарики все либо одного цвета, либо все разных цветов. Вася и Петя знают, что в магазине есть шарики трёх цветов, но выбрать конкретные цвета при заказе нельзя. Какое наименьшее количество шариков нужно заказать ребятам, чтобы все девочки остались довольны?

7.3.9. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 7.3*) Дан клетчатый прямоугольник 7×14 (клеток). Какое наибольшее количество трехклеточных уголков можно вырезать из этого прямоугольника?

7.3.10. (*Всесиб., 2019, 7.3*) В городе модников живут 15 человек, каждый из которых носит по одной серёжке в каждом ухе. Всего у них 10 медных серёжек, 10 серебряных и 10 золотых. Однажды все жители встали в круг, и оказалось, что любые два соседа не носят серёжек из одного материала. Какое максимальное количество человек в этом городе может носить две серёжки из разных металлов?

7.3.11. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 7.7*) Все 25 учеников 7 «А» класса участвовали в викторине из трёх туров. В каждом туре каждый участник набрал некоторое количество очков. Известно, что в каждом туре, а также по сумме всех трёх туров все участники набрали различное количество очков.

Ученик 7 «А» Коля в первом туре викторины оказался третьим, во втором — четвёртым, а в третьем — пятым. Какое самое низкое место мог занять Коля среди всех одноклассников по сумме очков за все три тура викторины?

7.3.12. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 7.7*) В выборах на должность президента класса соревновались Петя и Вася. В течение трёх часов 27 учеников класса голосовали за одного из двух кандидатов. За первые два часа за Петю было отдано на 9 голосов больше, чем за Васю. А за последние два часа за Васю было отдано на 9 голосов больше, чем за Петю. В итоге Петя победил. С преимуществом в какое наибольшее количество голосов он мог победить?

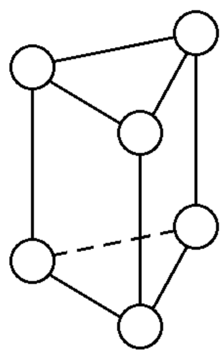
7.3.13. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 7.8*) У Карлсона и Малыша есть несколько банок варенья, каждая весит целое число фунтов. Суммарный вес всех банок варенья Карлсона в 13 раз больше суммарного веса всех банок Малыша. Карлсон отдал Малышу банку с наименьшим весом (из тех, что были у него), после чего суммарный вес его банок оказался в 8 раз больше суммарного веса банок Малыша.

Какое наибольшее количество банок варенья могло изначально быть у Карлсона?

7.3.14. (*«Бельчонок», 2020, 7.3*) Пончики упакованы по 5, 9, 16 штук. Какое наибольшее число пончиков до 75 нельзя купить, не вскрывая упаковок? Упаковок каждого вида достаточно.

7.3.15. (*Открытая олимпиада, 2020, 7.3*) Найдите наибольшее четырёхзначное число, состоящее из различных цифр, которое делится на каждую из своих цифр.

7.3.16. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 7.3*) В каждой вершине треугольной призмы (см. рис.) написали по двузначному числу, причём оказалось, что две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда у чисел есть в записи одинаковая цифра. Какое минимальное значение может принимать самое большое из чисел? (Запись двузначного числа не может начинаться с нуля.)



7.3.17. (*«Бельчонок», 2022, 7.3*) На детский праздник приготовили пирожные: 10 эклеров, 20 корзиночек, 30 шоколадных брауни, 40 трубочек. Какое наибольшее число детей сможет взять три разных пирожных?

7.3.18. (*«Курчатов», 2021, 7.4*) На доске написано N натуральных чисел, где $N > 5$. Известно, что сумма всех чисел равна 80, а сумма любых пяти из них не больше 19. Какое наименьшее значение может принимать N?

7.3.19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.6, 7–8.4, 9.2*) В городе 10 проспектов и 23 улицы, которые образуют прямоугольную сетку: все улицы параллельны между собой и все проспекты перпендикулярны улицам (см. рис.). Точку пересечения улицы и проспекта будем называть «перекрёстком». Городские власти проводят дорожные работы на некоторых участках дороги (отрезок улицы или проспекта между соседними перекрёстками). Во время ремонта ездить по этому участку нельзя. Какое наибольшее количество участков можно ремонтировать одновременно, чтобы при этом из любого перекрестка можно было проехать на любой другой?

7.3.20. (*Всесиб., 2023, 7.4*) Вере Александровне срочно понадобилось вырезать три двадцатиугольника (не обязательно одинаковых) из одного прямоугольного листа бумаги. Она может взять этот лист и разрезать его по прямой на две части. После этого взять одну из полученных частей и разрезать по прямой уже её. Затем взять какой-то из имеющихся кусков, разрезать его, и так далее. Какое наименьшее количество разрезов придётся сделать Вере Александровне, чтобы среди полученных частей оказались нужные ей три двадцатиугольника?

7.3.21. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 7.5*) Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого прямоугольника размера:

а) 5×10 клеток;

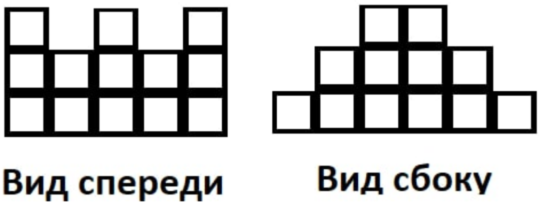
б) 5×9 клеток?

7.3.22. (*«Бельчонок», 2018, 7.5*) Вася записал на доске числа $1, 2, 3, \ldots, 2018$. Из этих чисел он за один ход выбирает любые два a и b и записывает вместо них число $|a - b|$. Какое наибольшее число может остаться на доске после 2017-го хода?

7.3.23. (*«Росатом», 2022, 7.5*) В городе 8 площадей, каждая из которых соединена улицами ровно с тремя площадями. Если улицы пересекаются вне площадей, то на их пересечении должен быть установлен светофор. Нарисуйте возможный при этих условиях план-схему городских улиц и площадей, в котором можно обойтись без светофоров. Какое наименьшее число улиц может быть в таком городе?

7.3.24. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 7.5, 8.4*) На шахматной доске отметили центры некоторых клеток так, что никакой из треугольников с отмеченными вершинами не является прямоугольным. Какое наибольшее число точек могло быть отмечено?

7.3.25. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2022, 5–6.5, 7–8.5, 9.4*) Петя строит замок из кубиков. В какой-то момент он изобразил недостроенный замок в трех проекциях: вид спереди, вид сбоку и вид сверху. Какое наименьшее количество кубиков может быть изображено на виде сверху?



7.3.26. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2021, 5–6.5, 7–8.5, 9.4*) Английский клуб посещают 20 джентльменов. Некоторые из них знакомы (знакомства взаимные, т. е. если A знает B, то и B знает A). Известно, что в клубе нет трех попарно знакомых между собой джентльменов. Однажды джентльмены пришли в клуб, и каждая пара знакомых пожала друг другу руки (один раз). Какое наибольшее число рукопожатий могло быть сделано?

7.3.27. (*Всесиб., 2016, 7.5*) Дано число 1836549, можно брать две соседние ненулевые цифры и менять их местами, после чего вычесть из каждой из них по 1. Какое наименьшее число может получиться после этих операций?

7.3.28. (*Всеросс., 2020, МЭ, 7.6*) В каждой клетке квадрата размером 5×5 клеток провели ровно одну диагональ. Вершина клетки свободна, если она не является концом никакой из проведённых диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество свободных вершин.

7.3.29. (*Открытая олимпиада, 2023, 7.6*) Внутри выпуклого пятиугольника отметили точку O. Пятиугольник разбили на несколько равных треугольников. Для каждого треугольника одна из его вершин — точка O, а остальные вершины находятся на границе пятиугольника. Найдите наибольшее возможное количество треугольников.

7.3.30. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2021, 5–6.7, 7–8.6, 9.5*) Ольга Ивановна, классная руководительница 5Б, ставит «Математический балет». Она хочет расставить мальчиков и девочек так, чтобы на расстоянии 5 м от каждой девочки было ровно 2 мальчика. Какое наибольшее количество девочек сможет участвовать в балете, если известно, что в нем участвуют 5 мальчиков?

7.3.31. (*«Ломоносов», 2022, 7–8.6*) В квадратной комнате на каждой стене есть лампочка, которая может гореть одним из семи цветов радуги. В комнате нет лампочек, которые горели бы одним цветом. За один ход человек может поменять цвет одной из лампочек, на тот, которым не горит ни одна лампочка в комнате на момент совершения хода, при этом он тоже изменит цвета на два оставшихся не использованных цвета. (После этого в комнате по-прежнему нет двух лампочек с одинаковыми цветами.) Какое наименьшее число ходов нужно совершить, чтобы в результате каждая лампочка погорела каждым из семи цветов?

7.3.32. (*Открытая олимпиада, 2020, 7.8*) Пять мальчиков собирали грибы, никакие двое не собрали поровну и каждый собрал меньше 21% от общего числа собранных грибов. Какое наименьшее число грибов могло быть собрано?

7.3.33. (*Открытая олимпиада, 2023, 7.8*) На клетчатой доске 6×8 расставлены шахматные короли так, что любую пустую клетку бьют не менее двух королей. Какое наименьшее количество королей может быть на доске?

7.3.34. (*Открытая олимпиада, 2021, 7.8*) У Васи было 100 отрезков, ни из каких трёх нельзя было составить треугольник. Он сделал себе ещё один отрезок и теперь может составить треугольник несколькими способами. Какое наибольшее количество способов у него может быть?

7.3.35. (*Открытая олимпиада, 2019, 7.8*) Фигура недослон бьёт на одну клетку по диагонали. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга недослонов можно расставить на шахматной доске 7×7?

7.3.36. (*Открытая олимпиада, 2018, 7.8*) Из клетчатого поля 12×12 вырезали квадрат 4×4, лежащий на пересечении горизонталей с третьей по шестую и таких же вертикалей. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расставить на этом поле, если ладьи не бьют через вырезанные клетки?

7.3.37. (*Открытая олимпиада, 2017, 7.8*) Треугольник разбит на 1000 треугольников. В каком наибольшем количестве различных точек могут находиться вершины этих треугольников?

7.3.38. (*Московская устная олимпиада, 2023, 7.9*) На столе лежат 13 карточек рубашками вверх, на трёх из них записана цифра 1, на десяти записана цифра 0. За один вопрос можно узнать произведение чисел на любых трёх карточках. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно найти хотя бы одну карточку, на которой записан 0?

7.3.39. (*Московская устная олимпиада, 2021, 7.9*) Компания из десяти человек провела ряд встреч. На каждой встрече присутствовали пять человек из этих десяти. Никакие два человека не встречались более двух раз. Какое наибольшее количество встреч могло быть?

7.4 От противного

Дополнительные задачи — в листке Доказательство от противного.

7.4.1. (*«Будущие исследователи – будущее науки», 2017, 7.1*) Ученикам 7а класса объявили, что для них будет организован драмкружок, если в него запишется не менее 14 человек. Оказалось, что среди записавшихся более 85% девочек и в списке есть друзья Петя и Дима. Докажите, что кружок будет организован.

7.4.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 7.1*) В кружке по математике собралось 20 человек, среди них есть ровно 49 пар людей, которые знали друг друга до начала занятий. Докажите, что кто-то знал не более 4 участников.

7.4.3. (*Всесиб., 2018, 7.2*) Квадрат со стороной 6 клеточек разрезан по сторонам сетки на 8 прямоугольников. Докажите, что какие-то два из этих прямоугольников равны по площади.

7.4.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 7.3*) На доске записано 100 натуральных чисел (не обязательно различных).

а) Докажите, что если сумма любых трех чисел на доске меньше суммы любых четырех из оставшихся, то сумма любых двух чисел на доске меньше суммы любых трех из оставшихся.

б) Верно ли, что если сумма любых двух чисел на доске меньше суммы любых трех из оставшихся, то сумма любых трех чисел на доске меньше суммы любых четырех из оставшихся?

7.4.5. (*Открытая олимпиада, 2020, 7.4*) Отрезок длины 11 разделили на пять отрезков с натуральными длинами. Докажите, что из каких-то трёх можно составить треугольник.

7.4.6. (*Всесиб., 2020, 7.5*) В кружке занимались 50 школьников, которые иногда ходили на занятия. Оказалось, что любые два школьника встретились на каком-либо занятии ровно один раз. Кроме того, известно, что ни на одно занятие не приходили все школьники одновременно. Докажите, что есть школьник, который был хотя бы на 8 занятиях.

7.5 Разбиения на пары и группы

Дополнительные задачи — в листке Разбиения на пары и группы.

7.5.1. (*Олимпиада КФУ, 2023, 7.2*) Можно ли числа от 1 до 1000 разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе было хотя бы два числа, и при этом в каждой группе сумма *любых двух* чисел делилась на 3?

7.5.2. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 7.5*) В магазине продаются орехи четырёх видов: фундук, миндаль, кешью и фисташки. Степан хочет купить 1 килограмм орехов одного вида и ещё 1 килограмм орехов — другого. Он вычислил, во сколько ему может обойтись такая покупка в зависимости от того, какие два вида орехов он выберет. Пять из шести возможных покупок Степана стоили бы 1900, 2070, 2110, 2330 и 2500 рублей. Сколько рублей составляет стоимость шестой возможной покупки?

7.5.3. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 7.5*) В каждую комнату отеля можно поселить не более 3 человек. Менеджер отеля знает, что скоро приедет группа из 100 футбольных фанатов, которые болеют за три разные команды. В одну комнату можно селить только мужчин или только женщин; также нельзя вместе селить фанатов разных команд. Сколько комнат нужно забронировать, чтобы точно расселить всех фанатов?

7.5.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 7.4*) В отряде космонавтов 20 человек, у каждого не менее 14 друзей в отряде. В космос требуется отправить экипаж, в котором все дружат между собой. Обязательно ли удастся сформировать экипаж из четырех человек?

7.5.5. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 7.7*) Числа от 1 до 200 в произвольном порядке расставили на окружности так, что расстояния между рядом стоящими на окружности числами одинаковы.

Для любого числа верно следующее: если рассмотреть 99 чисел, стоящих от него по часовой стрелке, и 99 чисел, стоящих от него против часовой стрелки, то в обеих группах будет поровну чисел, которые меньше его. Какое число стоит напротив числа 113?

7.5.6. (*«Надежда энергетики», 2021, 7.5*) Для проведения турнира по спортивному программированию приготовили 10 компьютеров двух типов. Их соединили пятью кабелями попарно; при этом оказалось, что ровно половина всех лэптопов соединена с десктопами.

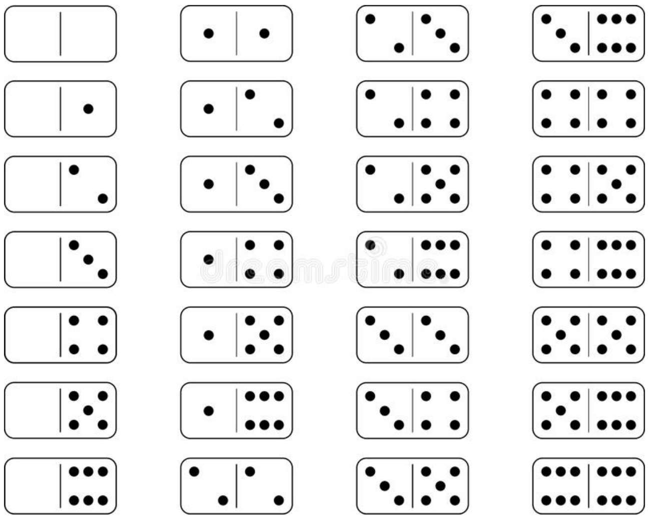
А) Найдите количество компьютеров каждого типа и состав пар.

Б) Можно ли так переподключить кабели, чтобы ровно половина десктопов была связана с лэптопами?

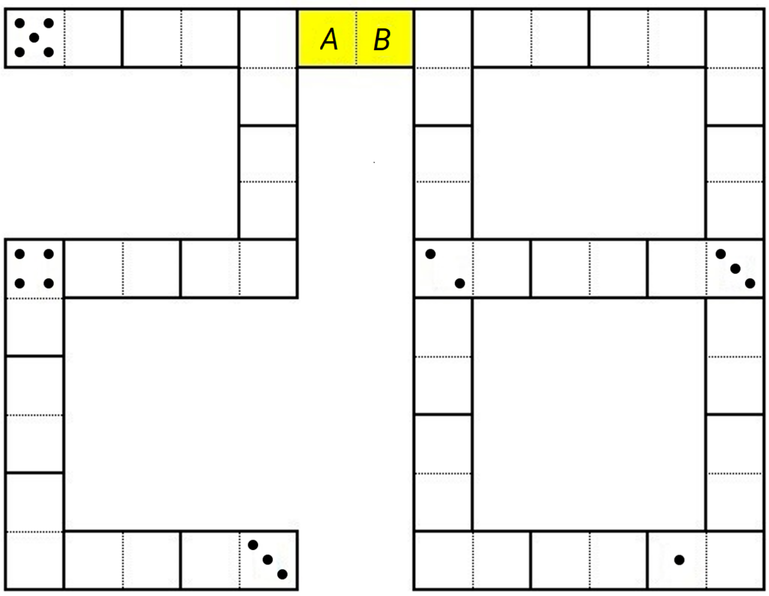
(К каждому компьютеру всегда подключен только один кабель.)

7.5.7. (*«Бельчонок», 2023, 7.5*) Числа от 1 до $2n$ ($n > 1$) разбили на две группы по n чисел. Пусть A — произведение чисел в первой группе, а B — во второй группе. Может ли $|A - B| = 555553$?

7.5.8. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 7.8*) Набор из 28 различных доминошек выглядит так:



Все эти 28 доминошек выложили так, что количество точек на соприкасающихся половинках доминошек одинаково. На некоторых половинках полностью стёрли количество точек. В итоге получилась конструкция, изображённая на рисунке ниже (пустые половинки могли быть изначально пустыми, а могли содержать какое-то количество точек).



Сколько точек на каждой из половинок жёлтой костяшки?

Точек на половинке A: ....

Точек на половинке B: ....

7.5.9. (*Всеросс., 2023, МЭ, 7.7*) На какое наибольшее количество групп можно разбить числа 1, 2, 3, ..., 100 так, чтобы сумма чисел в каждой группе была простым числом? (Каждое число должно войти ровно в одну группу. Каждая группа должна состоять из одного или нескольких чисел.)

7.5.10. (*Математический праздник, 2023, 7.5*) В параллели 7-х классов 100 учеников, некоторые из которых дружат друг с другом. 1 сентября они организовали несколько клубов, каждый из которых основали три ученика (у каждого клуба свои). Дальше каждый день в каждый клуб вступали те ученики, кто дружил хотя бы с тремя членами клуба. К 19 февраля в клубе «Гепарды» состояли все ученики параллели. Могло ли получиться так, что в клубе «Черепахи» в этот же день состояло ровно 50 учеников?

7.5.11. (*«Курчатов», 2023, 7.5*) На десяти карточках написаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 (на каждой карточке по одному числу из перечисленных). Влад хочет произвольно разбить все эти карточки на две непустые группы. Затем он в каждой группе вычислит сумму чисел и из большей суммы вычтет меньшую. Сколько различных значений может принимать такая разность?

7.6 Обратный ход

Дополнительные задачи — в листке Обратный ход.

7.6.1. (*«Надежда энергетики», 2018, 7.2*) Саша, Паша и Аркаша — виртуальные бизнесмены. Саша перевел Паше в точности такое число биткоинов, которое у Паши было. После этого Саша перевел Аркаше точно такое число биткоинов, которое было у Аркаши. Затем Паша перевел и Саше, и Аркаше по такому количеству биткоинов, которое у каждого из них было до этой операции. Наконец, Аркаша перевел и Саше, и Паше по такому числу биткоинов, которое у каждого из них было в результате предыдущих действий. После всех этих выплат у каждого оказалось по 8 биткоинов. Найдите первоначальное количество биткоинов у каждого.

7.7 Принцип крайнего

Дополнительные задачи — в листке Принцип крайнего.

7.7.1. (*Всесиб., 2023, 7.5*) Дома у Антона Павловича живёт 198 котов. Все они имеют разный вес, а также разную скорость. Известно, что в любой группе из 100 котов самый толстый из них является одновременно и самым быстрым из них. Докажите, что можно так выбрать группу из 100 котов, что самый худой из них окажется одновременно и самым медленным из них.

Глава 8

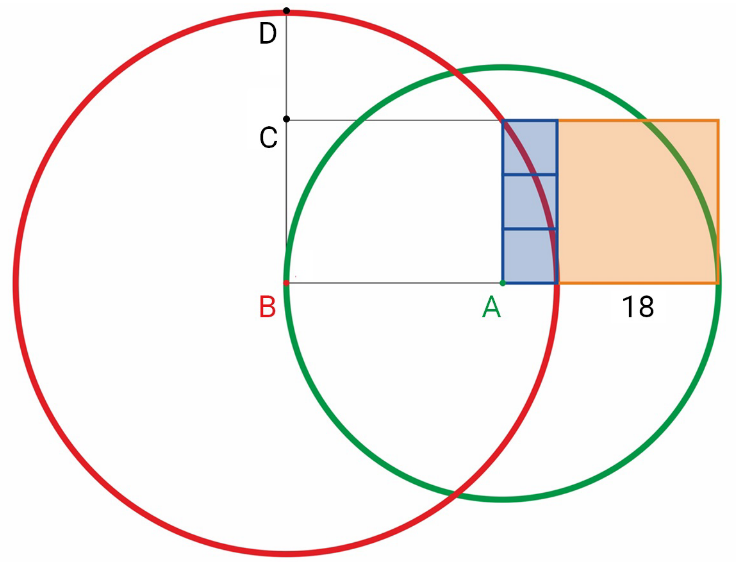
Наглядная геометрия

8.1 Наглядная геометрия на плоскости

Дополнительные задачи — в листке Наглядная геометрия на плоскости.

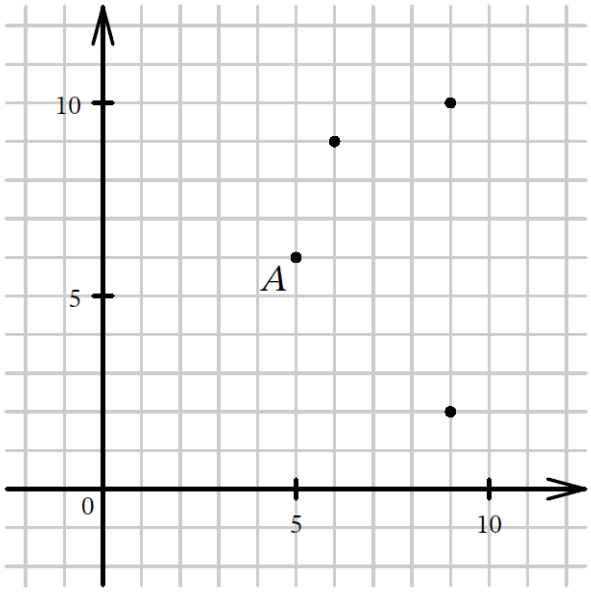
8.1.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 7.4*) На рисунке ниже

- три синие фигуры — квадраты;
- оранжевая фигура — квадрат со стороной 18;
- точка A — центр зелёной окружности;
- точка B — центр красной окружности.



Найдите длину отрезка CD.

8.1.2. (*Всеросс., 2023, МЭ, 7.6*) На плоскости отметили точки A, B, C, D, E так, что треугольники ABC и ADE равны: $AB = AD$, $AC = AE$, $BC = DE$. Затем с чертежа стёрли точку E и подписи точек B, C и D.



Пусть точка E имела координаты $(x; y)$.

1. Укажите любое возможное значение величины xy.
2. Укажите все возможные значения величины xy.

8.1.3. (*Всеросс., 2021, МЭ, 7.8*) На плоскости изображены три прямые и n точек так, что по обе стороны от каждой прямой находится ровно по две точки (точки, лежащие на самой прямой, не относятся ни к одной из сторон). При каких значениях n такое возможно?

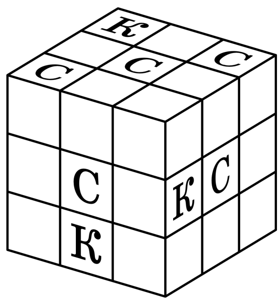
8.1.4. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.7*) Весной 1945 года контрразведчики гестапо с 4 радиостанций, расположенных в вершинах квадрата на территории Берлина, зафиксировали в некоторый момент работу советского радиопередатчика. Штирлиц проявил инициативу и доложил Мюллеру, что расстояния от точек прослушивания до передатчика составили 1, 9, 4 и 5 км. Должен ли Мюллер верить такому сообщению?

8.2 Наглядная геометрия в пространстве

Дополнительные задачи — в листке Наглядная геометрия в пространстве.

8.2.1. (*САММАТ, 2023, 7.5*) Есть куб 7×7, составленный из маленьких кубиков 1×1. У куба три пары противоположных граней. Пронумеруем их: 1, 2, 3. На каждой грани маленьких кубиков написали номер той пары граней куба, которой она принадлежит (см. рис.). Затем куб разобрали и на мелкие кубики. У скольких кубиков сумма цифр на гранях четная (кубики, у которых вообще нет цифр на гранях, не считать)?

8.2.2. (*Матпраздник в Матвертикали, 2023, 7.3*) Ваня сложил куб $3 \times 3 \times 3$ из красных и синих брусков размером $1 \times 1 \times 3$. Затем он начал рисовать то, что у него получилось. Когда пришла Таня, Ваня успел раскрасить лишь 8 из 27 клеток на видимой поверхности нарисованного куба (см. рис.). Посмотрев на рисунок, Таня сказала, что не знает цвет лишь одной из ещё не раскрашенных клеток. Ваня ответил, что эта клетка — красная. Завершите Ванин рисунок (отметьте буквой «С» синие клетки, буквой «К» красные, знаком «?» клетку, цвет которой Таня не могла восстановить).



8.2.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 6.4, 7.3*) Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.

8.2.4. (*Всеросс., 2020, МЭ, 7.5*) У Веры есть 27 кубиков с ребром 1 см: 9 красных и 18 синих. Она сложила из них куб с ребром 3 см. Может ли на поверхности куба количество красных квадратиков со стороной 1 см равняться количеству таких же синих?

8.2.5. (*«Ломоносов», 2023, 7–8.5, 9.4*) На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на центральном квадратике одной из его граней, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

1. При 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал.

2. При 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Завершил жучок свое движение через 2023 с после его начала. Через сколько секунд после начала движения жучок впервые оказался на том квадратике, на котором он в конце остановился?

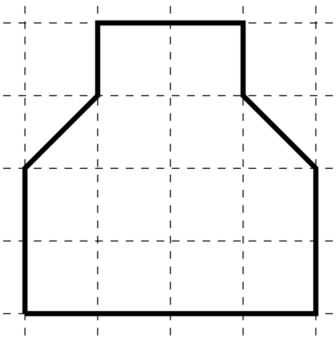
Глава 9

Комбинаторная геометрия

9.1 Разрезания

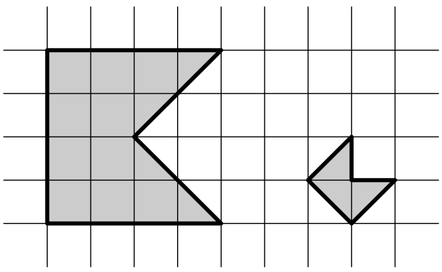
Дополнительные задачи — в листке Разрезания.

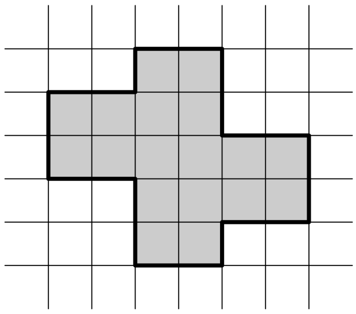
9.1.1. (*Всесиб., 2022, 7.1*) Разрежьте данную фигуру на четыре попарно различных части так, чтобы у всех этих частей был одинаковый периметр. Напомним, что фигуры считаются различными, если их нельзя совместить наложением. *(Достаточно привести один пример.)*



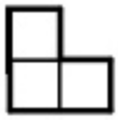
9.1.2. (*Математический праздник, 2021, 7.1*) Будем называть *флажком* пятиугольник, вершины которого — вершины некоторого квадрата и его центр. Разрежьте фигуру ниже справа на флажки (не обязательно одинаковые).

примеры флажков



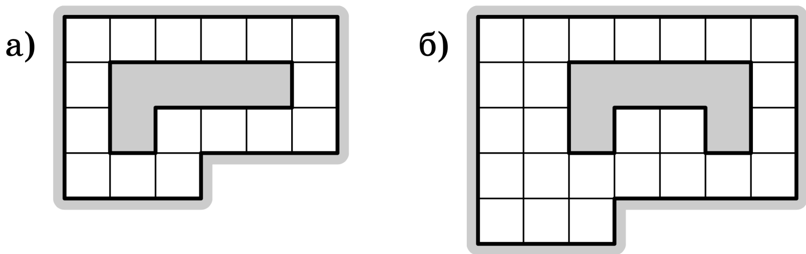


9.1.3. (*Олимпиада КФУ, 2022, 7.2*) Из клетчатого квадрата 6×6 нужно вырезать по линиям сетки квадратик меньшего размера так, чтобы оставшуюся часть можно было разбить на уголки из трех клеток



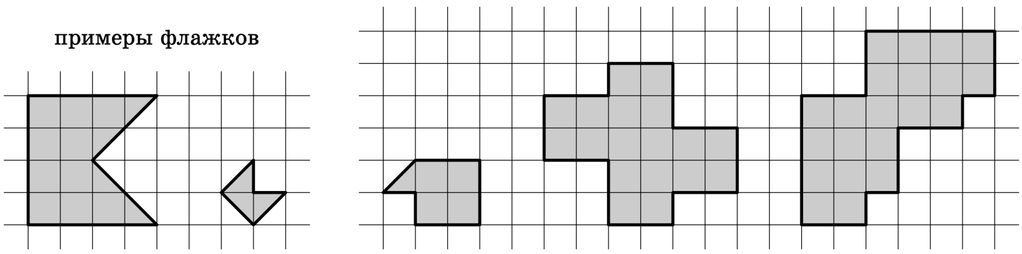
без пропусков и наложений. Уголки можно поворачивать и переворачивать. Чему могут равняться размеры вырезанного квадратика? Укажите все возможные ответы и объясните, почему других нет.

9.1.4. (*Матпраздник в Матвертикали, 2022, 6.2, 7.2*) Дана бумажная клетчатая фигура с дыркой (см. рис.). Покажите, как разрезать эту фигуру на две части таким образом, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат. Части можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.



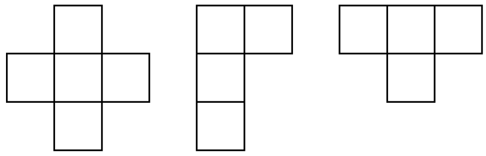
[*2 балла*] **[*2 балла*]**

9.1.5. (*Матпраздник в Матвертикали, 2021, 6.3, 7.3*) Будем называть *флажком* пятиугольник, вершины которого — вершины некоторого квадрата и его центр (слева нарисованы два флажка разных размеров). Покажите, как можно разрезать фигуры справа на флажки (флажки можно использовать любых размеров и в любом количестве).



а) **[*1 балл*]** б) **[*2 балла*]** в) **[*4 балла*]**

9.1.6. (*«Высшая проба», 2022, 7.3*) Можно ли разрезать прямоугольник 6×7 на кресты из пяти клеток, фигурки Г-тетрамино и фигурки Т-тетрамино? Если можно, то сколько пятиклеточных крестов может быть в таком разрезании?



9.1.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 7.5*) а) Можно ли клетчатый квадрат 7×7 с вырезанной центральной клеткой разрезать на доминошки (прямоугольники 2×1) так, чтобы число горизонтальных и вертикальных доминошек было одинаковым?

б) Тот же вопрос для квадрата 7×7 с вырезанной угловой клеткой.

9.1.8. (*Турнир Архимеда, 2021.4*) **Разделите квадрат** на 4 равные части так, чтобы в каждой из них сумма чисел была одинаковой.

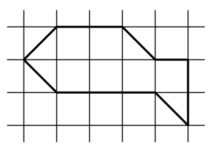
		1	1	1	
		2	2	3	3
	1		2		
				2	
3	3				

9.1.9. (*Всесиб., 2019, 7.4*) Можно ли квадрат со стороной 8 см разрезать на 8 различных многоугольников, у каждого из которых площадь, выраженная в квадратных сантиметрах, в два раза меньше периметра, выраженного в сантиметрах? Многоугольники, получаемые друг из друга поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.

9.1.10. (*Московская устная олимпиада, 2023, 6.5, 7.5*) Некоторые клетки доски размером 7×7 покрашены в чёрный цвет, образуя чёрный многоугольник. Его разрезали по прямой, идущей по линии сетки. Мог ли он распасться на пять равных фигур?

9.1.11. (*Московская устная олимпиада, 2021, 7.5*) Существует ли равносторонний шестиугольник с вершинами в узлах клетчатой решётки, который можно разрезать на равносторонние восьмиугольники, вершины которых также находятся в узлах решетки?

9.1.12. (*«Ломоносов», 2020, 7–8.5*) На клетчатой бумаге изображена фигура (см. рис.). Можно ли разрезать её на 5 треугольников и сложить из них квадрат? Если да, покажите, как это сделать, если нет — докажите, что нельзя.



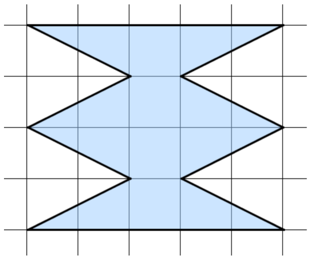
9.2 Геометрия на клетчатой бумаге

Дополнительные задачи — в листке Геометрия на клетчатой бумаге.

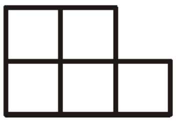
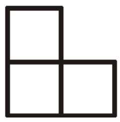
9.2.1. (*Математический праздник, 2021, 6.4, 7.3*) Внутри клетчатого прямоугольника периметра 50 клеток по границам клеток вырезана прямоугольная дырка периметра 32 клетки (дырка не содержит граничных клеток). Если разрезать эту фигуру по всем горизонтальным линиям сетки, получится 20 полосок шириной в 1 клетку. А сколько полосок получится, если вместо этого разрезать ее по всем вертикальным линиям сетки? (Квадратик 1×1 — это тоже полоска!)

9.2.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 7.4, 8.3*) Клетчатый прямоугольник со стороной клетки 1 см и площадью 2021 см^2 двумя перпендикулярными разрезами вдоль линий сетки разрезали на четыре прямоугольные части. Докажите, что хотя бы у одной из частей площадь не менее 528 см^2.

9.2.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.4*) Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке. Площадь каждого квадрата сетки равна 1 см^2.



9.2.4. (*Турнир Архимеда, 2023.2.3*) **План дачного поселка** представляет собой клетчатый квадрат 8×8 (площадь каждой клетки — 1 сотка — квадрат со стороной 10 м), разбитый на участки двух видов:

 и .

Участки разделены заборами. Какой могла быть суммарная длина заборов между участками, если участков размером в 5 соток меньше, чем участков размером в 3 сотки? Укажите все ответы и объясните, почему других нет. Приведите примеры.

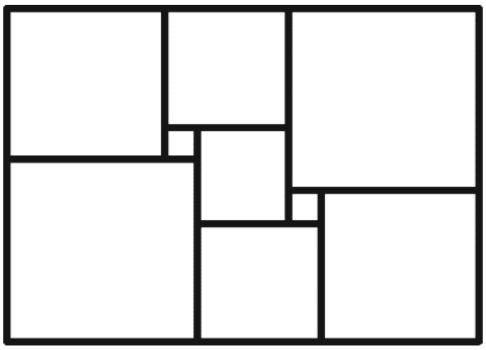
Глава 10

Планиметрия

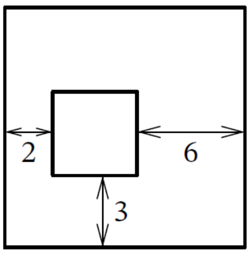
10.1 Прямоугольники и квадраты

Дополнительные задачи — в листке Прямоугольники и квадраты.

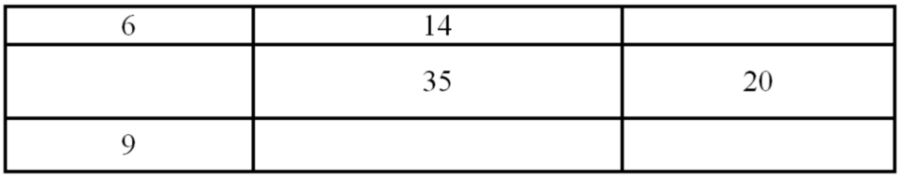
10.1.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 7.5*) Прямоугольник разрезали на девять квадратов, как показано на рисунке. Длины сторон прямоугольника и всех квадратов — целые числа. Какое наименьшее значение может принимать периметр прямоугольника?



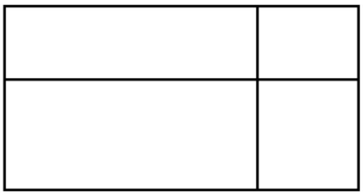
10.1.2. (*Всеросс., 2023, МЭ, 7.1*) Внутри большого квадрата находится маленький квадрат, соответственные стороны этих квадратов параллельны. Расстояния между некоторыми сторонами квадратов отмечены на рисунке. На сколько периметр большого квадрата больше, чем периметр маленького?



10.1.3. (*«Бельчонок», 2020, 7.2*) Прямоугольник разделён на 9 прямоугольных частей, площади некоторых частей указаны. Найдите площадь всего прямоугольника.



10.1.4. (*«Бельчонок», 2020, 7.2*) На рисунке 9 прямоугольников, сумма их площадей равна 740. Найдите площадь самого большого прямоугольника.

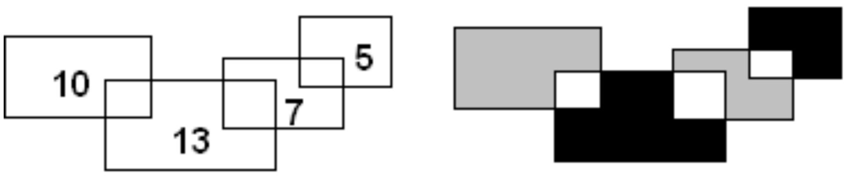


10.1.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 7.2, 8.2*) Двумя перпендикулярными разрезами прямоугольник разрезали на четыре прямоугольника. Известно, что у трех из них периметр выражается целым числом. Обязательно ли и у четвертого прямоугольника периметр будет целым?

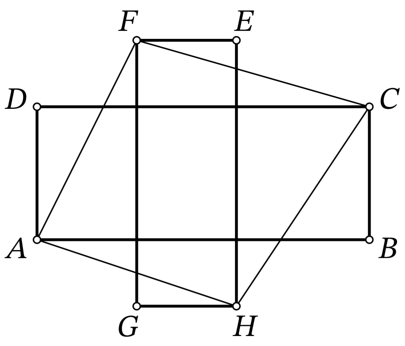
10.1.6. (*«Ломоносов», 2022, 7–8.3*) Можно ли на плоскости расположить четыре одинаковых прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была ровно одна общая вершина? (Прямоугольники могут накладываться друг на друга.)

10.1.7. (*«Надежда энергетики», 2023, 7.4*) Два равных квадрата наложены один на другой так, что вершина верхнего совпадает с точкой O пересечения диагоналей нижнего. При этом верхний квадрат может свободно поворачиваться вокруг точки O. Как нужно расположить верхний квадрат, чтобы оба они вместе покрывали бы наибольшую площадь? Если таких положений более одного, опишите их все.

10.1.8. (*«Бельчонок», 2022, 7.4*) Четыре прямоугольника имеют площади, показанные на рисунке. Какая площадь больше, серая или чёрная, и на сколько?



10.1.9. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 7.8*) На прямоугольном листе бумаги нарисовали картинку в форме «креста» из двух прямоугольников $ABCD$ и $EFGH$, стороны которых параллельны краям листа. Известно, что $AB = 9$, $BC = 5$, $EF = 3$, $FG = 10$. Найдите площадь четырёхугольника $AFCH$.

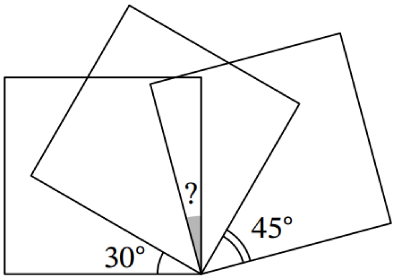


10.1.10. (*Всесиб., 2022, 7.5*) Квадрат 2×2 был разбит прямыми, параллельными его сторонам, на несколько прямоугольников (не обязательно равных). Затем эти прямоугольники были покрашены в жёлтый и синий цвета в шахматном порядке. Оказалось, что общая площадь синих прямоугольников совпала с общей площадью жёлтых. Докажите, что из синих прямоугольников можно сложить прямоугольник 1×2. *(Напишите полное доказательство.)*

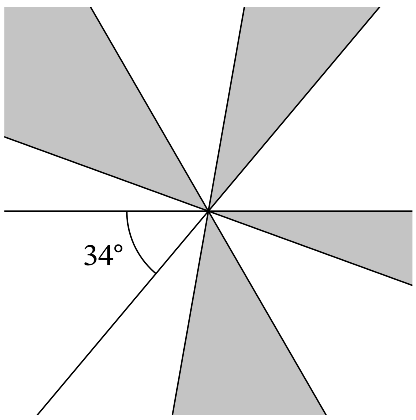
10.2 Отрезки и углы

Дополнительные задачи — в листке Отрезки и углы.

10.2.1. (*«Курчатов», 2022, 7.1*) На рисунке изображены три квадрата. Найдите отмеченный угол, если известны два других угла на рисунке.



10.2.2. (*Всеросс., 2022, МЭ, 7.4*) На рисунке изображены 5 прямых, пересекающиеся в одной точке. Один из получившихся углов равен 34°. Сколько градусов составляет сумма четырёх углов, закрашенных серым цветом?



10.2.3. (*Математический праздник, 2022, 7.2*) Доктор Айболит хочет навестить и корову, и волчицу, и жучка, и червячка. Все четверо живут вдоль одной прямой дороги. Орлы готовы утром доставить Айболита к первому пациенту, а вечером забрать от последнего, но три промежуточных перехода ему придётся сделать пешком. Если Айболит начнёт с коровы, то длина его кратчайшего маршрута составит 6 км, если с волчицы — 7 км, а если с жучка — 8 км.

Нарисуйте, как могли располагаться домики коровы, волчицы, жучка и червячка (достаточно одного примера расположения).

10.2.4. (*Всесиб., 2020, 7.3*) На плоскости расположены точки A, B, C, D, X. Известны некоторые длины отрезков: $AC = 2$, $AX = 5$, $AD = 11$, $CD = 9$, $CB = 10$, $DB = 1$, $XB = 7$. Найдите длину отрезка CX.

10.2.5. (*Всеросс., 2021, МЭ, 7.5*) В деревне Матитика вдоль прямой дороги живут (в указанном порядке) пять подружек: Аля, Белла, Валя, Галя и Диля. Каждая из них нашла сумму расстояний (в метрах) от её дома до домов остальных. Белла назвала число 700, Валя — 600, Галя — 650. Сколько метров между домами Беллы и Гали?

10.3 Углы треугольника

Дополнительные задачи — в листке Углы треугольника.

10.3.1. (*САММАТ, 2022, 7.8*) В треугольнике ABC угол $\angle C = 70^\circ$. Найти острый угол между биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$.

10.3.2. (*САММАТ, 2023, 7.8*) В треугольнике $\triangle ABC$ проведена высота AH из угла $\angle A$. Известно, что $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 2 \cdot \angle A$. Найдите угол между высотой AH и стороной AC.

10.3.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 7.2*) В четырехугольнике $ABCD$, у которого $AB = CD$, проведена диагональ AC. Докажите, что если угол ACB тупой, то угол ADC острый.

10.3.4. (*Всесиб., 2019, 7.2*) В треугольнике ABC угол A равен 60°. Точки M, N и K лежат на сторонах BC, AC и AB соответственно, причём $BK = KM = MN = NC$. Оказалось, что $AN = 2AK$. Найдите углы B и C.

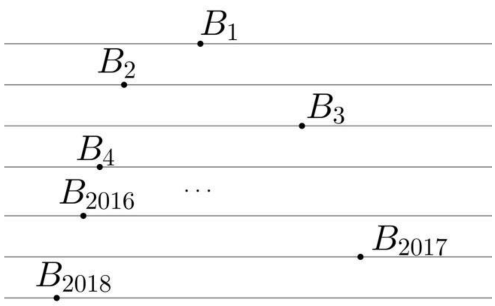
10.3.5. (*Всесиб., 2021, 7.2*) Лада и Лера нарисовали по треугольнику. Лада выбрала два угла своего треугольника, и Лера заметила, что среди углов её треугольника есть равный сумме этих двух углов. После этого Лада выбрала другую пару углов в своём треугольнике, а Лера снова нашла у своего угол, равный сумме углов этой пары. Докажите, что Лада нарисовала равнобедренный треугольник.

10.3.6. (*«Высшая проба», 2023, 7.2*) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На сторонах AB, BC, AC отметили точки K, L, M соответственно так, что $\angle AKM = 90^\circ$, $\angle BLK = 90^\circ$ и $KM = KL$. Чему равен угол CML?

10.3.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 7.3, 8.2*) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M такая, что $AB = BM$ и $AM = MC$. Известно, что угол B в пять раз больше угла C. Найдите углы треугольника.

10.3.8. (*«Высшая проба», 2021, 7.3*) В прямоугольном треугольнике KLM проведены биссектрисы KE и LF, пересекающиеся в точке O. Прямая, делящая на две равные части угол EOL, отсекает от исходного треугольника равнобедренный. Найдите острые углы треугольника KLM.

10.3.9. (*Всесиб., 2018, 7.3*) На плоскости через одинаковое расстояние расположены 2018 параллельных прямых. На каждой прямой расположено по одной точке. Точки B_1 и B_2 взяты произвольно на двух первых прямых. Затем точка B_3 взята так, что $B_1B_2 = B_2B_3$; B_4 так, что $B_1B_3 = B_3B_4$; $\ldots$; B_i так, что $B_1B_{i-1} = B_{i-1}B_i$; $\ldots$; B_{2018} так, что $B_1B_{2017} = B_{2017}B_{2018}$. При этом, если очередную точку можно выбрать двумя способами, то для нечётного номера выбирают правую точку, для чётного — более левую точку (см. рис.). Докажите, что расположение точки B_{2018} зависит только от расположения точки B_1.



10.3.10. (*Открытая олимпиада, 2015, 7.4*) Точка C находится на отрезке AE. По одну сторону от прямой AE отмечены точки B и D так, что ABC — равносторонний треугольник, а CDE — равнобедренный прямоугольный с прямым углом D. Оказалось, что треугольник BCD равнобедренный с основанием BC. Найдите угол ADE.

10.3.11. (*Московская устная олимпиада, 2022, 7.5*) Серединный перпендикуляр к стороне остроугольного треугольника делит одну из его высот в отношении $2:1$, считая от вершины. Найдите один из углов треугольника.

10.3.12. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 7.5*) Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Может ли каждый угол каждого из треугольников MAB, MBC, MCD, MDA отличаться от прямого угла более чем на $10°$?

10.3.13. (*«Бельчонок», 2019, 7.5*) В квадрате $ABCD$ со стороной 10 на стороне AD поставлена точка M так, что $AM = 4$, а на стороне CD поставлена точка N так, что $CN = 6$. Найдите сумму углов MAN, MBN, MCN.

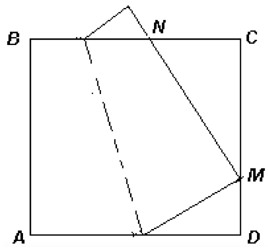
10.3.14. (*«Курчатов», 2022, 7.5*) В треугольнике ABC угол при вершине B равен $120°$, точка M — середина стороны AC. На сторонах AB и BC выбраны точки E и F соответственно так, что $AE = EF = FC$. Найдите $\angle EMF$.

10.3.15. (*Открытая олимпиада, 2019, 7.6*) В четырёхугольнике $ABCD$ на стороне AD взята точка X такая, что отрезки XB и XC делят четырёхугольник на три равных неравнобедренных треугольника. Докажите, что точка X — середина стороны или один из углов треугольника равен $60°$.

В этой задаче можно пользоваться тем, что сумма углов треугольника составляет $180°$.

10.3.16. (*Московская устная олимпиада, 2023, 7.8*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ равны стороны AB, BC и CD, а угол D равен сумме углов A и C. Чему равен угол DAC?

10.3.17. (*Московская устная олимпиада, 2022, 7.8*) Бумажный квадрат $ABCD$ перегнули по прямой так, что вершина A совпала с внутренней точкой M стороны CD, а сторона AB (в новом положении) пересекла сторону BC в точке N (см. рисунок). Найдите угол MAN.



10.4 Равносторонний треугольник

Дополнительные задачи — в листке Равносторонний треугольник.

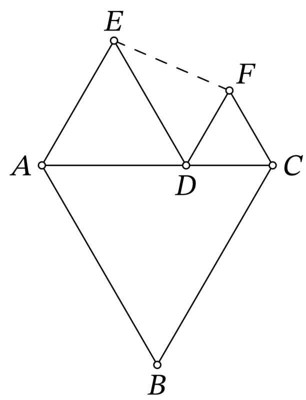
10.4.1. (*Открытая олимпиада, 2022, 7.1*) ABC — равносторонний треугольник со стороной 10. На стороне AB взята точка D, на стороне AC — точка E, на стороне BC — точки F и G такие, что треугольники ADE, BDG и CEF также равносторонние. $AD = 3$. Найдите FG.

10.4.2. (*«Будущие исследователи – будущее науки», 2023, 7.2*) В треугольнике ABC точка пересечения медиан равноудалена от всех трех вершин. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

10.4.3. (*Всеросс., 2022, МЭ, 7.7*) На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка D. На отрезках AD и DC во внешнюю сторону от исходного треугольника построены равносторонние треугольники ADE и DCF. Известно, что периметр треугольника DEF равен 19, а периметр пятиугольника $ABCFE$ равен 43.

1. Найдите длину отрезка AB.

2. Найдите длину отрезка EF.



10.5 Равнобедренный треугольник

Дополнительные задачи — в листке Равнобедренный треугольник.

10.5.1. (*Олимпиада КФУ, 2022, 7.3*) В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) проведена биссектриса BD. Точка E, лежащая внутри отрезка AB, такова, что $CE = BE$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке F. Оказалось, что $DF = CF$. Найдите углы треугольника ABC. Обоснуйте свой ответ.

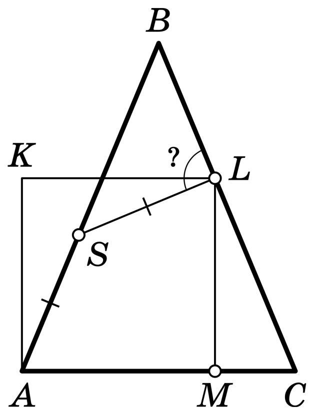
10.5.2. (*«Надежда энергетики», 2022, 7.3*) В треугольнике ABC сторона AB вдвое короче стороны BC. Биссектриса BD пересекается со средней линией KM (точка K лежит на BC, а M на AB) в точке F. Докажите, что треугольник FAD равнобедренный.

10.5.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.3, 8.3*) В равнобедренном треугольнике ABC (какие две из сторон треугольника равны, неизвестно) проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Известно, что $\angle AOB = 120°$. Найдите углы треугольника ABC.

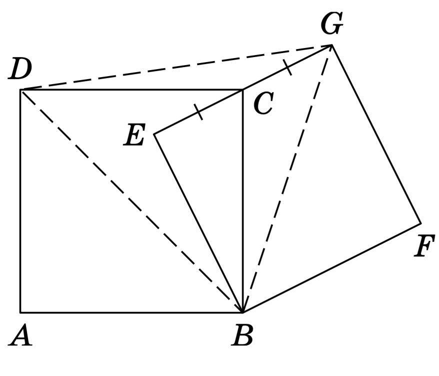
10.5.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 7.4*) Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle A = 30°$, $AB = AC$. Точка D — середина BC. На отрезке AD выбрали точку P, а на стороне AB — точку Q, так что $PB = PQ$. Чему равен угол PQC?

10.5.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 7.5*) В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC точками деления разделены на n и $n+1$ равных частей соответственно ($n > 1$). Из вершины A провели n отрезков в точки деления на стороне BC, а из вершины C — $(n-1)$ отрезков в точки деления на стороне AB. Затем провели медиану из вершины B. Могут ли какие-то три из проведенных отрезков пересекаться в одной точке внутри треугольника ABC?

10.5.6. (*Матпраздник в Матвертикали, 2023, 7.5*) Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) и квадрат $AKLM$ расположены, как показано на рисунке. Точка S на AB такова, что $AS = SL$. Найдите величину угла SLB.



10.5.7. (*Математический праздник, 2023, 7.4*) Два квадрата расположены как на рисунке, отмеченные отрезки равны. Докажите, что треугольник BDG равнобедренный.



10.5.8. (*«Ломоносов», 2023, 7–8.4, 9.1*) В бескрайних калмыцких степях мама отправила маленькую дочку навестить бабушку. У девочки не было ни навигатора, ни компаса, а только часы, которыми она еще не умела пользоваться, но у которых был ежечасный звуковой сигнал. Зная обычную скорость их любимого верблюда, мама рассчитала маршрут для дочки. Отправляя ее в путь при звуковом сигнале часов в направлении, соответствующем положению солнца в этот момент, велела через час (по очередному сигналу часов) изменить направление движения в соответствии с новым положением солнца. Так в конце концов девочка и доехала бы до бабушки. Но, когда пришло время менять направление, девочка заметила далеко впереди юрту своей подружки, она продолжила движение, не меняя направления, доехала до подружки и проговорила с ней 21 минуту, пока не прозвучал следующий сигнал часов. Тогда она вспомнила наставление матери и продолжила путь в направлении, соответствующем новому положению солнца. Как ни странно, до бабушки она доехала. Сколько всего времени (в минутах) она на это потратила?

10.6 Неравенство треугольника

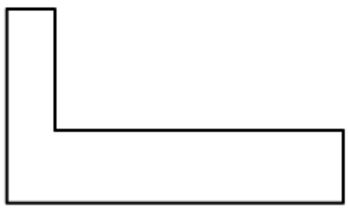
10.6.1. (*Московская устная олимпиада, 2021, 7.2*) Шесть палочек таковы, что из любых трёх можно составить контур треугольника. Обязательно ли из них можно составить контур треугольника, у которого одна сторона состоит из одной палочки, вторая – из двух палочек, а третья — из трёх?

10.6.2. (*«Высшая проба», 2022, 7.6*) Имеется 999 палочек длин $1, 2, 3, \ldots, 999$. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?

10.7 Построения

Дополнительные задачи — в листке Построения.

10.7.1. (*Всесиб., 2015, 7.4*) Дана следующая фигура (см. рис., все углы прямые). С помощью линейки без делений разделите его на два многоугольника равной площади.



10.7.2. (*«Росатом», 2015, 7.5*) Дан лист бумаги в форме правильного треугольника со стороной 6 см. Имеются, если необходимо, измерительная линейка, циркуль, ножницы. Нужно разрезать лист на части, а потом из всех этих частей путем перекладывания сложить прямоугольник, одна из сторон которого 2 см. Предложите свой вариант решения.

10.8 Разные планиметрические задачи

Дополнительные задачи — в листке Геометрия-7. Разное.

10.8.1. (*САММАТ, 2023, 7.2*) В четырехугольнике даны три угла $91°$, $97°$ и $101°$. Диагональ четырехугольника, выходящая из вершины четвертого угла, равна 2022 см. Может ли в этом четырехугольнике длина второй диагонали быть 2023 см?

10.8.2. (*САММАТ, 2021, 7.10*) В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC. Найти длину гипотенузы AC, если длина катета AB равна a.

10.8.3. (*«Надежда энергетики», 2015, 7.2*) Треугольник с заданным периметром p вращается в своей плоскости вокруг вершины с углом $\alpha = 30°$. При каком соотношении длин его сторон заметаемая при вращении площадь будет минимальна?

10.8.4. (*Московская устная олимпиада, 2023, 7.2*) Внутри выпуклого многоугольника нашлась точка, которая до середины каждой стороны, кроме одной, удалена на половину этой стороны. Обязательно ли это верно и для оставшейся стороны?

10.8.5. (*«Бельчонок», 2023, 7.3*) Точки Q и S взяты по разные стороны от прямой PR. Отрезки QK и SL — перпендикуляры, опущенные на отрезок PR из точек Q и S соответственно. Оказалось, что $PK = KL = LR$ и $SK = PQ$. Докажите, что $QR = PS$.

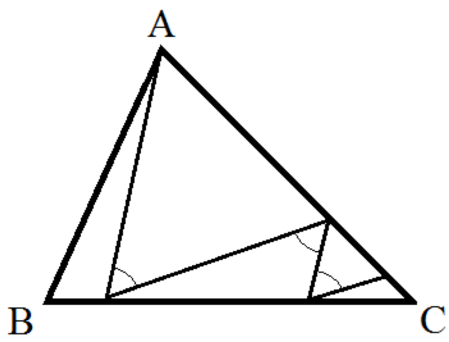
10.8.6. (*«Бельчонок», 2022, 7.3*) Найдите всевозможные значения периметра прямоугольника, если известно, что его можно разрезать на три прямоугольника, периметр каждого из которых равен 10, а длины сторон — целые числа.

10.8.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 7.3, 8.3*) В треугольнике ABC отмечена точка D такая, что $BD + AC < BC$. Докажите, что $\angle DAC + \angle ADB > 180°$.

10.8.8. (*«Курчатов», 2021, 7.3*) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Оказалось, что $AB + BD = DC$. Докажите, что $\angle B = 2\angle C$.

10.8.9. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 7.3, 8.2*) Вера заносит свои знания по планиметрии в таблицы, строки которых соответствуют фигурам, а столбцы — свойствам. Если фигура обладает нужным свойством, то на пересечении строки и столбца пишется 1, а в противном случае — 0. В одной из таблиц 4×4 оказалось, что в каждой строке и каждом столбце ровно по одному нулю. Известно, что первый столбец соответствует свойству «есть острый угол», а второй — свойству «есть равные стороны». Подберите ещё два свойства, а для строк — два треугольника и два четырёхугольника, чтобы получить нужную расстановку нулей и единиц.

10.8.10. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 7.3*) Муха сидит в вершине A треугольной комнаты ABC ($\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AC = 5$ м). В какой-то момент она вылетает оттуда в произвольном направлении, после чего каждый раз, долетая до стены, поворачивает на 60° и продолжает лететь по прямой (см. рис.). Может ли оказаться, что через какое-то время муха пролетела больше 9,9 метров?



10.8.11. (*Всесиб., 2016, 7.3*) Дан треугольник ABC, сторона AB разбита на 4 равных отрезка $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$, а сторона AC на 5 равных отрезков $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше суммы площадей треугольников $C_1B_1C_2$, $C_2B_2C_3$, $C_3B_3C_4$, C_4BC?

10.8.12. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 7.4*) Даны два равнобедренных остроугольных треугольника. Известно, что у первого треугольника есть угол, равный некоторому углу второго треугольника, и есть сторона, равная некоторой стороне второго треугольника. Можно ли утверждать, что треугольники равны?

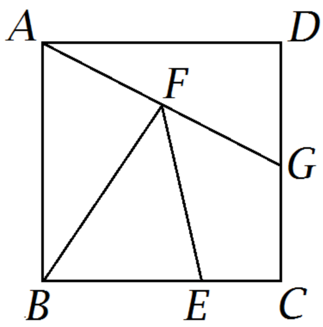
10.8.13. (*«Бельчонок», 2018, 7.4*) На стороне AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена такая точка E, что $AE = EC$ и $BE = ED$. Известно, что диагонали AC и BD пересекаются в точке O, причём $AO = OD$. Докажите, что $AB = CD$.

10.8.14. (*«Надежда энергетики», 2017, 7.4*) Два брата получили в наследство поле в форме прямоугольного треугольника, катеты которого соотносятся как $4 : 5$, и разделили его по прямой линии, соединяющей вершину прямого угла с серединой противоположной стороны.

1. Получили ли братья части равной площади?

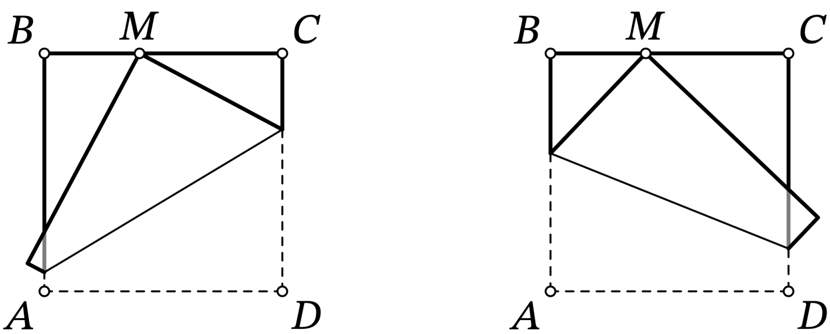
2. Могут ли ограды, поставленные вокруг каждой части, иметь равную длину?

10.8.15. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 7.4*) Квадрат разрезан на четыре части равной площади, как показано на рисунке. Найдите отношение $BE : EC$.



10.8.16. (*Олимпиада КФУ, 2023, 7.4*) Четыре точки A, B, C, D таковы, что D и C лежат по одну сторону относительно прямой AB и выполнено равенство $AB = AD + BC$. Биссектрисы углов ABC и BAD пересекаются в точке E. Докажите, что $CE = DE$.

10.8.17. (*«Курчатов», 2023, 7.4*) У Лёши есть бумажный квадрат $ABCD$. Он отметил на стороне BC точку M. Сначала он перегнул квадрат так, что точка D совпала с точкой M (левый рисунок), и разогнул обратно. Затем он перегнул его так, что точка A совпала с точкой M (правый рисунок), и снова разогнул обратно. Пусть O — точка пересечения двух линий перегиба. Докажите, что $BO = OC$.



10.8.18. (*Всесиб., 2017, 7.4*) В треугольнике со сторонами длиной a, b и c напротив стороны c лежит угол в 120 градусов. Докажите, что из отрезков длины a, c и $a + b$ можно составить треугольник.

10.8.19. (*Открытая олимпиада, 2023, 7.4*) ABC и BCD — треугольники с целочисленными сторонами, периметры которых составляют 10 и 20 соответственно. Какое наименьшее значение может принимать длина CD?

10.8.20. (*Открытая олимпиада, 2021, 7.4*) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Оказалось, что $AB = CH$. Точка K такова, что $\angle BKC = \angle BCK$ и $\angle ABK = \angle ACB$. Докажите, что $AK \perp AB$.

10.8.21. (*Открытая олимпиада, 2018, 7.4*) Дан треугольник ABC. Точки K, L и M расположили на плоскости так, что треугольники ABK, LBC и AMC оказались равны ABC. Какой знак неравенства следует поставить между полупериметром треугольника KLM и периметром треугольника ABC?

Вершины треугольников указаны в произвольном порядке: например, нельзя утверждать, что при равенстве треугольников ABK и LBC точка A соответствует точке L.

10.8.22. (*«Курчатов», 2020, 7.4*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена биссектриса BL. На отрезке BC выбрана точка E, а на отрезке CL — точка D так, что $\angle LDE = 90°$, $AL = DE$. Докажите, что $AB = LD + BE$.

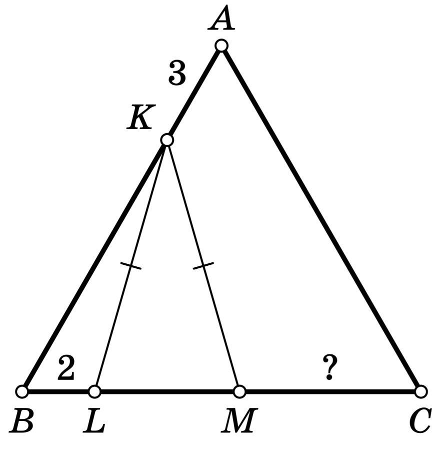
10.8.23. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 7.5*) Из прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 3$ и $CB = 7$ нужно вырезать квадрат с вершиной C наибольшей площади. Чему равна сторона такого квадрата?

10.8.24. (*Открытая олимпиада, 2020, 7.5*) В правильном треугольнике ABC точка M — середина стороны BC. Кроме того, луч CB — биссектриса угла ACD. Прямая MK пересекает сторону AB в точке K, а луч CD в точке L. Докажите, что $AK + CL = AC$.

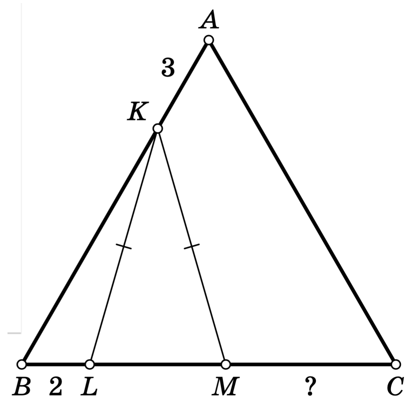
10.8.25. (*Матпраздник в Матвертикали, 2020, 7.5*) Дан квадрат $ABCD$ и точка K на продолжении стороны AB за точку A такая, что A — середина отрезка KB. Точка L выбрана таким образом, что $DL = CD$, а угол $BLK = 90°$. Чему может быть равен угол AKL?

10.8.26. (*Математический праздник, 2022, 7.5*) В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = = BC = CD$, $\angle A = 70°$ и $\angle B = 100°$. Чему могут быть равны углы C и D?

10.8.27. (*Математический праздник, 2021, 7.5*)Дан правильный треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка K, на стороне BC — точки L и M (L лежит на отрезке BM) так, что $KL = KM$, $BL = 2$, $AK = 3$. Найдите CM.



10.8.28. (*Матпраздник в Матвертикали, 2021, 7.6*) На стороне AB правильного треугольника ABC выбрана точка K, а на стороне BC выбраны точки L и M таким образом, что $KL = KM$, причём точка L расположена к B ближе, чем M.

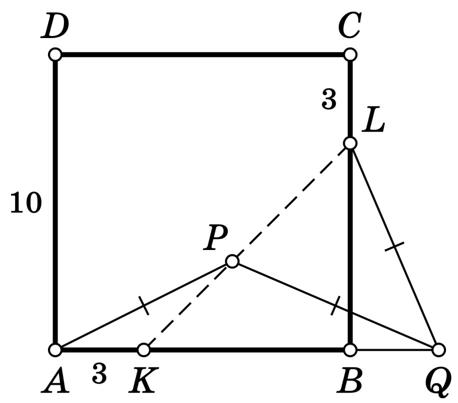


а) Найдите угол MKA, если известно, что $\angle BKL = 10^\circ$.

б) Найдите MC, если $BL = 2$, $KA = 3$.

Ответы каждого из пунктов обоснуйте.

10.8.29. (*Матпраздник в Матвертикали, 2022, 7.6*) На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ со стороной, равной 10, отмечены точки K и L соответственно так, что $AK = CL = 3$. На отрезке KL выбрали точку P, а на продолжении отрезка AB за точку B выбрали точку Q так, что $AP = PQ = QL$ (см. рис.).

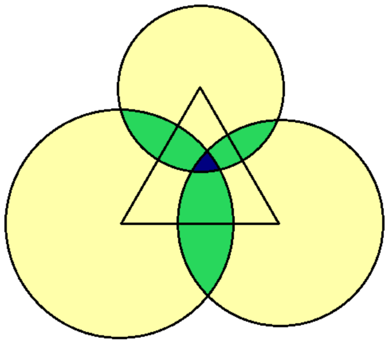


а) Докажите, что $\angle PAB = \angle BLQ$.

б) Найдите длину отрезка BQ.

При решении пункта б) можно пользоваться утверждением пункта а).

10.8.30. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 7.5, 8.4*) На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника.



Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Найдите площадь треугольника.

10.8.31. (*«Росатом», 2018, 7.5*) Граница квадрата со стороной 9, вырезанного из белого картона, окрашена в красный цвет. Необходимо разрезать квадрат на 6 равных по площади частей, границы которых содержат отрезки, окрашенные в красный цвет, с одинаковой общей длиной.

10.8.32. (*«Росатом», 2023, 7.5*) Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагональ BD является биссектрисой угла при вершине B, составляет острый угол 72° с другой диагональю и угол 53° со стороной AD. Найти углы четырехугольника.

10.8.33. (*«Росатом», 2021, 7.5*) Точка P расположена на стороне AB квадрата $ABCD$ так, что $AP : PB = 1 : 3$. Точка Q лежит на стороне BC квадрата и делит ее в отношении $BQ : QC = 3 : 2$. Прямые DP и AQ пересекаются в точке E. Найти отношение длин $PE : ED$.

10.8.34. (*«Росатом», 2020, 7.5*) На плоскости нарисованы 81 отрезков, длиной 1; 2; ..., 81 соответственно. Петя сделал попытку собрать из всех отрезков замкнутую ломаную линию в форме параллелограмма. К своему удивлению, он не смог это сделать (объясните почему?). Выбросив часть отрезков, он смог выложить на плоскости параллелограмм. Найти наибольшее возможное значение его периметра.

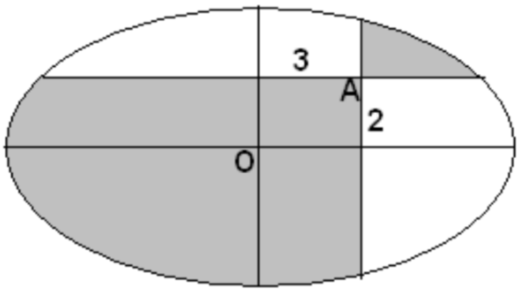
10.8.35. (*«Росатом», 2019, 7.5*) Треугольник с длинами сторон 3, 5 и 7 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на n равных треугольников, длина хотя бы одной из сторон которых — целое число. Найти наибольшее возможное значение числа n.

10.8.36. (*«Росатом», 2017, 7.5*) На плоскости расположены 10 прямых так, что никакие две из них не параллельные. Три из них проходят через одну точку. Сколько различных треугольников можно нарисовать на плоскости так, чтобы их стороны лежали на заданных прямых?

10.8.37. (*«Росатом», 2016, 7.5*) На какое минимальное число треугольников можно разрезать ножницами выпуклый 90-угольник?

10.8.38. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 7.5, 8.5*) В плоском мире есть два треугольных острова. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметры этих островов одинаковы, а площадь прибрежных вод у них различается? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

10.8.39. (*«Бельчонок», 2022, 7.5*) Миша хотел разрезать торт по осям симметрии (см. рис.), но промахнулся, и провёл разрезы не через точку O, а через точку A, отстоящую от осей симметрии на 2 и на 3 сантиметра. На сколько площадь кусков, закрашенных серым, больше площади незакрашенных кусков?



10.8.40. (*Открытая олимпиада, 2017, 7.5*) Точки B и D взяты по разные стороны от прямой AC. Отрезки BH и DF — перпендикуляры, опущенные на отрезок AC из точек B и D соответственно. Оказалось, что $AH = HF = FC$ и $DH = AB$. Докажите, что $BC = AD$.

10.8.41. (*«Высшая проба», 2022, 7.5*) Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. На стороне AC выбрана точка K такая, что $\angle CBK = 15°$. На луче BK отмечена точка M такая, что $\angle ACM = 90°$. Докажите, что $AC = BM$.

10.8.42. (*Открытая олимпиада, 2018, 7.6*) У Васи есть чертёжный инструмент — треугольник с углами 40°, 70° и 70°. Как ему с его помощью построить равносторонний треугольник?

10.8.43. (*Открытая олимпиада, 2019, 7.7*) Внутри семиугольника $ABCDEF$ отметили точку O. Её соединили отрезками со всеми вершинами шестиугольника, разбив его таким образом на семь треугольников. Все эти треугольники оказались прямоугольными. Докажите, что в одном из этих треугольников прямой угол лежит при вершине O.

10.8.44. (*Открытая олимпиада, 2022, 7.7*) Докажите, что сумма длин диагоналей 21-угольника меньше, чем его периметр, умноженный на 54.

10.8.45. (*Открытая олимпиада, 2016, 7.7*) Дан равносторонний треугольник ABC. На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно. Докажите, что длина ломаной $AEDC$ не меньше, чем $2AB$.

10.8.46. (*Московская устная олимпиада, 2021, 7.8*) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно так, что AEF — равносторонний треугольник. Точка M — середина отрезка AE. Докажите, что $CM = AB$.

10.8.47. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 7–8.4*) В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD, угол ADC равен 67,5°. Найдите углы трапеции, если известно, что биссектриса угла CAD пересекает отрезок CD в его середине, а основание BC равно стороне AB.

10.8.48. (*«Ломоносов», 2021, 7–8.5*) На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены такие точки M и N, что $AM = MN = NC$. На стороне AC выбраны такие точки L и Q, что $MQ \parallel BC$, $NP \parallel AB$. Известно, что $PQ = BM$. Найдите угол MQB.

10.8.49. (*«Ломоносов», 2020, 7–8.6*) На биссектрисе угла BAC треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AB за точку A — точка N так, что $AC = AM = 1$ и $\angle ANM = \angle CNM$. Найдите длину отрезка AN.