Олимпиадная математика. 11 класс

Задачник 11.2023

Данное пособие содержит задачи для одиннадцатиклассников, которые предлагались в последние годы на следующих олимпиадах:

1. Физтех (2021–2023)
2. Ломоносов (2020–2023)
3. Покори Воробьёвы горы! (2020–2023)
4. Объединённая межвузовская математическая олимпиада (2021–2023)
5. Курчатов (2020–2023)
6. Всероссийская олимпиада школьников, школьный этап в Москве (2021–2023)
7. Всероссийская олимпиада школьников, муниципальный этап в Москве (2020–2023)
8. Всероссийская олимпиада школьников, региональный и заключительный этапы (отдельные задачи, 2020–2023)
9. Росатом (2015–2023)
10. Шаг в будущее (2016–2023)
11. Всесибирская олимпиада (2015–2023)
12. Открытая олимпиада (2015–2023)
13. Формула Единства / Третье тысячелетие (2015–2023)
14. Будущие исследователи — будущее науки (2015–2023)
15. САММАТ (2021–2023)
16. Бельчонок (2018–2023)
17. Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист! (2016–2023)
18. Олимпиада КФУ (2019–2023)
19. Надежда энергетики (2015–2023)
20. Высшая проба (2023)

Годы, являющиеся левой границей промежутка дат для каждой олимпиады, выбраны из следующих соображений.

- Более ранние задачи олимпиад, имеющих номера 1–8 в приведённом списке, можно найти в олимпиадных листках. Кстати, многие пункты оглавления задачника дублируют названия данных листков, и тогда раздел задачника начинается со ссылки на соответствующий листок.

- В остальных случаях нижняя граница определялась либо наличием соответствующих материалов на сайтах олимпиад, либо моими личными возможностями :-)

Указание номера задачи позволяет составить представление о её сложности: чем больше номер задачи, тем она, как правило, труднее.

Распределение задач по темам зачастую сделано «на глаз»; в дальнейшем (по мере моего осмысления) некоторые задачи могут переместиться в другие темы. Актуальная версия задачника находится по адресу: `http://mathus.ru/math/11math2023.pdf`.

Оглавление

Глава 1

Целые числа

1.1 Десятичная запись

Дополнительные задачи — в листке Десятичная запись.

1.1.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 10–11.1*) Натуральные числа, начиная с 20, выписали в одну строку: 20212223... Какая цифра стоит в получившейся последовательности цифр на 2021 месте?

1.1.2. (*«Шаг в будущее», 2022, 11.1*) Дробь $1/9$ записана в виде бесконечной двоичной дроби. Сколько единиц среди первых 2022 цифр после запятой содержится в такой форме записи?

1.1.3. (*Всесиб., 2022, 11.1*) Десятичная запись натурального числа N содержит каждую цифру от 0 до 9 ровно один раз. Обозначим через A сумму пяти двузначных чисел, составленных из первой и второй, третьей и четвёртой, ..., девятой и десятой цифр N, а через B — сумму четырёх двузначных чисел, составленных из второй и третьей, четвёртой и пятой, ..., восьмой и девятой цифр N. Оказалось, что A равно B. Может ли N начинаться с чётной цифры?

1.1.4. (*«Ломоносов», 2022, 11.2*) Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

1.1.5. (*«Бельчонок», 2021, 11.3*) Найдите все трехзначные числа $\overline{abc}$, такие, что остаток от деления как числа $\overline{abc}$, так и числа $\overline{cba}$ на сумму своих цифр, увеличенную на 1, равен 1.

1.1.6. (*Олимпиада КФУ, 2022, 11.3*) Сумма нескольких натуральных чисел, в записи каждого из которых участвуют только цифры 3 и 0, равна $777\ldots77$ (2022 семёрки). Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой сумме?

1.1.7. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 11.7*) Зная, что

$$0{,}698 < \lg 5 < 0{,}699,$$

определите, у скольких из чисел $1, 5, 25, \ldots, 5^n, \ldots, 5^{100}$ десятичная запись начинается с единицы.

1.1.8. (*Всеросс., 2022, РЭ, 11.7*) Произведение цифр натурального числа n равно x, а произведение цифр числа $n+1$ равно y. Может ли так случиться, что произведение цифр некоторого натурального числа m равно $y-1$, а произведение цифр числа $m+1$ равно $x-1$?

1.2 Сумма цифр числа

Дополнительные задачи — в листке Сумма цифр числа.

1.2.1. (*«Ломоносов», 2020, 11.1*) Найдите сумму цифр числа A, если

$$A = 2^{63} \cdot 4^{25} \cdot 5^{106} - 2^{22} \cdot 4^{44} \cdot 5^{105} - 1.$$

1.2.2. (*«Росатом», 2017, 11.3*) Целые положительные шестизначные числа a_1 и a_2 таковы, что если к сумме цифр числа a_1 прибавить сумму цифр числа a_2, то получится 36. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение $a_1 \cdot a_2$.

1.2.3. (*«Ломоносов», 2023, 11.5*) Обозначим через $s(n)$ число цифр в десятичной записи натурального числа n. Найдите сумму $s(2^{2023}) + s(5^{2023})$.

1.3 Делимость

Дополнительные задачи — в листке Делимость. Общие свойства.

1.3.1. (*САММАТ, 2021, 11.1*) Число $\overline{abccba}$ состоит из попарно не совпадающих, отличных от нуля цифр a, b, c и делится на 231. Сколько существует таких чисел?

1.3.2. (*«Бельчонок», 2019, 11.1*) В ряд выписывают дроби $\frac{1}{4061}, \frac{2}{4060}, \frac{3}{4059}, \ldots, \frac{4060}{2}, \frac{4061}{1}$. Сколько всего целых чисел встретится в таком ряду?

1.3.3. (*Открытая олимпиада, 2019, 11.1*) Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 13. Может ли их сумма квадратов также делиться на 13?

1.3.4. (*Открытая олимпиада, 2023, 11.1*) Простые числа p, q и r таковы, что $p < q$, $p + q = r$, $p^2 + q^2 = r^2 - 116$. Найдите p, q и r.

1.3.5. (*«Физтех», 2023, 11.1*) Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

1.3.6. (*«Росатом», 2020, 11.1*) Сколько существует натуральных чисел $n \leqslant 2020$, для которых дробь $\frac{6n^3+n^2-5n+12}{6n^2+7n+2}$ сократимая?

1.3.7. (*Всеросс., 2023, РЭ, 11.1*) Можно ли число 2023 представить в виде суммы трех натуральных чисел a, b, c таких, что a делится на $b + c$ и $b + c$ делится на $b - c + 1$?

1.3.8. (*Всеросс., 2022, ЗЭ, 11.1*) Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

1.3.9. (*Всесиб., 2021, 11.2*) Найти все натуральные n, которые можно представить в виде суммы $n = a^2 + b^2$, где a — минимальный делитель n, отличный от 1, и b — какой-то делитель n.

1.3.10. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 11.3*) Натуральное число n назовём *интересным*, если $2n$ является точным квадратом, а $15n$ — точным кубом. Найдите наименьшее интересное число.

1.3.11. (*САММАТ, 2023, 11.6*) Пусть a и b натуральные числа такие, что несократимая дробь представима в виде суммы

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{118} + \frac{1}{119}.$$

Докажите, что число a делится на 179.

1.3.12. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.3*) Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых из четырех утверждений

1. $a^2 + 4a + 3$ делится на b;
2. $a^2 + ab - 6b^2 - 2a - 16b - 8 = 0$;
3. $a + 2b + 1$ делится на 4;
4. $a + 6b + 1$ — простое число

три истинны, а одно ложно.

1.3.13. (*Открытая олимпиада, 2022, 11.3*) $4^{27000} - 82$ делится на 3^n. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n?

1.3.14. (*Всесиб., 2016, 11.3*) Найти все натуральные числа, которые можно представить одновременно как сумму нескольких (больше одного) натуральных чисел и как произведение тех же натуральных чисел.

1.3.15. (*«Росатом», 2017, 11.3*) Найти целые положительные делители x и y числа 1232, удовлетворяющие уравнению

$$5x - 3y + 13 = 0.$$

1.3.16. (*«Курчатов», 2022, 11.3*) Натуральное число A назовем *интересным*, если существует натуральное число B такое, что:

- $A > B$;
- разность чисел A и B — простое число;
- произведение чисел A и B — точный квадрат. Найдите все интересные числа, большие 200 и меньшие 400.

1.3.17. (*Всесиб., 2023, 11.4*) В возрастающей арифметической прогрессии из n натуральных чисел каждый член, кроме последнего, делится на свой номер в прогрессии, а последний — нет. Докажите, что n является степенью некоторого простого числа.

1.3.18. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 11.5*) На доске написано некоторое двузначное число. Незнайка заявил, что оно делится на 3, 4, 5, 9, 10, 15, 18, 30. Знайка, услышав это, огорчил Незнайку тем, что тот ошибся ровно 4 раза. Какое число могло быть написано на доске? Укажите все возможные варианты

1.3.19. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.5*) На доске написано 25 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 9 чисел делятся на 13, 10 чисел делятся на 14, 11 чисел делятся на 15. Докажите, что среди них есть число, большее 345.

1.3.20. (*«Бельчонок», 2019, 11.5*) Найдите все такие числа $N = 9^n - 1$, где n — натуральное число, которые имеют ровно три различных простых делителя, один из которых равен 13.

1.3.21. (*«Бельчонок», 2020, 11.5*) Найдите все тройки попарно простых натуральных чисел (a, b, c) $(a \leqslant b \leqslant c)$ для которых $a^n + b^n + c^n$ делится на $a + b + c$ для всех натуральных $2 \leqslant n \leqslant 12$.

1.3.22. (*Всесиб., 2017, 11.5*) Найти все натуральные n, для которых все натуральные числа от 1 до n включительно можно записать в ряд в таком порядке, что сумма первых слева k чисел будет либо делить сумму всех $n-k$ оставшихся, либо делиться на неё при любом k от 1 до $n-1$.

1.3.23. (*Всеросс., 2021, МЭ, 11.7*) Натуральные числа a и b таковы, что a^a делится на b^b, однако a не делится на b. Найдите наименьшее возможное значение числа $a + b$, если известно, что число b взаимно просто с 210.

1.4 НОД и НОК

Дополнительные задачи — в листке НОД и НОК.

1.4.1. (*«Росатом», 2019, 11.1*) Сколько различных пар целых чисел x и y, $1 \leqslant x \leqslant 100$, $1 \leqslant y \leqslant 100$ удовлетворяют уравнению $\text{НОД}\,(\log_2 x, 36) = \log_3^2 y$? Найти эти пары.

1.4.2. (*Всесиб., 2019, 11.2*) Найти все натуральные числа n, которые можно представить в виде суммы

$$n = x + y + (x, y) + [x, y]$$

для некоторых натуральных чисел x и y. Здесь (x, y) и $[x, y]$ обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел x и y соответственно.

1.4.3. (*Всесиб., 2020, 11.2*) Пусть a, b, c — натуральные числа. Могут ли наибольшие общие делители пар чисел a и b, b и c, c и a равняться $30! + 111$, $40! + 234$ и $50! + 666$ соответственно?

1.4.4. (*«Росатом», 2019, 11.3*) Известно, что дробь $\frac{m(n+69m)}{n(m+69n)}$ сократимая для некоторых взаимно простых целых чисел m и n. Найти наибольшее простое число d, на которое делится числитель и знаменатель дроби.

1.4.5. (*«Росатом», 2020, 11.3*) Доказать, что существует набор натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_{2019}, для которых

$$2 \cdot \text{НОК}\,(a_1, a_2, \ldots, a_{2019}) = a_1 + a_2 + \ldots a_{2019}.$$

1.4.6. (*«Высшая проба», 2023, 11.3*) Натуральные числа a, b, c таковы, что $1 \leqslant a < b < c \leqslant 3000$. Найдите наибольшее возможное значение величины

$$\text{НОД}\,(a, b) + \text{НОД}\,(b, c) + \text{НОД}\,(c, a).$$

1.4.7. (*«Бельчонок», 2021, 11.4*) Найдите количество пар натуральных чисел $(a; b)$, каждое из которых меньше миллиона, удовлетворяющих равенству

$$\text{НОК}\,(a, b+1) = \text{НОК}\,(b, a+3).$$

1.4.8. (*Всеросс., 2023, РЭ, 11.6*) Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$?

1.4.9. (*Всеросс., 2023, МЭ, 11.7*) Пусть N — наименьшее общее кратное десяти различных натуральных чисел

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{10}.$$

1. Какое наименьшее значение может принимать N/a_3?
2. Укажите все возможные значения a_3 на отрезке $[1; 1000]$, для которых величина N/a_1 может принимать своё наименьшее значение.

1.5 Остатки и сравнения

Дополнительные задачи — в листке Остатки и сравнения.

1.5.1. (*ОММО, 2022.1*) Докажите, что для каждого натурального числа n число $5^{2n}+3^{n+2}+3^n$ делится на 11.

1.5.2. (*САММАТ, 2021, 11.1*) Доказать, что при всех натуральных n число $3^{2n+3} + 40n - 27$ делится на 64.

1.5.3. (*Открытая олимпиада, 2020, 11.1*) Докажите, что число $3^{3^n}+17^{3^n}+31^{3^n}$ при нечётном n раскладывается в произведение хотя бы четырёх (не обязательно различных) натуральных чисел, больших единицы.

1.5.4. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.1*) Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \geqslant 2).$$

С каким остатком число 3 в степени a_{2022} делится на 13?

1.5.5. (*Всеросс., 2021, РЭ, 11.1*) Натуральное число, большее 1000000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 625. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде тысяч?

1.5.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 10.3, 11.2*) Найдите все натуральные числа n, для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.

1.5.7. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 11.3*) Десятичная запись суммы $3 + 33 + 333 + \ldots + 33\ldots3$ оканчивается на 2023. Каким наименьшим может быть количество цифр в последнем слагаемом?

1.5.8. (*«Росатом», 2017, 11.3*) Целые числа $2a^2$ и $3a$ имеют одинаковые остатки при делении на 18. Какие ненулевые остатки может иметь число $a > 0$ при делении на 18?

1.5.9. (*Открытая олимпиада, 2016, 11.4*) Докажите, что при $n = 6002$ сумма биномиальных коэффициентов с шагом 6, т. е.

$$C_n^1 + C_n^7 + \ldots + C_n^{n-1},$$

дает остаток 1 при делении на 3

1.5.10. (*САММАТ, 2022, 11.7*) Пусть задано множество остатков от деления на 11

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Пусть над этим множеством задана степенная функция четвертой степени (т. е. все значения переменных и коэффициенты принадлежат только множеству A) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 6x + 10$. Найдите элемент множества A, являющийся суммой корней уравнения $f(x) = 0$.

1.6 Уравнения в целых числах

Дополнительные задачи — в листке Уравнения в целых числах.

1.6.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 11.1*) Сколько существует натуральных чисел n таких, что уравнение $nx - 12 = 3n$ имеет целочисленное решение?

1.6.2. (*Олимпиада КФУ, 2022, 11.1*) Пусть p — нечётное простое число. Найдите все целые x и y такие, что $x^3 + y^3 + p^3 = x^2y + xy^2$.

1.6.3. (*Открытая олимпиада, 2017, 11.1*) Решите уравнение $p^3 - q^3 = 11r$, где p, q, r — простые числа.

1.6.4. (*«Росатом», 2016, 11.1*) Сколько пар $(x; y)$ целых чисел, являющихся решениями уравнения $7x - 5y = 23$, удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 37$? Найти пару $(x; y)$, для которой $x + y$ наибольшее.

1.6.5. (*«Росатом», 2020, 11.1*) Найти целые числа x и y, для которых

$$\log_2\left(\frac{x}{17} + \frac{y}{5}\right) = \log_2 \frac{x}{17} + \log_2 \frac{y}{5}.$$

1.6.6. (*«Бельчонок», 2018, 11.3*) Найдите все натуральные числа n, для каждого из которых существуют такие натуральные числа p и q, что

$$\left(n^2 + 2\right)^p = (2n - 1)^q.$$

1.6.7. (*«Бельчонок», 2018, 11.3*) Найдите все натуральные числа n, для каждого из которых существуют такие натуральные числа p и q, что

$$\left(n^2 + 2n + 3\right)^p = (2n + 1)^q.$$

1.6.8. (*«Бельчонок», 2022, 11.3*) Разрешимо ли уравнение $y^2 + y = x^3 - x$ во взаимно простых натуральных числах?

1.6.9. (*«Шаг в будущее», 2017, 11.3*) Два числа x и y удовлетворяют уравнению

$$26x^2 + 23xy - 3y^2 - 19 = 0$$

и являются соответственно шестым и одиннадцатым членами убывающей арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел. Найдите разность этой прогрессии.

1.6.10. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.3*) Найдите все натуральные числа n, для которых число $2^{10} + 2^{13} + 2^{14} + 3 \cdot 2^n$ является квадратом натурального числа.

1.6.11. (*САММАТ, 2023, 11.7*) Найти решение уравнения в натуральных числах x и y:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10} + \sqrt{x^2 + y^2 - 18x - 6y + 90} - 10 = 0.$$

1.6.12. (*«Росатом», 2023, 11.3*) Найти все целые решения уравнения

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2022}.$$

1.6.13. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 11.3*) Решите систему в целых числах:

$$\begin{cases} (y^2 + 6)(x - 1) = y(x^2 + 1), \\ (x^2 + 6)(y - 1) = x(y^2 + 1). \end{cases}$$

1.6.14. (*«Надежда энергетики», 2021, 11.4*) Зная, что $2021 = 43 \cdot 47$, решите в целых числах уравнение с двумя неизвестными

$$40(x + y) + xy = 421.$$

1.6.15. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 11.4*) Сколько решений в целых числах x, y имеет уравнение

$$|3x + 2y| + |2x + y| = 100?$$

1.6.16. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 11.4*) Докажите, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих соотношению

$$x^2 + y^2 = z^{2022}.$$

1.6.17. (*Всеросс., 2020, МЭ, 11.5*) При каких натуральных n существуют натуральные a и b такие, что $n! = 2^a + 2^b$?

1.6.18. (*«Надежда энергетики», 2018, 11.5*) Решите уравнение с тремя неизвестными

$$X^Y + Y^Z = XYZ$$

в натуральных числах.

1.6.19. (*«Бельчонок», 2022, 11.5*) Найдите все пары $(x; y)$ натуральных чисел, для которых оба числа $x^2 + 8y$ и $y^2 - 8x$ являются точными квадратами.

1.6.20. (*«Бельчонок», 2023, 11.5*) Решите уравнение

$$3^{2a} + 3^a + 2 = 2^k 7^l$$

в целых неотрицательных числах.

1.6.21. (*«Бельчонок», 2023, 11.5*) Решите уравнение

$$x^4 + y^2 = xy^2 + y$$

в натуральных числах.

1.6.22. (*Всесиб., 2015, 11.5*) Найти все решения в натуральных числах уравнения $2^x + 3^y = z^2$.

1.6.23. (*«Росатом», 2015, 11.5*) Для всех целых $k < 0$ найти целые решения x и y системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy^2 - ky^2 = 0, \\ x^2 - xy + ky^2 = 0. \end{cases}$$

1.6.24. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 11.5*) Решите в натуральных числах уравнение

$$a^b + a + b = b^a.$$

1.6.25. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 11.6*) Найдите все четверки натуральных чисел (k, l, m, n), которые удовлетворяют равенству $k! + l! = m! - n!$.

1.7 Неравенства в целых числах

Дополнительные задачи — в листке Неравенства в целых числах.

1.7.1. (*САММАТ, 2021, 11.10*) Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0, \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0. \end{cases}$$

1.8 Задачи с целыми числами

Дополнительные задачи — в листке Задачи с целыми числами.

1.8.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 11.7*) При каком наименьшем натуральном x выражение

$$\sqrt{29 + \sqrt{x}} + \sqrt{29 - \sqrt{x}}$$

является целым?

1.8.2. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.1*) 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников — сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?

1.8.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 11.1*) При оптимизации штатного расписания в учреждении было сокращено 13 вакансий, в результате чего их доля в расписании снизилась на 13 процентных пунктов. Зная, что вакансии в этом учреждении еще остались, определите их количество.

1.8.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 11.1*) В фирме работало 150 сотрудников, в том числе 73 женщины. Затем произошло объединение с другой фирмой, где женщины составляли 40%. В результате доля женщин среди сотрудников стала равна p%. Найдите все возможные целые значения p.

1.8.5. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.1*) В состав автоматической линии по обработке корпусных деталей входило несколько одинаковых станков. Ежедневно линия обрабатывала 38880 деталей. После модернизации производства все станки линии заменили на более производительные, но тоже одинаковые, а их число увеличилось на 3. Автоматическая линия стала обрабатывать в день 44800 деталей. Сколько деталей в день обрабатывал каждый станок первоначально?

1.8.6. (*«Росатом», 2019, 11.1*) Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 510 шагов и останавливаться, а также проходить по той же прямой 390 шагов назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 20 таких маневров. Задача робота — остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 692 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?

1.8.7. (*«Росатом», 2023, 11.1*) Петя и Вася пригласили одноклассников на свой день рожденья в дом Пети и посадили всех за круглый стол пить чай. Петя отметил для себя наименьшее число стульев, разделяющих его с каждым из приглашенных гостей, кроме Васи. Сложив полученные числа, он получил 60. Найти число стульев за столом, если известно, что оно четное. Какое наименьшее число стульев разделяло Петю и Васю?

1.8.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 11.2*) 1 января 1019 года количество золотых монет у купца Ивана относилось к количеству золотых монет у купца Петра как 3 : 7. Каждый день 1019 года, начиная со 2 января, у одного из них количество золотых монет увеличивалось (у Ивана — ровно на 7 монет, у Петра — ровно на 3 монеты), а у второго оставалось неизменным. Укажите ближайшую дату, когда отношение количества монет у Ивана к количеству монет у Петра снова может стать 3 : 7?

1.8.9. (*«Бельчонок», 2019, 11.2*) Пчелы продают мед двух видов: правильный и неправильный. Правильный мед (без стоимости горшка) ровно втрое дороже неправильного (без стоимости горшка). Кроме того, Пчелы принимают пустые горшки из-под меда в обмен на горшки с медом. У Винни-Пуха есть 28 пустых горшков. Он хочет обменять все эти горшки на несколько полных горшков так, чтобы пустых горшков у него не осталось. Сколько полных горшков сможет получить Винни, если 13 горшков с неправильным медом стоят столько же, сколько 6 горшков с правильным? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

1.8.10. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 11.4*) Сколько существует

а) прямоугольников;

б) прямоугольных треугольников

с целочисленными сторонами, у которых площадь численно равна периметру? (Равные фигуры считаются за одну.)

Глава 2

Алгебра и анализ

2.1 Числовые неравенства

Дополнительные задачи — в листке Числовые неравенства.

2.1.1. (*«Ломоносов», 2022, 11.1*) Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43 \cdot 44)^2} + \frac{89}{(44 \cdot 45)^2} \quad \text{или} \quad B = \frac{\sqrt[6]{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} + 1}}{\sqrt[3]{2}}\ ?$$

2.1.2. (*Всеросс., 2021, РЭ, 11.2*) Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^4 - y^4 > x$ и $y^4 - x^4 > y$. Какой знак может иметь произведение xy (укажите все возможности)?

2.1.3. (*Открытая олимпиада, 2017, 11.4*) Дана функция $f(x) = P(x)e^x$, где $P(x)$ — многочлен степени 1000 с положительными коэффициентами. Пусть $g(x)$ — сороковая производная $f(x)$. Докажите, что $\frac{g(1000)}{f(1000)} < 2^{40}$.

2.1.4. (*«Надежда энергетики», 2023, 11.5*) Какое число больше: 2023^{2023} или 2022^{2024}?

2.1.5. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 11.7*) Число $a > 0$ таково, что неравенства $2 \leqslant a^n \leqslant 4$ выполняются ровно при пяти натуральных значениях n. При скольких натуральных значениях n могут выполняться неравенства $4 \leqslant a^n \leqslant 8$?

2.1.6. (*Открытая олимпиада, 2019, 11.8*) Девочка Катя не любит число 239. Она выписала несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 239 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 30000.

2.2 Рациональные и иррациональные числа

Дополнительные задачи — в листке Рациональные и иррациональные числа.

2.2.1. (*Всесиб., 2017, 11.1*) Могут ли при каком-то значении x оба числа $\cos x + \sqrt{2}$ и $\cos 2x + \sqrt{2}$ быть рациональными?

2.2.2. (*«Росатом», 2017, 11.1*) Рациональные числа x и y таковы, что их логарифмы $\log_{\sqrt{2}} x$ и $\log_{\sqrt[3]{3}} y$ также рациональны и их сумма равна 73. Найти x и y.

2.2.3. (*Всеросс., 2023, ЗЭ, 11.1*) Число x таково, что $\sin x + \operatorname{tg} x$ и $\cos x + \operatorname{ctg} x$ — рациональные числа. Докажите, что $\sin 2x$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

2.2.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 11.3*) Дан треугольник, у которого длины сторон — числа рациональные. Докажите, что рациональным числом является

а) отношение R/r, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружности;

б) значение $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, где α, β, γ — углы треугольника.

2.2.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 11.5*) Существует ли такое действительное α, что оба числа $2\sin\alpha + \sqrt{3}$ и $2\cos\alpha - \sqrt{3}$ рациональны?

2.2.6. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.7*) Докажите, что число $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{2021}$ представимо в виде
$$n\sqrt{3} + m\sqrt{5} + k\sqrt{7} + l\sqrt{3\cdot 5\cdot 7},$$
где n, m, k, l — натуральные числа, и при этом $1 - 10^{-500} < \sqrt{35}\frac{l}{n} < 1$.

2.2.7. (*Всеросс., 2020, РЭ, 11.8*) Известно, что для некоторых x и y суммы $\sin x + \cos y$ и $\sin y + \cos x$ — положительные рациональные числа. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и n, что $m\sin x + n\cos x$ — натуральное число.

2.2.8. (*«Ломоносов», 2020, 11.8*) Известно, что m, n, k — различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,
$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$
Найдите минимальное из возможных значений суммы $k + 5m + n$.

2.3 Алгебраические преобразования и вычисления

Дополнительные задачи — в листке Алгебраические преобразования.

2.3.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 11.3*) Произведение положительных чисел a и b равно 1. Известно, что
$$(3a+2b)(3b+2a) = 295.$$
Найдите $a+b$.

2.3.2. (*САММАТ, 2021, 11.4*) Доказать, что число
$$(2020\cdot 2021)^2 + (2020\cdot 2021\cdot(2020\cdot 2021+1))^2 + (2020\cdot 2021+1)^2$$
является квадратом некоторого натурального числа. Решение получить алгебраически, не привлекая вычислительных средств (калькулятора).

2.3.3. (*Всесиб., 2016, 11.1*) Найти величину выражения $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{2}{1+xy}$, если известно, что $x \neq y$ и сумма первых двух слагаемых выражения равна третьему.

2.3.4. (*Всесиб., 2018, 11.1*) Пусть $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$ для некоторых действительных чисел a, b, c, d. Найти все возможные значения выражения $ab+cd$.

2.3.5. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.2*) Число $x=2^1+2^0+2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x+4\sqrt{2x-4}}+\sqrt{2x-4\sqrt{2x-4}}.$$

2.3.6. (*«Высшая проба», 2023, 11.2*) Различные действительные числа x, y, z таковы, что среди трёх чисел

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2},\quad \frac{y+z}{y^2+yz+z^2},\quad \frac{z+x}{z^2+zx+x^2}$$

какие-то два равны. Верно ли, что все эти три числа равны?

2.3.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 11.3*) Числа x, y удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{x^3+y}+\sqrt{y^3+x}=\sqrt{x^3+x}+\sqrt{y^3+y}.$$

Можно ли утверждать, что $x=y$?

2.3.8. (*«Росатом», 2021, 11.3*) При каких целых числах b и c выражение

$$\sqrt{4x^2+bx+c}$$

целое при любых целых x?

2.3.9. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.4*) Известно, что $2^{x+y+z}+(0{,}5)^{x+y+z}=a$, $2^x+(0{,}5)^y=b$, $2^y+(0{,}5)^z=c$. Выразите через a, b и c величину $2^z+(0{,}5)^x$.

2.3.10. (*«Бельчонок», 2022, 11.4*) Найдите все натуральные числа a, для которых число

$$\frac{a+1+\sqrt{a^5+2a^2+1}}{a^2+1}$$

также является натуральным.

2.3.11. (*Олимпиада КФУ, 2023, 11.5*) Рассмотрим алгебраическое выражение $F(a,\ldots,x)$, содержащее переменные, скобки и операции умножения и вычитания. Числовые константы не используются. Заменим один из знаков операции на $\perp$, другой — на $\bowtie$. Назовем полученное выражение «формулой». Например, формулой будет выражение $(a \bowtie b) \perp c$, причем один из знаков обозначает разность, а другой — умножение.

а) существует ли формула, которая при любых значениях переменных (и любом из смыслов знаков) дает значение 0?

б) существует ли формула, которая при любых значениях переменных дает значение 1?

2.3.12. (*«Росатом», 2020, 11.5*) Представить число 2020 в виде суммы кубов пяти целых чисел. Доказать, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

2.3.13. (*Всеросс., 2022, МЭ, 11.6*) Дан набор чисел $\{-1, -2, -3, \ldots, -26\}$. На доску выписали всевозможные подмножества данного набора, в которых есть хотя бы 2 числа. Для каждого выписанного подмножества вычислили произведение всех чисел, принадлежащих данному подмножеству. Чему равна сумма всех этих произведений?

2.3.14. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 11.6*) Действительные числа a и b таковы, что $\left(a + \sqrt{1+a^2}\right)\left(b + \sqrt{1+b^2}\right) = 1$. Найдите сумму $a + b$.

2.3.15. (*«Физтех», 2023, 11.6*) Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения xyz.

2.3.16. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 11.6*) Про вещественные числа m, n, x, y известно следующее:

$$\begin{cases} mx + ny = 4, \\ mx^2 + ny^2 = 2, \\ mx^3 + ny^3 = 6, \\ mx^4 + ny^4 = 38. \end{cases}$$

Чему равно $((m+n)(x+y) + 5xy)\,(m+n+x+y)$?

2.4 Квадратный трёхчлен

Дополнительные задачи — в листке Квадратный трёхчлен.

2.4.1. (*Олимпиада КФУ, 2019, 11.1*) Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами $(1, 1)$. Вычислите $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.

2.4.2. (*Всеросс., 2022, МЭ, 11.2*) Пусть α и β — действительные корни уравнения

$$x^2 - x - 2021 = 0,$$

причём $\alpha > \beta$. Обозначим

$$A = \alpha^2 - 2\beta^2 + 2\alpha\beta + 3\beta + 7.$$

Найдите наибольшее целое число, не превосходящее A.

2.4.3. (*Всеросс., 2022, РЭ, 11.2*) Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b+c) = P(a), \quad P(c+a) = P(b), \quad P(a+b) = P(c).$$

2.4.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 11.2*) Даны коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Его график пересекает оси координат в трёх точках, и через эти точки провели окружность, которая пересекла ось Oy ещё в одной точке. Найдите ординату этой четвертой точки.

2.4.5. (*Открытая олимпиада, 2020, 11.2*) График квадратного трёхчлена касается графика его производной. Докажите, что у трёхчлена нет корней.

2.4.6. (*«Надежда энергетики», 2016, 11.4*) Дан квадратный трехчлен $g(x)$, имеющий ровно один корень. Найдите этот корень, если известно, что и многочлен $g(ax + b) + g(cx + d)$ $(a \neq c)$ имеет ровно один корень.

2.4.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 11.5*) О некотором квадратном трехчлене известна следующая информация: его старший коэффициент равен единице, у него целые корни, а его график (парабола) пересекается с прямой $y = 2017$ в двух точках с целыми координатами. Можно ли по этой информации однозначно определить ординату вершины параболы?

2.4.8. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 11.6*) Квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что

$$P(P(x)) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 4.$$

Чему может равняться $P(8)$? Укажите все возможные варианты.

2.5 Последовательности

Дополнительные задачи — в листке Последовательности.

2.5.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 11.1*) Дана последовательность чисел x_1, x_2, $\dots$, такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \dots x_{2018}$?

2.5.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 11.1*) Дана последовательность

$$a_n = (-1)^{1+2+\ldots+n}.$$

Найдите $a_1 + a_2 + \ldots a_{2017}$.

2.5.3. (*Всесиб., 2019, 11.1*) Последовательность чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots, 12$ такова, что $a_1 = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}$ для всех натуральных $n = 1, 2, \ldots, 10$. Найти a_4.

2.5.4. (*«Росатом», 2018, 11.1*) Члены последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют соотношению $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $a_1 = a$ для любых n и целом a. При каких a число 637 является членом последовательности?

2.5.5. (*«Надежда энергетики», 2016, 11.2*) Для числовой последовательности x_0, x_1, $\dots$, x_n, x_{n+1}, $\dots$ выполняются соотношения

$$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$$

при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ Найдите каждый член x_n такой последовательности и значения сумм $S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$.

2.5.6. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.2*) Числовая последовательность a_0, a_1, a_2, $\ldots$ такова, что при всех целых неотрицательных числах m и n $(m \geqslant n)$ выполняется соотношение

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}\left(a_{2m} + a_{2n}\right).$$

Найдите a_{2021}, если $a_1 = 1$.

2.5.7. (*САММАТ, 2023, 11.3*) Последовательность $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, задана такими равенствами: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ и $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $n \geqslant 2$. Найдите такие n, при которых $|a_n| \leqslant 10^{-3}$.

2.5.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 11.3*) Дана бесконечная последовательность -1, 2, -3, 4, -5, 6, $\ldots$, $(-1)^n n$, $\ldots$. Между первым и вторым членом вписали одну единицу, между вторым и третьим членом две единицы, между третьим и четвертым членом три единицы и т. д. В итоге получили последовательность -1, 1, 2, 1, 1, -3, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, -5, $\ldots$ Найдите сумму первых 2018 членов полученной последовательности.

2.5.9. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 11.3*) Последовательность целых чисел a_n задается следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, $a_1 = 100$. Докажите, что любые два различных члена последовательности взаимно просты.

2.5.10. (*Открытая олимпиада, 2019, 11.3*) Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = -1$ и $a_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + 1)$ при $n \geqslant 1$. Найдите явную формулу этой последовательности.

2.5.11. (*«Росатом», 2022, 11.3*) Члены последовательности a_n удовлетворяют соотношению: $a_{n+2} = a_n - \dfrac{2}{a_{n+1}}, a_1 = 8, a_2 = 19$. Найти n, для которого $a_n = 0$.

2.5.12. (*САММАТ, 2021, 11.7*) Числовая последовательность x_n для всех номеров $n \geqslant m \geqslant 0$ удовлетворяет условию $x_{n+m} + x_{n-m} = \frac{1}{2}\left(x_{2n} + x_{2m}\right)$. Доказать, что при всех $n \geqslant m \geqslant 0$ справедливо равенство $x_{n+m} \cdot x_{n-m} = (x_n - x_m)^2$.

2.5.13. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 11.4*) Числовая последовательность такова, что $x_n = \frac{n+2}{n x_{n-1}}$ для всех $n \geqslant 2$. Найдите произведение $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2016} x_{2017}$, если $x_1 = 1$.

2.5.14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 11.4*) Последовательность a_n задана формулами

$$a_1 = \frac{4043}{2022}, \quad a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n.$$

Найдётся ли натуральное число n такое, что $|a_n| \leqslant \frac{2022}{2021}$? Обоснуйте свой ответ.

2.5.15. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 11.5*) Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 0{,}01$ и $(n+2)a_n = n a_{n+1}$ для $n = 1, 2, \ldots, 99$. Найдите сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

2.5.16. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 11.5*) Последовательность a_n задается следующим образом: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{10}{9}$. Докажите, что a_n принимает целые значения для бесконечного множества номеров n.

2.5.17. (*Всеросс., 2022, РЭ, 11.6*) Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ такова, что

$$a_n - a_k \geqslant n^3 - k^3$$

для любых n и k таких, что $1 \leqslant n \leqslant 2022$ и $1 \leqslant k \leqslant 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022}?

2.5.18. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 11.6*) Конечная последовательность чисел x_1, x_2, …, x_N обладает следующим свойством:

$$x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}} \quad \text{для всех } 1 \leqslant n \leqslant N-2.$$

Найдите максимально возможное число членов данной последовательности, если $x_1 = 20$; $x_2 = 16$.

2.5.19. (*«Ломоносов», 2023, 11.6*) Дана последовательность $\{a_n\}$, в которой $a_1 = 19$, а отношение каждого следующего элемента к предыдущему при всех целых $n \geqslant 2$ равно

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n^2+1)\cdot n}{(n-1)^2+1}.$$

Найдите отношение 2023-го члена последовательности к сумме её первых 2022 членов.

2.5.20. (*«Курчатов», 2020, 11.6*) Докажите, что существуют такие последовательности натуральных чисел a_n и b_n, что одновременно выполнены следующие условия:

- последовательности a_n и b_n являются неубывающими;
- последовательности $A_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$ и $B_n = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n}$ неограниченно возрастают;
- последовательность $C_n = \frac{1}{\max(a_1,b_1)} + \frac{1}{\max(a_2,b_2)} + \ldots + \frac{1}{\max(a_n,b_n)}$ ограничена.

2.5.21. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 11.7*) Дана такая числовая последовательность x_0, x_1, x_2, …, x_n, …, что $x_0 = 8$ и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ для всех $n \geqslant 0$. Докажите, что $64 < x_{2019} < 64{,}1$.

2.5.22. (*Открытая олимпиада, 2023, 11.7*) Последовательность x_n задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = x_n + \{x_n\}$ и начальным условием $x_0 = \frac{1}{67}$. Найдите $[x_{66000}]$.

$[a]$ — целая часть числа a, $\{a\}$ — дробная часть числа a.

2.5.23. (*Открытая олимпиада, 2020, 11.8*) Последовательность x_n задана условиями $x_1 = \frac{5}{3}$ и $x_{n+1} = 4 - \frac{3}{x_n}$. Найдите x_{100}.

2.6 Прогрессии

Дополнительные задачи — в листке Последовательности.

2.6.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 11.1*) Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2.6.2. (*ОММО, 2023.1*) Точка R_1 — середина отрезка ST; точка R_2 — середина отрезка SR_1; для каждого $n \geqslant 3$ точка R_n — середина отрезка $R_{n-2}R_{n-1}$. Пусть R — предельное положение точки R_n при $n \to \infty$. Найдите длину отрезка RT, если длина отрезка ST равна 15.

2.6.3. (*ОММО, 2021.1*) Сумма первых трёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых шести её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член d_1 удовлетворяет неравенству $d_1 \geqslant \frac{1}{2}$. Какое наименьшее значение может принимать d_1?

2.6.4. (*«Физтех», 2021, 11.1*) S — сумма первых 10 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6a_{12} > S+1$, $a_7a_{11} < S+17$. Укажите все возможные значения a_1.

2.6.5. (*«Бельчонок», 2018, 11.2*) В клетках таблицы 17×17 расставлены положительные числа. В каждой строке эти числа образуют арифметическую прогрессию, а в каждом столбце квадраты этих чисел образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что произведение числа в левом верхнем углу и числа в правом нижнем углу равно произведению чисел в двух других углах.

2.6.6. (*«Бельчонок», 2018, 11.2*) В клетках таблицы 19×19 расставлены положительные числа. В каждой строке эти числа образуют арифметическую прогрессию, а в каждом столбце квадраты этих чисел образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что произведение числа в левом верхнем углу и числа в правом нижнем углу равно произведению чисел в двух других углах.

2.6.7. (*«Шаг в будущее», 2016, 11.3*) Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $819 \cdot 6^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии.

2.6.8. (*«Росатом», 2020, 11.5*) Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ с ненулевой разностью такова, что последовательность $b_n = a_n \cdot \sin a_n$ также арифметическая прогрессия с ненулевой разностью. Найти возможные значения первого члена и разности прогрессии $\{a_n\}$, если для всех n справедливо равенство $2\cos^2 a_n = \cos a_{n+1}$.

2.6.9. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 11.5*) Сколько существует троек натуральных чисел (a, b, c), образующих арифметическую прогрессию ($a < b < c$), для которых числа $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ являются точными квадратами?

2.6.10. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 11.8*) Дана возрастающая последовательность из 8 действительных чисел. Диана выписала всевозможные последовательности из 4 чисел, идущих в ней подряд. Оказалось, что две из пяти новых последовательностей являются арифметическими прогрессиями с разностями 4 и 36 соответственно, а одна из последовательностей является геометрической прогрессией. Найдите наибольшее из данных 8 чисел. Укажите все возможные варианты.

2.7 Суммирование

Дополнительные задачи — в листке Суммирование.

2.7.1. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.1*) Найдите $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(13)$, если

$$f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 13.$$

2.7.2. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.2*) Найдите наибольшее натуральное число n, для которого верно неравенство

$$\left(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right) - 106(1 + 2 + \ldots + n) + 105 \leqslant 0.$$

2.7.3. (*САММАТ, 2022, 11.4*) Дана арифметическая прогрессия $a_1 = 25, a_2, a_3, \ldots, a_{2022} = 2025$. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{2021}} + \sqrt{a_{2022}}}.$$

2.8 Средние величины

Дополнительные задачи — в листке Среднее арифметическое и среднее геометрическое.

2.8.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 11.2*) Предприятие в течение года производит некий товар в количестве x_1 за январь, x_2 за февраль, $\ldots$, x_{12} за декабрь. Среднее производство товара с начала года вычисляется так:

$$\bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \bar{x}_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \ldots, \quad \bar{x}_{12} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_{12}}{12}.$$

Известно, что $\bar{x}_k < x_k$ при k от 2 до 6 и $\bar{x}_k > x_k$ при k от 7 до 12. В каком месяце среднее производство товара с начала года было наибольшим?

2.8.2. (*«Надежда энергетики», 2016, 11.3*) Шесть чисел записаны в ряд. Известно, что среди них есть единица и любые три соседних числа имеют одинаковое среднее арифметическое. Найдите максимальное значение среднего геометрического любых трех соседних в этом ряду чисел, если среднее арифметическое всех шести чисел равно A.

2.8.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 11.3*) Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 20, а среднее арифметическое любых девяти из этих чисел не меньше 17. Найдите максимально возможное значение наибольшего из этих чисел.

2.8.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 11.4*) Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

2.8.5. (*«Надежда энергетики», 2020, 11.4*) При обработке числовых данных часто приходится вычислять среднее арифметическое

$$S(x, y) = (x + y)/2$$

и решать уравнения, содержащие среднее арифметическое. Найдите все конечные (состоящие из конечного числа элементов) числовые множества X такие, что для любых a и b из X множество X содержит корень x уравнения $S(a, x) = b$.

2.8.6. (*Всесиб., 2016, 11.5*) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные действительные числа. Доказать, что найдётся натуральное k, $1 \leqslant k \leqslant n$, такое, что все k средних арифметических $\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}$, $\frac{a_2+\ldots+a_k}{k-1}$, $\ldots$, $\frac{a_{k-1}+a_k}{2}$, $\frac{a_k}{1}$ не превосходят $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

2.9 Целая и дробная части

Дополнительные задачи — в листке Целая и дробная части.

2.9.1. (*«Ломоносов», 2023, 11.1*) Вычислите

$$\left[\sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}}\right],$$

где $[t]$ — это целая часть числа t (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

2.9.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 11.1*) Какое число окажется на 2022-м месте в бесконечной последовательности 6, 7, 8, 9, 10, $\ldots$, если в ней удалить все квадраты и кубы каких-либо натуральных чисел (то есть удалить числа $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $\ldots$)?

2.9.3. (*«Надежда энергетики», 2019, 11.2*) Решите уравнение

$$x^2 - [x] = 2019,$$

в котором $[x]$ означает целую часть числа x.

2.9.4. (*«Надежда энергетики», 2020, 11.2*) Для каждого целого значения параметра K решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2[x] + y = 3/2, \\ ([x] - x)^2 - 2[y] = K. \end{cases}$$

Здесь $[x]$ означает целую часть числа x.

2.9.5. (*«Надежда энергетики», 2022, 11.2*) Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[\frac{x}{2022}\right] + \left[\frac{x+1}{2022}\right] + \cdots + \left[\frac{x+2021}{2022}\right] = \frac{\lg(2^x + 1) - \lg 6}{\lg 5 - \lg 10}.$$

Через $[a]$ здесь обозначена целая часть числа a.

2.9.6. (*«Росатом», 2018, 11.3*) Решить уравнение

$$\{2\sin x\} + [\cos 2x] = 0,$$

где $[a]$ целая часть числа a — наибольшее целое число не превосходящее a, $\{a\}$ — дробная часть числа a: $\{a\} = a - [a]$.

2.9.7. (*«Бельчонок», 2022, 11.5*) Найдите целую часть числа

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{623}+\sqrt{624}}.$$

2.9.8. (*«Росатом», 2017, 11.5*) При каких значениях a система

$$\begin{cases} 2[x] - 3[y] = 7, \\ 3x + 2y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение? Здесь $[z]$ — целая часть числа z — наибольшее челое число, не превосходящее z.

2.9.9. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.6*) Целой частью $[x]$ произвольного числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leqslant x$. Решите неравенство

$$\left[\cos^2\left(2 + 3^x\right)\right] \geqslant \frac{3^x}{2}.$$

2.10 Многочлены

Дополнительные задачи — в листке Многочлены.

2.10.1. (*«Надежда энергетики», 2021, 11.1*) Рассматривается многочлен

$$a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2,$$

в котором коэффициент c и сумма $a + b + c$ — нечетные целые числа. Могут ли корни такого многочлена быть целыми числами?

2.10.2. (*Открытая олимпиада, 2016, 11.1*) Мальчик Вася выписал в тетрадку ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ десятой степени. Затем у получившегося многочлена вычислил производную и выписал её ненулевые коэффициенты, и так далее, пока не получилась константа, которую он также выписал.

Какое наименьшее количество различных чисел у него могло получиться?

Коэффициенты выписываются с учётом знака, свободные члены также выписываются, если имеется одночлен вида $\pm x^n$, выписывается ± 1.

2.10.3. (*Открытая олимпиада, 2021, 11.1*) Кубический многочлен имеет три корня. Наибольшее его значение на отрезке $[4; 9]$ достигается при $x = 5$, а наименьшее — при $x = 7$. Найдите сумму корней многочлена.

2.10.4. (*Открытая олимпиада, 2022, 11.1*) Многочлен $P(x)$ таков, что $P(x^2)$ имеет $2n+1$ корней. Какое наименьшее количество корней может иметь производная многочлена $P(x)$?

(В обоих случаях имеются в виду различные корни, без учёта кратности.)

2.10.5. (*«Росатом», 2021, 11.1*) Петя написал на бумаге некоторый многочлен с неотрицательными целыми коэффициентами и думал, что Вася, задав только два вопроса Пете по телефону, никогда не сможет определить все коэффициенты многочлена. На первый Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x = 3$?» Петя ответил «49». На второй Васин вопрос: «Чему равно значение многочлена при $x = 49$?» был получен ответ «122455». Вася, немного подумав, назвал Пете все коэффициенты многочлена, который он написал. Какой многочлен придумал Петя?

2.10.6. (*Открытая олимпиада, 2019, 11.2*) Существует ли многочлен третьей степени такой, что все его корни положительны, а все корни его производной отрицательны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

2.10.7. (*Открытая олимпиада, 2023, 11.2*) $P(x)$ — кубический многочлен с рациональными коэффициентами. Его значение в точке $\sqrt{7}$ составляет 8, а значение его производной в этой же точке равно 56. Найдите все коэффициенты многочлена.

2.10.8. (*Всеросс., 2021, ЗЭ, 11.2*) Пусть $P(x)$ — ненулевой многочлен степени n с неотрицательными коэффициентами такой, что функция $y = P(x)$ — нечетная. Может ли оказаться так, что для различных точек A_1, A_2, …, A_n на графике G: $y = P(x)$ выполняются условия: касательная к графику G в точке A_1 проходит через точку A_2, касательная в точке A_2 проходит через точку A_3, …, касательная в точке A_n — через точку A_1?

2.10.9. (*Всеросс., 2023, МЭ, 11.3*) Многочлен $G(x)$ с действительными коэффициентами принимает значение 2022 ровно в пяти различных точках $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Известно, что график функции $y = G(x)$ симметричен относительно прямой $x = -8$.

1. Найдите $x_1 + x_3 + x_5$.
2. Какую наименьшую степень может иметь $G(x)$?

2.10.10. (*«Росатом», 2016, 11.3*) Для квадратного трехчлена $P_1(x) = x^2 - x - 6$ и натурального числа n определим многочлены $P_2(x) = P_1(2x)$, $P_3(x) = P_2(2x)$, …, $P_n(x) = P_{n-1}(2x)$. Решить уравнение $P_n(x) = 0$ и найти сумму корней многочлена

$$Q_n(x) = P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x).$$

2.10.11. (*«Курчатов», 2023, 11.3*) Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами имеют степень 10. Известно, что для любого действительного x верно

$$P(x) \cdot Q(x) \geqslant |P(x)|.$$

Какое наибольшее количество различных корней может быть у многочлена $P(x) \cdot Q(x)$?

2.10.12. (*Открытая олимпиада, 2015, 11.4*) Программа «Весёлый многочлен» может производить с многочленом $P(x)$ следующие операции:

1. превращать $P(x)$ в $xP'(x)$, где $P'(x)$ — производная многочлена $P(x)$;
2. делить коэффициент при x^k на k для любого натурального k;
3. прибавлять к имеющемуся многочлену любую константу;
4. убирать из многочлена одночлен старшей степени.

Может ли она за несколько таких операций получить из многочлена

$$x^{17} + 2x^{15} + 4x^9 + x^6 + 4x^3 + 2x + 1$$

многочлен $3x + 1$?

2.10.13. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 11.5*) Существует ли такой многочлен десятой степени, принимающий целые значения при всех целых аргументах, у которого старший коэффициент не превосходит по абсолютной величине 10^{-6}?

2.10.14. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 11.6*) У многочлена $P(x)$ все коэффициенты — целые неотрицательные числа. Известно, что $P(1) = 4$ и $P(5) = 152$. Чему равно $P(11)$?

2.10.15. (*«Высшая проба», 2023, 11.6*) Квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами таковы, что в совокупности они имеют 4 различных действительных корня, а также каждый из многочленов $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ имеет 4 различных действительных корня. Какое наименьшее количество различных действительных чисел может быть среди корней многочленов $P(x), Q(x)$, $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$?

2.11 Теорема Безу

Дополнительные задачи — в листке Многочлены.

2.11.1. (*«Росатом», 2023, 11.1*) Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(17) = P(23) = 2023$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0) > 0$.

2.11.2. (*«Росатом», 2023, 11.3*) Найти приведенный многочлен $P(x)$ (коэффициент при старшей степени x равен 1), для которого справедливо тождество $xP(x - 1) = (x - 3)P(x)$ по переменной x.

2.12 Целочисленная теорема Безу

Дополнительные задачи — в листке Многочлены.

2.12.1. (*«Росатом», 2020, 11.3*) Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b) - P(a)$ делится на $(b - a)$ при любых целых a, b, $a \neq b$. Известно, что уравнение $P(x) = 8$ имеет целый корень на полуоси $x \geqslant 8$ и $P(4) = 17$. Найти этот корень.

2.12.2. (*«Росатом», 2021, 11.1*) Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -3$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x-n)$, где n — его степень?». Получив ответы 1 и 6 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

2.12.3. (*«Надежда энергетики», 2018, 11.3*) Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами обладает свойствами

$$P(1) = 2019, \qquad P(2019) = 1, \qquad P(k) = k,$$

где число k целое. Найдите это число k.

2.13 Доказательство неравенств

Дополнительные задачи — в листках

- Доказательство неравенств
- Доказательство неравенств (new)

2.13.1. (*САММАТ, 2021, 11.3*) Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2 \cdot 2021 - 1}{2^{2021}} < 3.$$

2.13.2. (*«Бельчонок», 2020, 11.2*) Дана возрастающая положительная геометрическая прогрессия b_n. Известно, что

$$b_4 + b_3 - b_2 - b_1 = 9.$$

Докажите, что $b_5 + b_6 \geqslant 36$.

2.13.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 11.2*) Докажите неравенство

$$\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

для всех $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.13.4. (*САММАТ, 2022, 11.6*) Докажите, что для $a < 1$, $b < 1$, $c < 1$, $a+b+c \geqslant \frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant \frac{125}{216}.$$

2.13.5. (*«Бельчонок», 2022, 11.3*) На отрезке $[2;5]$ выбрали три разные точки, для каждой точки перемножили расстояния до двух других точек, получили положительные числа a, b, c. Докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{8}{9}.$$

2.13.6. (*«Бельчонок», 2023, 11.3*) Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{z^2}{x+y+2z}+\frac{x^2}{2x+y+z}+\frac{y^2}{x+2y+z}\geqslant\frac{xy}{x+y+2z}+\frac{yz}{2x+y+z}+\frac{zx}{x+2y+z}.$$

2.13.7. (*«Бельчонок», 2023, 11.3*) Известно, что $a, b, c > 0$ и $a+b+c=1$. Докажите, что

$$\frac{a}{3a^2+b^2+2ca}+\frac{b}{3b^2+c^2+2ab}+\frac{c}{3c^2+a^2+2bc}\leqslant\frac{3}{2}.$$

2.13.8. (*Открытая олимпиада, 2021, 11.4*) Положительные числа x, y и z таковы, что $xyz=8$ и $x\leqslant z$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\geqslant\frac{2x}{z}.$$

2.13.9. (*«Бельчонок», 2022, 11.5*) Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}.$$

2.13.10. (*Открытая олимпиада, 2023, 11.5*) Для произвольных вещественных чисел x, y, z, t, больших 7 докажите неравенство:

$$4\cdot\sqrt{(x-3)(y-4)(z-5)(t-6)}<(x-2)^2+(y-5)^2+(z-7)^2+(t-4)^2.$$

2.13.11. (*Всесиб., 2022, 11.5*) Доказать, что для любых действительных чисел x, y, z из интервала $[0,1]$ выполнено неравенство

$$\frac{x+y}{2+z}+\frac{x+z}{2+y}+\frac{y+z}{2+x}\leqslant 2.$$

2.13.12. (*Открытая олимпиада, 2018, 11.6*) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t=5$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{z^2+y^2}+\sqrt{z^2+t^2}+\sqrt{t^2+9}\geqslant 10.$$

2.13.13. (*Открытая олимпиада, 2015, 11.7*) Положительные числа a, b, c связаны соотношением $1+a+b+c=2abc$. Докажите неравенство

$$\frac{ab}{1+a+b}+\frac{bc}{1+b+c}+\frac{ca}{1+c+a}\geqslant\frac{3}{2}.$$

2.13.14. (*Открытая олимпиада, 2016, 11.8*) Докажите, что для положительных x, y, z выполняется неравенство

$$(x+y+z)(4x+y+2z)(2x+y+8z)\geqslant\frac{375}{2}xyz.$$

2.14 Функциональные вычисления, уравнения и неравенства

Дополнительные задачи — в листках

- Функциональные вычисления
- Функциональные уравнения и неравенства

2.14.1. (*САММАТ, 2021, 11.5*) Вычислить

$$y = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{2021 \text{ раз}}(\sin x)\ldots)),$$

если $f(\sin x) = \cos x$.

2.14.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 11.1*) Решите неравенство

$$f(f(x)) < (f(x))^2,$$

где $f(x) = 2x^2 - 1$.

2.14.3. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.1*) Функция $f(x)$ при всех действительных $x \neq 1$ удовлетворяет соотношению

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 4f(x) + 14x = 0.$$

Решите уравнение $4 \cdot 8^x = 7 + 2^{f(x)}$.

2.14.4. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.1*) Пусть $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Решите уравнение

$$f\left(f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)\right) = 0.$$

2.14.5. (*Олимпиада КФУ, 2020, 11.2*) Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет равенству $f(x)f(y) = f(x-y)$. Известно, что $f(21) = 1$. Чему равно $f(2020)$?

2.14.6. (*Олимпиада КФУ, 2022, 11.2*) Функция f для всех действительных x, y удовлетворяет неравенствам $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$ и $f(x) \geqslant x$. Найдите все такие функции $f(x)$.

2.14.7. (*«Надежда энергетики», 2021, 11.3*) Функция $F(x) = x^2 + px + q$ имеет ровно один вещественный корень, а функция $F(F(F(x)))$ — ровно три вещественных корня. Найдите все эти корни.

2.14.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 11.3*) Сколько различных корней имеет уравнение $f(f(f(x))) = 1$, если $f(x) = x - \frac{2}{x}$?

2.14.9. (*«Ломоносов», 2022, 11.3*) Есть функция

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(\ldots f(2022))))\ldots)),$$

где функция f применяется 1303 раза.

2.14.10. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.4*) Решите неравенство

$$\frac{2}{3}g\left(\frac{g(x)}{3}\right)+2\sqrt{2-\frac{3}{g(x)}}\geqslant 50g(g^2(x)),$$

где $g(x)=\frac{3}{x^2-4x+5}$.

2.14.11. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 11.5*) Приведите пример квадратного многочлена $f(x)$ и кубического многочлена $g(x)$ таких, что уравнению $f(g(x))=0$ удовлетворяют числа ±1; ±2; ±3.

2.14.12. (*«Бельчонок», 2018, 11.5*) Найдите все функции $f(x)$ такие, что для всех действительных x и y выполняется равенство

$$f\left(f(x)-y^2\right)=f\left(x^2\right)+y^2f(y)-2f(xy).$$

2.14.13. (*«Бельчонок», 2018, 11.5*) Найдите все функции $f(x)$ такие, что для всех действительных x и y выполняется равенство

$$f\left(x^3+y^3\right)=x^2f(x)+yf\left(y^2\right).$$

2.14.14. (*Открытая олимпиада, 2018, 11.5*) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $4f(x+y)=f(x)f(y)$ и условию $f(1)=12$.

2.14.15. (*«Физтех», 2022, 11.5*) Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

2.14.16. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 11.6*) Функция $f(x)$ такова, что $f(f(x))=x$ и $f(f(x+2)+2)=x$ для любого x. Найдите $f(2017)$, если $f(0)=1$.

2.14.17. (*«Курчатов», 2022, 11.6*) Назовем функцию f *хорошей*, если

- f определена на отрезке $[0,1]$ и принимает действительные значения;
- для всех $x,y\in[0,1]$ верно $|x-y|^2\leqslant|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$.

Найдите все хорошие функции.

2.14.18. (*Открытая олимпиада, 2017, 11.7*) Докажите, что не существует функции $f(x)$, определённой для всех $x > 1$ такой, что $f(x^2) = 2f(x)$ и $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = f(x) + 3$.

2.14.19. (*ОММО, 2023.9*) Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$2f(xy + 3) = f(x)f(y) - f(x) - 2y + a.$$

2.14.20. (*ОММО, 2022.9*) Функция F определена на множестве троек целых чисел и принимает действительные значения. Известно, что для любых четырёх целых чисел a, b, c и n выполняются равенства $F(na, nb, nc) = n \cdot F(a, b, c)$, $F(a+n, b+n, c+n) = F(a, b, c)+n$, $F(a, b, c) = F(c, b, a)$. Найдите $F(58, 59, 60)$.

2.15 Исследование функций

Дополнительные задачи — в листке Исследование функций.

2.15.1. (*САММАТ, 2021, 11.2*) Найти точку минимума и наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{x^8 - x^6 - 13x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}.$$

2.15.2. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.2*) Известно, что графики функций $f(x) = x^p$ и $g(x) = \ln x$ касаются (имеют общую точку, в которой касательные к обоим графикам совпадают). Найдите константу p и точку касания.

2.15.3. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.3*) Найдите множество значений функции $y = f^{[2019]}(x)$, где

$$f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{1 - \sin 3x},$$

$f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n \text{ раз}}(x)\ldots)$ для любого натурального числа n.

2.15.4. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.3*) Найдите множество значений функции $y = f^{[2019]}(x)$, где

$$f(x) = \log_4 \frac{\cos 2x - 2\cos^2 x}{\cos x - 1},$$

$f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n \text{ раз}}(x)\ldots)$ для любого натурального числа n.

2.15.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 11.4*) а) Исследуйте функцию

$$y = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$$

на четность (нечетность).

б) Найдите область определения и множество значений этой функции.

2.15.6. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 11.5*) На координатной плоскости построен график $y = \frac{2020}{x}$. Сколько на графике точек, касательная в которых пересекает обе координатные оси в точках с целыми координатами?

2.15.7. (*«Шаг в будущее», 2016, 11.6*) Найдите множество значений функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{6\log_{0{,}25}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\sin x+15}\right)}.$$

2.15.8. (*«Шаг в будущее», 2017, 11.6*) Найдите множество значений функции

$$f(x) = 1/g(64g(16g(\log_2 x))/5),$$

где $g(x) = \sqrt[5]{x} + 1/\sqrt[5]{x}$.

2.15.9. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 11.7*) Найдите множество значений функции $y = \log_{2x-1} x$.

2.15.10. (*«Шаг в будущее», 2016, 11.8*) На оси Oy найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = 0{,}5\,(x-(1/2))^2$, угол между которыми равен $45°$.

2.15.11. (*«Шаг в будущее», 2017, 11.8*) На прямой $x = 1$ найдите точку M, через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/4$, угол между которыми равен $45°$.

2.16 Наибольшие и наименьшие значения

Дополнительные задачи — в листке Наибольшее и наименьшее значения.

2.16.1. (*САММАТ, 2022, 11.1*) Найдите наименьшее значение функции

$$f(a,b,c) = \left(\frac{a+4b}{c}\right)^2 + \left(\frac{2b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{2b}\right)^2$$

при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

2.16.2. (*«Надежда энергетики», 2018, 11.1*) Три электрогенератора имеют мощности x_1, x_2, x_3, суммарная мощность всех трех не превосходит 2 МВт. В энергосистеме с такими генераторами некоторый процесс описывается функцией

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2x_3} + \sqrt{x_2^2 + x_1x_3} + \sqrt{x_3^2 + x_1x_2}.$$

Найдите максимальное и минимальное значения этой функции.

2.16.3. (*«Надежда энергетики», 2022, 11.1*) Энергетические затраты Пончика во время еды пропорциональны корню квадратному из объема съедаемой порции. Что выгоднее для экономии энергетического запаса: съесть свежую кулебяку как одну порцию или разделить ее на две? В какое максимальное количество раз (и в какую сторону) изменятся затраты при разделении кулебяки на две порции?

2.16.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 11.1*) Найдите такую пару чисел (x, y), при которых выражение

$$x^2 + y^2 + 5 - xy - 2x - 2y$$

принимает наименьшее возможное значение.

2.16.5. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.1*) Число b таково, что неравенство

$$\frac{a_1}{2a_2^2} + \frac{16a_3^4}{a_4^6} \geqslant b$$

выполняется для всех натуральных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, удовлетворяющих неравенствам

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant 100.$$

Найдите наибольшее значение b.

2.16.6. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.1*) Цех выпускает трансформаторы видов A и B. На один трансформатор вида A расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на трансформатор вида B — 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации трансформатора вида A прибыль составляет 12 тысяч рублей, вида B — 10 тысяч рублей. Сменный фонд железа составляет 481 кг, проволоки — 301 кг. Сколько трансформаторов видов A и B нужно выпускать за смену, чтобы получить наибольшую прибыль от продажи изделий, если расход ресурсов не должен превышать выделенных на смену фондов? Чему будет равна при этом наибольшая прибыль?

2.16.7. (*«Росатом», 2017, 11.1*) Отрезок $[2; 29]$ числовой оси разбит двумя точками a и b на три отрезка, длины которых x, y и z соответственно. Найти наибольшее возможное значение выражения $\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z$.

2.16.8. (*«Росатом», 2022, 11.1*) Петя пришел на остановку автобуса, едущего до школы с остановками равноотстоящими друг от друга, и, не увидев автобуса на дороге, решил пробежаться и сесть в автобус на следующих остановках по пути в школу. Бежал Петя так, что в любой момент времени мог заметить появление автобуса на дороге за своей спиной. Увидев автобус, Петя может повернуть назад или сохранить направление движения. Известно, что скорость движения автобуса в 4 раза превосходит скорость бега Пети, а увидеть автобус он может на расстоянии не более 1 км. Найти наибольшее значение расстояния между остановками, при котором независимо от того повернет Петя назад при обнаружении автобуса или нет, он сможет сесть в автобус на остановке. (время нахождения автобуса на остановке не учитывать)

2.16.9. (*«Надежда энергетики», 2023, 11.2*) Найдите максимальное значение величины

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

если известно, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3x + 8y + z.$$

2.16.10. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 11.2*) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = |x| + 2|x-1| + 3|x-2| + \ldots + 11|x-10|.$$

2.16.11. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 11.2*) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = (\arcsin x) \cdot (\arccos x)$.

2.16.12. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 11.2*) Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} + \frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right),$$

где x, y, z — ненулевые вещественные числа.

2.16.13. (*Открытая олимпиада, 2017, 11.2*) Найдите наименьшее значение выражения

$$x^2 + 4x\sin y - 4\cos^2 y.$$

2.16.14. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.2*) Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{3f(1) + 6f(0) - f(-1)}{f(0) - f(-2)},$$

если $f(x) = ax^2 + bx + c$ — произвольная квадратичная функция, удовлетворяющая условию $b > 2a$ и принимающая неотрицательные значения при всех действительных x.

2.16.15. (*«Росатом», 2016, 11.2*) Найти x, при котором выражение

$$\left(\sin^2 x - \cos x - 1/4\right)^2 + (\cos 2x + \cos x)^2$$

принимает наименьшее значение.

2.16.16. (*«Росатом», 2018, 11.2*) Найти наибольшее значение функции

$$y = \frac{24\pi x}{9\pi^2 + 16x^2}$$

на множестве решений уравнения

$$\sin x \cdot \cos 2x - 2\cos^3 x + \cos 2x - \sin x + 2\cos x = 1.$$

2.16.17. (*САММАТ, 2022, 11.9*) Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = x^8 - 8\sqrt{3}x^6 + 66x^4 - 72\sqrt{3}x^2 + 100.$$

2.16.18. (*Олимпиада КФУ, 2020, 11.3*) Неотрицательные числа a, b, c и d таковы, что

$$a + b + c + d = 4.$$

Найдите наибольшее возможное значение суммы $S = ab + bc + cd$ и определите все четвёрки (a, b, c, d) чисел, для которых это максимальное значение достигается.

2.16.19. (*Олимпиада КФУ, 2023, 11.3*) Обозначим $\min \frac{x-1}{x^2+1} = a$, $\max \frac{x-1}{x^2+1} = b$. Чему равны минимум и максимум функций

а) $\frac{x^3-1}{x^6+1}$;

б) $\frac{x+1}{x^2+1}$?

2.16.20. (*Открытая олимпиада, 2018, 11.3*) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{3x+5}$ и $y = (\ln x - 5)/3$.

2.16.21. (*Всесиб., 2020, 11.3*) Найти максимальную длину горизонтального отрезка с концами на графике функции $y = x^3 - x$.

2.16.22. (*«Росатом», 2018, 11.3*) Отрезок $[A; B]$ длины 5 двигается на координатной плоскости так, что его концы лежат на параболе $y = 2x^2$. Точка M — середина отрезка $[A; B]$. Найти минимально возможное значение расстояния точки M до оси абсцисс, а также абсциссу точки M, при которой оно достигается.

2.16.23. (*«Надежда энергетики», 2017, 11.4*) Про положительные числа a, b, c известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = 6abc$. Найдите наименьшее значение выражения $a + b + c$.

2.16.24. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 11.4*) Найдите множество значений выражения $\frac{ac}{ab+ac+bc}$ при условии, что a, b и c — положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $a \leqslant b \leqslant c$.

2.16.25. (*«Курчатов», 2022, 11.4*) Положительные числа a, b, c, d больше 1. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\log_a\left(ab^2\right) + \log_b\left(b^2c^3\right) + \log_c\left(c^5d^6\right) + \log_d\left(d^{35}a^{36}\right).$$

2.16.26. (*«Надежда энергетики», 2021, 11.5*) Напряженность электрического поля в точке (x, y) описывается функцией

$$E(x,y) = \left(\frac{20}{21}\right)^{x^2+y^2}.$$

Найдите максимальное значение напряженности в области, задаваемой неравенствами

$$|ax+y| \leqslant b, \quad |ax-y| \geqslant b,$$

где a и b — фиксированные вещественные числа.

2.16.27. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 11.5*) Когда Сергей пошел в кафе поужинать, в его кошельке были только банкноты в 1000 рублей. Он решил оставить официанту чаевые строго в размере от 5% до 15% от размера чека. Когда он получил чек, то понял, что не может осуществить задуманное, не получив сдачи. Найдите сумму наибольшего чека в рублях без учета копеек, который Сергей не может оплатить с учетом чаевых, используя только банкноты в 1000 рублей.

2.16.28. (*«Бельчонок», 2020, 11.5*) Даны 50 неотрицательных чисел $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{49} \leqslant a_{50}$. Сумма первых 48 чисел не превышает 50, и сумма двух последних также не превышает 50. Найдите максимальное возможное значение суммы квадратов этих чисел

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{49}^2 + a_{50}^2,$$

и укажите все последовательности чисел, для которых этот максимум достигается.

2.16.29. (*«Бельчонок», 2020, 11.5*) Даны 30 действительных чисел a_i $(1 \leqslant i \leqslant 30)$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} 0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{29} \leqslant a_{30}, \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{28} \leqslant 30, \\ a_{29} + a_{30} \leqslant 30. \end{cases}$$

Найдите максимальное возможное значение суммы квадратов этих чисел

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{29}^2 + a_{30}^2,$$

и укажите все последовательности чисел, для которых этот максимум достигается.

2.16.30. (*Открытая олимпиада, 2022, 11.5*) Положительные числа x, y и z таковы, что

$$x + y + z = 5.$$

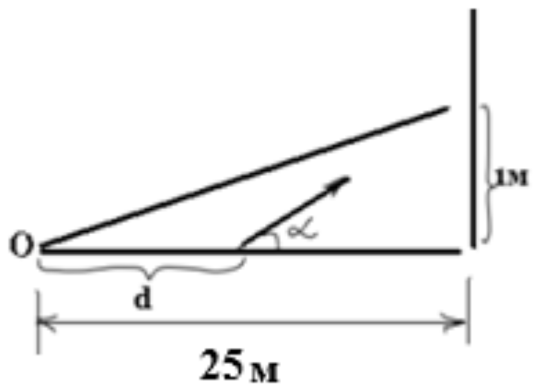
Какое наименьшее значение может принимать величина $x^2 + y^2 + 2z^2 - x^2y^2z$?

2.16.31. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.6*) Во всем мире популярна игра в хоккей. Многое в игре зависит от вратаря. Для отработки навыков вратарей и обеспечения тренировочного процесса, который бы не зависел от других игроков, создали шайбомет. Автомат можно настроить так, чтобы он выбрасывал шайбы с заданной временной частотой, скоростью и под определенным углом.

Пусть линия ворот находится на расстоянии 25 м от центральной точки O хоккейной площадки. Автомат установлен на расстоянии $d = 16$ м от точки O по направлению к воротам, скорость выброса шайбы равна $V_0 = 20$ м/с. Броски производятся в плоскости, перпендикулярной поверхности льда и линии ворот. При этом для обеспечения безопасности траектория вылетающих шайб должна, с одной стороны, находиться не выше прямой линии, соединяющей центр ледовой площадки O с точкой, находящейся в плоскости полета шайб, в плоскости ворот, и на расстоянии одного метра от поверхности льда, а с другой стороны — должна пересекать плоскость ворот по нисходящей ветви траектории.

Определите максимально возможное значение тангенса угла, под которым могут вылетать шайбы из шайбомета, если траектория движения шайбы, рассматриваемой как материальная точка, в плоскости ее полета в системе координат с центром в O и осью абсцисс, направленной вдоль поверхности льда, описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x = d + V_0 t \cos\alpha, \\ y = V_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

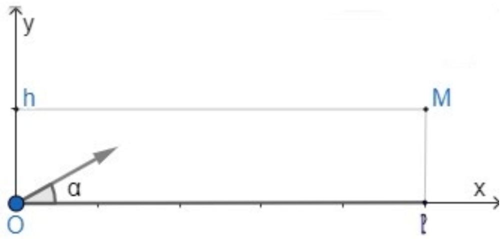


Для упрощения вычислений считать, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2.16.32. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.6*) Во всем мире популярна игра в хоккей. Многое в игре зависит от вратаря. Для отработки навыков вратарей и обеспечения тренировочного процесса, который бы не зависел от других игроков, создали шайбомет. Автомат можно настроить так, чтобы он выбрасывал шайбы с заданной временной частотой, скоростью и под определенным углом.

Пусть автомат установлен на льду на расстоянии $l = 12$ м от ворот. Броски производятся в плоскости, перпендикулярной поверхности льда и линии ворот, с некоторой фиксированной начальной скоростью выброса шайбы V_0 и под различными углами α к поверхности льда. Примем точку выброса за начало отсчета системы координат. Ось абсцисс направим перпендикулярно центральной линии хоккейной площадки в сторону ворот. Ось ординат — вверх, перпендикулярно поверхности льда. В распоряжении вратаря имеется ловушка для шайб, изображенная на рисунке точкой M. Траектория движения шайбы, находящейся в воздухе и рассматриваемой как материальная точка, в зависимости от времени t в указанной системе координат описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x = V_0 t \cos\alpha, \\ y = V_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$



Определите диапазон возможных значений квадрата начальной скорости выброса шайбы, при каждом из которых шайба попадает в ловушку и максимально возможная высота ловушки в моменты захвата шайбы не превосходит 1 м. Для упрощения вычислений считать, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2.16.33. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 11.7*) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 18x + 45}.$$

2.16.34. (*Всеросс., 2023, МЭ, 11.8*) Действительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 11, \\ b^2 + bc + c^2 = 11. \end{cases}$$

1. Какое наименьшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?

2. Какое наибольшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?

2.17 Целочисленная оптимизация

Дополнительные задачи — в листке Целочисленная оптимизация.

2.17.1. (*«Шаг в будущее», 2017, 11.1*) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 24 км, одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Затратив на путь от A до B не менее двух часов, велосипедист, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту A со скоростью в два раза большей первоначальной. Через 24 мин после своего отправления из пункта B велосипедист встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода найдите первоначальную скорость велосипедиста.

2.17.2. (*«Росатом», 2021, 11.3*) Сколько существует пар натуральных чисел (a, b), у которых $\text{НОК}(a, b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 17640$, а $\text{НОД}(a, b) = 12$? Среди всех таких пар указать ту, для которой $a + b$ принимает минимально возможное значение и найти это значение (пары (a, b) и (b, a) считать за одну).

2.17.3. (*«Росатом», 2021, 11.3*) Найти наибольшее значение выражения

$$F = \frac{(5n - 18)\text{НОД}\,(n + 9, n + 2)}{\text{НОК}\,(n + 9, n + 2)}$$

на множестве натуральных чисел. При каком n оно достигается?

2.18 Физические приложения производной и интеграла

2.18.1. (*«Росатом», 2021, 11.1*) Скорость движения тела на прямой изменяется по закону

$$v(t) = A|\sin(\alpha t)| \quad (t \geqslant 0)$$

с некоторыми константами $A > 0$ и $0 < \alpha < 0{,}2$. Известно, что за каждые 20 с точка проходит путь 2 м. Какой путь пройдет тело спустя 65 с после начала движения?

Глава 3

Алгебраические уравнения и неравенства

3.1 Уравнения высших порядков

Дополнительные задачи — в листке Уравнения высших порядков.

3.1.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 11.1*) Решите уравнение

$$x^{10} - 3x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

3.1.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 11.4*) Решите уравнение

$$(x+2)^4 + x^4 = 82.$$

3.1.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 11.1*) Решите уравнение

$$\left(x^4 + x + 1\right)\left(\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{0{,}01}\right) = 2\left(\sqrt[3]{5{,}12} + \sqrt[3]{0{,}03375}\right).$$

3.1.4. (*«Надежда энергетики», 2023, 11.3*) В уравнении

$$x^{2022} - 2x^{2021} - 3x^{2020} - \ldots - 2022x - 2023 = 0$$

можно как угодно переставлять коэффициенты при всех степенях x, кроме самой старшей. Можно ли такой перестановкой добиться, чтобы уравнение имело хотя бы два положительных корня?

3.2 Теорема Виета для кубического уравнения

3.2.1. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.1, 11.1*) Числа u, v, w являются корнями уравнения

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Найдите $u^9 + v^9 + w^9$.

3.2.2. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.1*) Докажите, что многочлен $P(t) = t^3 - 2t^2 - 10t - 3$ имеет три различных действительных корня. Найдите многочлен $R(t)$ третьей степени с корнями $u = x^2y^2z$, $v = x^2z^2y$, $w = y^2z^2x$, где x, y, z — различные корни многочлена $P(t)$.

3.2.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 10.3, 11.3*) Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 9.$$

При каких значениях a, b, c корнями уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ являются числа $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$ и $x_3 + x_1$?

3.2.4. (*Всеросс., 2023, РЭ, 11.2*) Даны различные вещественные числа a_1, a_2, a_3 и b. Оказалось, что уравнение

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = b$$

имеет три различных вещественных корня c_1, c_2, c_3. Найдите корни уравнения

$$(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) = b.$$

3.3 Системы алгебраических уравнений

Дополнительные задачи — в листке Системы алгебраических уравнений.

3.3.1. (*Всесиб., 2020, 11.1*) Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} xy + z + t = 1, \\ yz + t + x = 3, \\ zt + x + y = -1, \\ tx + y + z = 1. \end{cases}$$

3.3.2. (*«Физтех», 2022, 11.1*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

3.3.3. (*Всесиб., 2017, 11.2*) Решить в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8. \end{cases}$$

3.3.4. (*«Физтех», 2022, 11.2*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3.3.5. (*Всесиб., 2022, 11.2*) Найти все решения в действительных числах системы уравнений

$$\begin{cases} x(1+yz)=9, \\ y(1+xz)=12, \\ z(1+xy)=10. \end{cases}$$

3.3.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 11.3*) Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{32}{y^5}+\dfrac{48}{y^3}+\dfrac{17}{y}-15, \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{32}{z^5}+\dfrac{48}{z^3}+\dfrac{17}{z}-15, \\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{32}{x^5}+\dfrac{48}{x^3}+\dfrac{17}{x}-15. \end{cases}$$

3.3.7. (*Всесиб., 2023, 11.3*) Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} x^5=y^3+2z, \\ y^5=z^3+2x, \\ z^5=x^3+2y. \end{cases}$$

3.3.8. (*ОММО, 2022.5*) Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} a+c=4; \\ ac+b+d=6; \\ ad+bc=5; \\ bd=2. \end{cases}$$

3.3.9. (*САММАТ, 2022, 11.8*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{yz}}{y+z}, \\ y=\dfrac{\sqrt{xz}}{x+z}, \\ z=\dfrac{\sqrt{yx}}{y+x}. \end{cases}$$

3.3.10. (*Всесиб., 2019, 11.5*) Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} x^2+x-1=y, \\ y^2+y-1=z, \\ z^2+z-1=x. \end{cases}$$

3.3.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 11.5*) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106, \\ yz + 3y = z + 39, \\ zx + 3x = 2z + 438. \end{cases}$$

3.4 Иррациональные уравнения

Дополнительные задачи — в листке Иррациональные уравнения и системы.

3.4.1. (*САММАТ, 2021, 11.5*) Решить уравнение $5 + \sqrt{35 - 2\sqrt{45 - 2x}} = x$.

3.4.2. (*САММАТ, 2022, 11.5*) Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + 4x - 2} - \sqrt{x^2 + 6} = \sqrt[3]{x + 3} - \sqrt[3]{3x - 1}.$$

3.4.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 11.1*) Найдите сумму всех корней уравнения:

$$\sqrt{2x^2 - 2024x + 1023131} + \sqrt{3x^2 - 2025x + 1023132} + \sqrt{4x^2 - 2026x + 1023133} = \\ = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 2} + \sqrt{3x^2 - 3x + 3}.$$

3.5 Рациональные неравенства

3.5.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 11.1*) Решите неравенство

$$\frac{x - \sin 5}{\sin 6} < \frac{\sin 5}{x - \sin 6}.$$

3.6 Иррациональные неравенства

Дополнительные задачи — в листке Иррациональные неравенства.

3.6.1. (*«Шаг в будущее», 2016, 11.2*) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} < \frac{5}{6}.$$

3.7 Равносильное упрощение

Дополнительные задачи — в листке Равносильное упрощение.

3.7.1. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.2*) Решите неравенство

$$\frac{(|x-5|-|x-1|)\log_4(6-x)}{(9^x-12\cdot 3^x+27)\log_3 x} \leqslant 0.$$

3.8 Минимаксные задачи в алгебре

Дополнительные задачи — в листке Минимаксные задачи в алгебре.

3.8.1. (*«Бельчонок», 2022, 11.2*) Найдите для всех натуральных $n>1$ положительные решения системы

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ldots+nx_n=3, \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{2x_2}+\ldots+\dfrac{1}{nx_n}=3. \end{cases}$$

3.8.2. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.2*) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+8|=1, \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+8|=5. \end{cases}$$

3.8.3. (*«Надежда энергетики», 2022, 11.3*) Колхоз имени Лопе де Вега планирует построить на своих землях два одинаковых прямоугольных в плане розария и квадратный в плане свинарник. Сумма периметров розариев должна быть больше периметра свинарника на 16 м, а суммарная площадь розариев превышать площадь свинарника на 16 кв. м. Если такой план может быть реализован, то найдите длины сторон всех строений. Если план нереален, то объясните почему.

3.8.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 10–11.4*) Решите систему

$$\begin{cases} 2x-3y+\dfrac{1}{xy}=6, \\ 3z-6x+\dfrac{1}{xz}=2, \\ 6y-2z+\dfrac{1}{yz}=3. \end{cases}$$

3.8.5. (*ОММО, 2021.5*) Решите уравнение:

$$4\left(x^4+3x^2+3\right)\left(y^4-7y^2+14\right)=21.$$

3.8.6. (*ОММО, 2023.5*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{10}+x_2^{10}+\ldots+x_{92}^{10}=3^{10} \\ x_1^{33}+x_2^{33}+\ldots+x_{92}^{30}=3^{33}. \end{cases}$$

3.9 Плоские множества

Дополнительные задачи — в листке Плоские множества.

3.9.1. (*САММАТ, 2023, 11.5*) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4.$$

3.9.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 11.1*) Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$\log_x y + \log_y x > 2.$$

3.9.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 11.2*) Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\arcsin x + \arcsin y > \pi/2$.

3.9.4. (*«Росатом», 2019, 11.2*) Координаты $(x; y)$ вершин треугольника ABC являются решениями уравнения

$$|\cos(x-2y)| = -|\cos(x+y)|.$$

Найти наименьшее возможное значение площади треугольника.

3.9.5. (*«Росатом», 2019, 11.2*) На плоскости расположено множество параллелограммов, для которых

1) координаты $(x; y)$ их вершин являются решениями системы

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \cos(2x-y), \\ \cos(x-y) = \sin(x+2y); \end{cases}$$

2) координаты $(x; y)$ граничных точек являются решениями объединения

$$\left[\begin{aligned} &\sin(x+y) = \cos(2x-y), \\ &\cos(x-y) = \sin(x+2y). \end{aligned}\right.$$

Найти наименьшее возможное значение площади таких параллелограммов.

3.9.6. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.3*) Найдите площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(\sin y - \arcsin x)(\sin x + \arcsin y) \geqslant 0.$$

3.9.7. (*«Надежда энергетики», 2017, 11.3*) Окружность S_1, которая касается параболы $y = x^2$ в ее вершине, имеет диаметр 1. Каждая из последующих окружностей S_2, S_3, S_4, …касается внешним образом предыдущей окружности и ветвей параболы. Найдите радиус окружности S_{2017}.

3.9.8. (*Всесиб., 2015, 11.3*) Найдите множество, образуемое решениями систем уравнений

$$\begin{cases} ax+y=2a+3, \\ x-ay=a+4, \end{cases}$$

при всевозможных значениях параметра a. (Для каждого значения a находится решение (x,y) данной системы и все эти решения вместе составляют искомое множество точек на координатной плоскости.)

3.9.9. (*«Физтех», 2021, 11.3*) Пусть M — фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек $(x;y)$ таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 2, \\ a^2+b^2 \leqslant \min(2a+2b;2). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M.

3.9.10. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 11.4*) На координатной плоскости начерчена парабола $y=x^2$. На положительной полуоси Oy взяли точку A и через неё провели две прямые с положительными угловыми коэффициентами. Пусть M_1, N_1 и M_2, N_2 — точки пересечения с параболой первой и второй прямой соответственно. Найдите ординату точки A, если известно, что $\angle M_1ON_1 = \angle M_2ON_2$, где O — начало координат.

3.9.11. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.4*) Найдите площадь плоской фигуры, которая на координатной плоскости Oxy задана системой неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(y-x) \leqslant 23, \\ y+|x-2|+1 \leqslant 0. \end{cases}$$

3.9.12. (*«Росатом», 2017, 11.5*) Область D на координатной плоскости $k0b$ такова, что для любой точки $(k;b) \in D$ прямая с уравнением $y=kx+b$ имеет с треугольником ABC на координатной плоскости $x0y$ с вершинами $A(-1;2)$, $B(2;1)$, $C(-1;-5)$ хотя бы одну общую точку. Найти площадь пересечения D с полуполосой $k \in [-2;5]$, $b \geqslant 0$. Для каждого $k \in [-2;5]$ найти b, при котором прямая не пересекает треугольник.

3.9.13. (*«Росатом», 2022, 11.5*) На плоскости отмечено множество точек M, координаты x и y которых связаны соотношением

$$\sin(2x+3y) = \sin 2x + \sin 3y.$$

Круг радиуса R, расположенный на той же плоскости, не пересекается с множеством M.

Какие значения может принимать радиус такого круга?

Глава 4

Текстовые задачи

4.1 Движение

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.1.1. (*Всесиб., 2015, 11.1*) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 40 км, в 4 часа утра вышел пешеход, а в 7:20 утра выехал велосипедист, который догнал пешехода точно посредине между A и B, после чего оба продолжили движение. Из B в A в 8:30 выехал второй велосипедист с той же скоростью, что и первый, который встретился с пешеходом спустя час после встречи пешехода с первым велосипедистом. Найти скорости пешехода и велосипедистов.

4.1.2. (*«Шаг в будущее», 2016, 11.1*) Друзья Вася, Петя и Коля живут в одном доме. Однажды Вася и Петя пешком отправились на рыбалку на озеро. Коля остался дома, пообещав приятелям встретить их на велосипеде на обратной дороге. Первым домой отправился Вася, одновременно с ним навстречу на велосипеде выехал Коля. Петя с той же скоростью, что и Вася, отправился с озера домой в момент встречи Коли и Васи. Коля, встретив Васю, сразу же развернулся и довез его домой, а затем тотчас же снова на велосипеде двинулся по дороге к озеру. Встретив Петю, Коля вновь развернулся и довез приятеля до дома. В результате, время, затраченное Петей на дорогу с озера домой, составило $5/4$ от времени, затраченного Васей на тот же путь. Во сколько раз медленнее Вася добрался бы до дома, если бы весь путь он прошел бы пешком?

4.1.3. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.1*) Четыре лифта небоскреба, отличающиеся цветовой гаммой (красный, синий, зеленый и желтый) движутся в разных направлениях и с разной, но постоянной скоростью. Наблюдая за лифтами, некто включил секундомер, и, глядя на его показания, стал записывать: 36-я секунда — красный лифт догнал синий (двигаясь с ним в одном направлении). 42-я секунда — красный лифт разминулся с зеленым (двигаясь в разных направлениях), 48-я секунда — красный лифт разминулся с желтым, 51-я секунда — желтый лифт разминулся с синим, 54-я секунда — желтый лифт догнал зеленый лифт. На какой секунде от начала отсчета зеленый лифт разминется с синим, если за период наблюдения лифты не останавливались и не меняли направления движения?

4.1.4. (*«Росатом», 2019, 11.1*) На проволоку в форме окружности радиуса 6 нанизаны 5 одинаковых бусинок, равноотстоящих друг от друга. В некоторый момент времени 4 бусинки начали двигаться со скоростью $\pi/2$ (1/сек) в направлении против часовой стрелки, а оставшаяся бусинка — с той же скоростью в обратном направлении. После столкновения любых двух бусинок величина скорости их движения сохраняется, а направление мгновенно меняется на противоположное. Сколько столкновений произойдет между бусинками за 48 сек.?

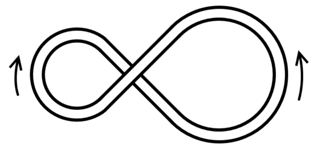
4.1.5. (*«Росатом», 2020, 11.1*) В бассейне, на соседних дорожках тренируются два пловца Петя и Костя. Петя проплывает дорожку 50 м за две минуты, Костя — за три. Вначале тренировки оба находились на линии старта у края дорожки, спустя 60 мин тренировка закончилась. Сколько раз за это время, включая начало, они находились на одинаковом расстоянии от линии старта?

4.1.6. (*САММАТ, 2023, 11.2*) Пешеход, велосипедист и мотоциклист едут по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход обгонял их на 4 км. В тот момент, когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист обгонял их на 6 км. На сколько километров велосипедист отставал от мотоциклиста в тот момент, когда мотоциклист обгонял пешехода?

4.1.7. (*«Бельчонок», 2022, 11.2*) На границе круглой поляны по часовой стрелке отмечены точки A, B, C, D. В точке A находится бельчонок Ан, в точке B — бельчонок Бим, в точке C стоит сосна, в точке D — дуб. Бельчата одновременно начали бежать, Ан к сосне, Бим к дубу. Они столкнулись в точке M, которая находится ближе к сосне, чем к дубу. Верно ли, что если бы Ан побежал из точки A к дубу, а Бим из точки B к сосне, Ан прибежал бы первым? Каждый бельчонок бежит по прямой и со своей постоянной скоростью.

4.1.8. (*«Курчатов», 2021, 11.2*) Из деревни в город шёл путник. В 14:00, когда путник прошёл четверть пути, из деревни в город выехал мотоциклист, а из города в деревню — грузовик. В 15:00 мотоциклист догнал путника, а в 15:30 встретил грузовик. Во сколько путник встретит грузовик?

4.1.9. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 11.2*) Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рис.). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. В момент, когда Джерри пробежал ровно один круг с начала пути, Том наконец догнал его. После этого они продолжили бежать в том же направлении. Окажется ли ещё когда-нибудь один из них над другим? Тома и Джерри считать точками, трассу — линией.



4.1.10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 11.2*) Из пункта A в пункт B по одной дороге с постоянными скоростями выехали велосипедист и мотоциклист. Один из них выехал в 13:00, а другой на час позже, при этом в пункт B они прибыли одновременно, хотя один из них сделал остановку в пути длительностью 2 часа. В котором часу они прибыли в B, если скорость мотоциклиста в два раза больше скорости велосипедиста?

4.1.11. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.4*) Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α по часовой стрелке едет автомобиль A, по трассе β против часовой стрелки едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы α, причём эта прямая касается трассы β. После старта автомобили начинают приближаться к точке касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за один час (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени из этого часа расстояние между автомобилями будет не меньше диаметра каждой трассы?

4.1.12. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.4*) Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4022 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4022 м. Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 32 минуты. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 55 минут, но чаще, чем каждые 64 минуты. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

4.1.13. (*«Ломоносов», 2020, 11.6*) Автомобили Нива и Тойота едут по кольцевой трассе испытательного полигона, четверть которой проходит по грунтовой дороге, а оставшаяся часть — по асфальтовой. Скорость Нивы на грунтовой дороге равна 80 км/ч, а на асфальтовой — 90 км/ч. Скорость Тойоты на грунтовой дороге равна 40 км/ч, а на асфальтовой — 120 км/ч. Автомобили одновременно стартуют в начале грунтовой части трассы и сначала едут по этой грунтовой части. На каком по счёту круге один из автомобилей впервые обгонит другой?

4.2 Работа

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.2.1. (*ОММО, 2022.3*) Бригада рабочих трудилась на заливке катка на большом и малом полях, причём площадь большого поля в 2 раза больше площади малого поля. В той части бригады, которая работала на большом поле, было на 4 рабочих больше, чем в той части, которая работала на малом поле. Когда заливка большого катка закончилась, часть бригады, которая была на малом поле, ещё работала. Какое наибольшее число рабочих могло быть в порядке?

4.2.2. (*«Надежда энергетики», 2019, 11.4*) Четыре бригады разрабатывали открытым способом месторождение угля в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году из-за метеоусловий в течение четырех месяцев работы не велись, а все остальное время на добыче бригады работали поочередно (по одной). Отношение времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества добытого угля соответственно равны: в первый год $4:1:2:5$ и 10 млн. т.; во второй год $2:3:2:1$ и 7 млн. т.; в третий год $5:2:1:4$ и 14 млн. т. Сколько угля добыли бы за 4 месяца эти четыре бригады, работая вместе?

4.3 Стоимость

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.3.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 11.1*) Салон сотовой связи продал 495 телефонов, базовая цена каждого из которых составляла 5000 руб. При этом каждый m-й продаваемый телефон был акционный и продавался со скидкой равной 500 руб. Покупатель каждого третьего акционного телефона получал, сверх того, и дополнительную скидку в размере 750 руб. Определите число m, если итоговая выручка салона от продажи телефонов составила 2 413 750 руб.

4.4 Части, доли, проценты

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.4.1. (*«Надежда энергетики», 2019, 11.1*) На факультете ядерного дирижаблестроения подсчитали, что в процентном отношении мальчиков на первом курсе больше, чем мальчиков на всем факультете. Кого (в процентном отношении) больше — первокурсников среди всех мальчиков факультета или всех студентов первого курса среди всех студентов факультета?

4.4.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 11.1*) В некотором регионе 60% работающих — бюджетники, и их зарплата в среднем на 20% ниже средней зарплаты по этому региону. На сколько процентов должна повыситься зарплата бюджетников, чтобы сравняться со средней зарплатой всех работающих?

4.4.3. (*«Бельчонок», 2022, 11.1*) Сугроб высотой 468 см за первый час уменьшился на 6 см по высоте, за второй час — на 12 см по высоте, $\ldots$, за k-й час — на $6k$ см по высоте. За некоторое время T сугроб растаял полностью. Какая часть сугроба по высоте растаяла за время $T/2$?

4.4.4. (*«Курчатов», 2020, 11.1*) В Курчатовской школе за каждой партой сидит ровно 2 человека. Известно, что ровно у 70% мальчиков сосед по парте — мальчик, а ровно у 40% девочек — девочка. Во сколько раз мальчиков больше чем девочек?

4.4.5. (*Всеросс., 2023, МЭ, 11.2*) В зоопарк для кормления трёх обезьян привезли апельсины, бананы и кокосы, фруктов всех трёх видов было поровну. Первую обезьяну кормили только апельсинами и бананами, причём бананов было на 40% больше, чем апельсинов. Вторую кормили только бананами и кокосами, причём кокосов было на 25% больше, чем бананов. А третью кормили только кокосами и апельсинами, причём апельсинов было в 2 раза больше, чем кокосов. Обезьяны съели все привезённые фрукты.

Пусть первая обезьяна съела a апельсинов, а третья обезьяна съела b апельсинов. Найдите a/b.

4.4.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 11.3*) Егоров решил открыть накопительный вклад для покупки автомобиля стоимостью 900 000 руб. Начальная сумма вклада равна 300 000 руб. Через месяц и далее ежемесячно Егоров планирует пополнять свой вклад на 15 000 руб. Банк начисляет ежемесячно проценты по ставке 12% годовых. Начисленные за месяц проценты перечисляются на вклад, и в следующем месяце на них также начисляются проценты. Через какое наименьшее число месяцев на вкладе будет сумма, достаточная для покупки автомобиля?

4.4.7. (*«Росатом», 2019, 11.3*) Ученикам на входе в школу разрешалось брать из коробки любое количество карандашей. Позже выяснилось, что не менее 60% карандашей, полученных любой группой из десяти человек, оказывались у одного ученика из этой группы. Доказать, что в школе есть ученик, забравший более 58% карандашей, взятых всеми школьниками из коробки.

4.4.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 11.7*) Несколько бизнесменов решили открыть фирму и делить всю прибыль на равные части. Одного из бизнесменов назначили директором. Однажды этот директор фирмы перевел часть прибыли со счета фирмы на свой собственный счет. Эта часть денег была втрое больше, чем часть каждого из остальных, если бы они разделили остаток прибыли между собой поровну. После этого директор покинул фирму. Следующий директор фирмы, один из оставшихся бизнесменов, сразу же поступил точно также, как и предыдущий и т. д. В конце концов, предпоследний директор фирмы перевел на свой собственный счет часть прибыли, которая также была в три раза больше, чем осталось у последнего бизнесмена. В результате этих распределений доходов последний бизнесмен получил денег в 190 раз меньше, чем первый директор фирмы. Сколько бизнесменов открыли эту фирму?

4.4.9. (*Открытая олимпиада, 2017, 11.8*) Родоначальник дворянского рода получил участок земли. Каждый из мужчин в роду, умирая, делил доставшуюся ему землю поровну между своими сыновьями. Если же сыновей у него не было, земля переходила к государству. Больше никто из членов рода никаким образом не получал или не лишался своей земли. Всего в роду было 180 человек. Какую наименьшую долю исходного участка мог получить кто-либо из членов рода?

4.5 Смеси и концентрации

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.5.1. (*ОММО, 2023.3*) На заводе имеются в достаточном количестве три сплава титана, алюминия и молибдена. Все сплавы с примесями. Процентное содержание компонентов в этих сплавах приведено в таблице.

	1	2	3
Молибден	8%	3%	8%
Титан	36%	21%	6%
Алюминий	55%	76%	15%

Из этих сплавов необходимо приготовить новый сплав, в котором алюминия должно быть не больше 38%, а молибдена — не меньше 5%. Какое наибольшее и какое наименьшее содержание титана (в процентах) может быть в этом сплаве?

4.6 Часы, время, календарь

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.6.1. (*«Росатом», 2021, 11.1*) Сколько раз за сутки секундная и минутная стрелки часов образуют с часовой стрелкой угол в 30°? (сутки начинаются в полночь).

4.6.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 11.2*) Юлианский календарь устроен так: каждый год с номером, кратным 4 — високосный; в обычном году 365 дней, а в високосном — на 1 больше; кроме этого, есть семидневная неделя. В результате существуют 14 видов года: невисокосный год, начинающийся в понедельник, во вторник, ..., в воскресенье; високосный год, начинающийся в понедельник, во вторник, ..., в воскресенье. Когда земляне поселились на планете Ялмез, то ввели календарь, в котором каждый год с номером, кратным v ($v > 1$) — високосный; в обычном году x дней, а в високосном — на 1 больше; неделя по-прежнему состоит из 7 дней. Оказалось, что в таком календаре ровно n видов года. Найдите все возможные значения n.

4.6.3. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.4*) После полудня прошло целое число минут, и в этот момент угол между часовой и минутной стрелками составил ровно 2 градуса. Какое время показывают часы, если это событие произошло впервые после полудня?

4.6.4. (*«Росатом», 2015, 11.4*) В гостиной находится двое часов с боем, показывающих разное время. Каждый час они производят звуковые сигналы в количестве, на которое указывает часовая стрелка, при этом минутная стрелка направлена на 12. Интервал между сигналами для первых часов 3 сек., для вторых — 4 сек. Часы начали и закончили бой одновременно. Петя, находясь в соседней комнате, насчитал 13 ударов, принимая совпадающие сигналы за один. Какое время показывали первые и вторые часы в момент первого удара боя? Продолжительность одного сигнала мала и ее можно не учитывать, качество сигнала у обоих часов одинаковое.

4.7 Разные текстовые задачи

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.7.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 11.1*) Маша живёт в квартире №290, которая находится в 4-м подъезде 17-этажного дома. На каком этаже живёт Маша? (Количество квартир одинаково во всех подъездах дома на всех 17 этажах; номера квартир начинаются с 1.)

4.7.2. (*«Надежда энергетики», 2017, 11.2*) На тепловой электростанции запас газа ежемесячно меняется следующим образом. Если в текущем месяце запас равен x м^3, то в следующем месяце он будет равен $c - 2x$ м^3. Может ли запас газа оказаться одинаковым в какие-то два различных месяца? Если это возможно, то какое значение имеет запас, одинаковый для двух разных месяцев?

4.7.3. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.3*) Петя задумал пять чисел. На доске он написал их попарные суммы: 7, 9, 12, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 29. Какие числа задумал Петя?

Глава 5

Тригонометрия

5.1 Тригонометрические преобразования и вычисления

Дополнительные задачи — в листке Тригонометрические преобразования и вычисления.

5.1.1. (*«Физтех», 2022, 11.1*) Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

5.1.2. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.2*) Найдите все значения x, при которых величины $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$ являются целыми числами. Для каждого найденного значения x вычислите $2015^{\operatorname{tg} x}$.

5.1.3. (*Всесиб., 2023, 11.2*) Тройка действительных чисел A, B, C такова, что

$$\sin A + \sin B + \sin C = 0 \quad \text{и} \quad \cos A + \cos B + \cos C = 0.$$

Найти значение выражения $\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A)$.

5.1.4. (*«Росатом», 2021, 11.2*) Доказать, что число $x_1 = -\sin\dfrac{\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Найти два других его корня.

5.1.5. (*«Бельчонок», 2022, 11.3*) Докажите, что

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

5.1.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 11.3*) Найдите значение дробей

$$A = \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \quad \text{и} \quad B = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma},$$

если числа α, β, γ таковы, что $A = 3B$.

5.1.7. (*Открытая олимпиада, 2015, 11.3*) Известно, что $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} b$ натуральные, $\operatorname{tg}(a+b)$ целое. Найдите $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} b$.

5.1.8. (*Открытая олимпиада, 2020, 11.3*) На доске написаны четыре различных положительных числа. Известно, что это $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $y \neq \operatorname{ctg} x$, но неизвестно, в каком порядке. Всегда ли можно определить, где именно какое число?

5.1.9. (*Открытая олимпиада, 2023, 11.3*) Вася написал на доске три числа: $\sin x$, $\sin 2x$ и $\sin 3x$ в каком-то порядке. Все числа оказались различными. Петя пытается определить, какое из чисел где. Определите, какое из трёх утверждений верно:

1. У Пети всегда получится определить, где $\sin x$, где $\sin 2x$, а где $\sin 3x$;
2. При некоторых значениях получится, а при некоторых нет.
3. Никогда не получится.

5.1.10. (*«Бельчонок», 2019, 11.4*) Каждый член арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 принадлежит промежутку $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$. Оказалось что $\sin a_1 + \sin a_4 = \cos a_2 + \cos a_5$. Какие значения может принимать a_3?

5.1.11. (*Открытая олимпиада, 2019, 11.4*) Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что

$$\sec x - \operatorname{cosec} x = \sqrt{15}.$$

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$.

5.1.12. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 11.5*) Для чисел x, y, z, t из интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется равенство

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + \cos 2t = 4\left(\cos x \cos y \cos z \cos t - \sin x \sin y \sin z \sin t\right).$$

Докажите, что сумма некоторых двух из чисел x, y, z, t равна сумме двух остальных.

5.1.13. (*ОММО, 2021.6*) Вычислите

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{2019\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{43}.$$

5.2 Тригонометрические уравнения

Дополнительные задачи — в листке Преобразования тригонометрических уравнений.

5.2.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 11.1*) Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{14 - x^2}(\sin x - \cos 2x) = 0$?

5.2.2. (*«Физтех», 2023, 11.1*) Решите уравнение

$$3\operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

5.2.3. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2023, 11.1*) Решите уравнение

$$1 - \sqrt{2}\sin x(\cos x + 2\sin x) + \sqrt{2}\cos x(2\cos x - \sin x) = 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right).$$

5.2.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 11.2*) Решите уравнение

$$\sin(\sin x) = \sin(1 + \cos x).$$

5.2.5. (*«Бельчонок», 2021, 11.2*) Решите уравнение:

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0.$$

5.2.6. (*«Бельчонок», 2021, 11.2*) Найдите все решения уравнения

$$2\cos\frac{x}{3} + \sqrt{5} = 2 - 2\left(\sqrt{5} - 1\right)\sin\frac{x}{6},$$

удовлетворяющие условию $\cos\frac{3x}{4} < 0$.

5.2.7. (*Всесиб., 2018, 11.2*) Решить уравнение:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2.$$

5.2.8. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2020, 11.2*) Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

5.2.9. (*«Росатом», 2017, 11.2*) Найти все x, для которых

$$\sin a_n x + \sin a_{n+1} x + \sin a_{n+2} x = 0$$

при всех n, где a_n — арифметическая прогрессия с разностью $d = \pi/10$ и первым членом $a_1 = \pi/2$.

5.2.10. (*«Росатом», 2017, 11.2*) Найти номера $n \geqslant 1$ членов арифметической прогрессии

$$a_n = \frac{5n+2}{3},$$

являющихся решениями уравнения $\sqrt{10}\cos(\pi a_n) = \sqrt{4\cos(\pi a_n) - \cos(2\pi a_n)}$.

5.2.11. (*«Росатом», 2018, 11.2*) Найти наименьшую длину отрезка числовой оси, содержащего три различных решения уравнения

$$\cos 2x - \sin 2x - \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin x + \sin x = 0.$$

5.2.12. (*«Росатом», 2021, 11.2*) Решить уравнение

$$(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})(\cos 2x + \sqrt{1+\cos^2 2x}) = 1.$$

5.2.13. (*«Росатом», 2020, 11.2*) Решить уравнение

$$\sin\left(x(\eta(x) - \eta(x-7\pi)\right) = 1 + \cos x,$$

где $\eta(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

5.2.14. (*Всеросс., 2020, МЭ, 11.3*) Решите уравнение:

$$|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y = 0.$$

5.2.15. (*Всеросс., 2022, МЭ, 11.3*) Пусть k_1 — наименьшее натуральное число, являющееся корнем уравнения

$$\sin k^\circ = \sin 334k^\circ.$$

1. Найдите k_1.
2. Найдите наименьший корень этого же уравнения, являющийся натуральным числом, большим k_1.

5.2.16. (*«Шаг в будущее», 2017, 11.4*) Решите уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg}^4 6x + 4\sin 4x \sin 8x - \cos 8x - \cos 16x + 2}{\sqrt{\cos x - \sqrt{3}\sin x}} = 0.$$

5.2.17. (*«Надежда энергетики», 2017, 11.5*) Для каждого натурального $n > 1$ пусть $S(n)$ означает число решений уравнения $\sin nx = \sin x$ на интервале $[0, \pi]$. Найдите явный вид зависимости $S(n)$ от n и определите, сколько раз $S(n)$ принимает значение 2017.

5.2.18. (*«Росатом», 2017, 11.5*) Целое число n таково, что $\cos\frac{(2n^2+n+1)\pi}{2} = 1$, а уравнение $\sin x \cdot \sin 5x \cdot \sin nx = 1$ имеет решение. Найти все такие n.

5.2.19. (*«Росатом», 2017, 11.5*) При каких целых положительных n уравнение

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx = 0$$

имеет не менее десяти решений на отрезке $[0; \pi/4]$?

5.2.20. (*Открытая олимпиада, 2018, 11.7*) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2017x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2017x.$$

5.3 Системы тригонометрических уравнений

Дополнительные задачи — в листке Системы тригонометрических уравнений.

5.3.1. (*«Бельчонок», 2020, 11.1*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin 7x + \sin 4x = 1, \\ \sin^2 7x + \sin^2 4x = 1. \end{cases}$$

5.3.2. (*«Бельчонок», 2020, 11.1*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin 9x + \sin 4x = 1, \\ \sin^2 9x + \sin^2 4x = 1. \end{cases}$$

5.3.3. (*«Росатом», 2018, 11.2*) Найти решения $(x; y)$ системы

$$\begin{cases} \sin(2x + y) = -1, \\ \cos(x - y) = 1 \end{cases}$$

в прямоугольнике $-\pi \leqslant x \leqslant \pi/2$, $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

5.3.4. (*«Росатом», 2022, 11.2*) Координаты $(x; y)$ точек в квадрате

$$\{(x; y)\colon\, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\}$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin 1, \\ \cos x + \cos y = \cos 1. \end{cases}$$

Сколько таких точек находится в квадрате? Найти координаты $(x; y)$ наиболее удаленной точки от центра квадрата.

5.3.5. (*«Шаг в будущее», 2016, 11.5*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4\cos^2 2x \cdot \sin^2 \dfrac{x}{3} + 4\sin\dfrac{x}{3} - 4\sin^2 2x \cdot \sin\dfrac{x}{3} + 1 = 0, \\ \sin\dfrac{x}{2} + \sqrt{\cos y} = 0. \end{cases}$$

5.3.6. (*«Физтех», 2022, 11.5*) Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

5.3.7. (*САММАТ, 2021, 11.9*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |\sin x| + 1 = \operatorname{tg} y, \\ |\sin y| + 1 = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

5.4 Тригонометрические неравенства

Дополнительные задачи — в листке Тригонометрические неравенства.

5.4.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 11.1*) Решите неравенство

$$2\cos(\cos x) > 1.$$

5.5 Обратные тригонометрические функции

Дополнительные задачи — в листке Обратные тригонометрические функции.

5.5.1. (*«Росатом», 2017, 11.2*) Решить уравнение $\cos(\arcsin(\sin x)) = \sin(\arccos(\cos 2x))$.

5.5.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 11.2*) Решите неравенство

$$\left(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9\right) \cdot \arccos(x-1) \leqslant \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right).$$

5.5.3. (*«Физтех», 2023, 11.3*) Решите уравнение

$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

5.5.4. (*«Ломоносов», 2020, 11.3*) Решите неравенство

$$\operatorname{tg}\arccos x \leqslant \sin\operatorname{arctg} x.$$

5.5.5. (*ОММО, 2022.6*) Решите уравнение

$$\arcsin \frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} + \arcsin \frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} = \arcsin \frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}.$$

5.6 Исследование тригонометрических функций

Дополнительные задачи — в листке Исследование тригонометрических функций.

5.6.1. (*«Росатом», 2020, 11.2*) При каких целых n функция $f(x) = \sin(nx) \cdot \cos \frac{6x}{n+1}$ имеет период $T = 5\pi$?

5.6.2. (*«Росатом», 2021, 11.2*) При каких целых n функция

$$f(x) = \sin nx \cdot \cos \frac{7x}{n^2}$$

имеет период $T = 9\pi$?

5.6.3. (*«Росатом», 2023, 11.4*) При каких тройках чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = y - x, \\ \sin y - \sin z = y - z, \end{cases}$$

выражение $\left| \dfrac{z}{1+xy} \right|$ принимает наибольшее возможное значение?

5.7 Минимаксные задачи в тригонометрии

Дополнительные задачи — в листке Минимаксные задачи в тригонометрии.

5.7.1. (*«Бельчонок», 2020, 11.1*) Решите уравнение

$$2 \sin \frac{9x}{8} \cos \frac{9x}{8} + \cos x = 2.$$

5.7.2. (*Открытая олимпиада, 2016, 11.2*) Решите уравнение или докажите, что оно не имеет решений:

$$3 \sin x + 4 \cos x = -5 - \frac{1}{|x|}.$$

5.7.3. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.2*) Решите уравнение

$$\sin^4(2025x) + \cos^{2019}(2016x) \cdot \cos^{2018}(2025x) = 1.$$

5.7.4. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.2*) Решите неравенство

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - \sqrt[4]{\sin y} - \sqrt{\frac{3}{\cos^2 x} + \sqrt{\sin y} - 6} \geqslant \sqrt{3}.$$

5.7.5. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.2*) Решите неравенство

$$\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geqslant 1.$$

5.7.6. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.2*) Решите неравенство

$$4\sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - 16\cos^2 x + 12} \geqslant 2.$$

5.7.7. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.2*) Решите неравенство

$$(5 - \cos 2(x+y) + 4\sin(x+y))\log_2\left(3^x + 3^{-x}\right) \leqslant 2.$$

5.7.8. (*«Росатом», 2015, 11.2*) Найти все решения $(x; y)$ уравнения

$$(2\sin(x+y) + 3)(\cos(2x-y) - 1) = -10,$$

лежащие на прямой $6x + 5y = 15\pi$.

5.7.9. (*«Росатом», 2023, 11.2*) Решить уравнение

$$\left(\sin^4 5x + 1\right)\left(\sin^4 3x + 1\right) = 4\sin^2 5x \cdot \sin^2 3x.$$

5.7.10. (*«Росатом», 2021, 11.2*) Решить неравенство:

$$\frac{\sin^2 x}{|\cos 2x|} \leqslant 2\,|\sin x| - |\cos 2x|\,.$$

Глава 6

Логарифмы

6.1 Логарифмические преобразования и вычисления

Дополнительные задачи — в листке Логарифмические преобразования и вычисления.

6.1.1. (*«Надежда энергетики», 2017, 11.1*) Финансовый аналитик энергетической компании после сложных расчетов с применением математических методов вычислил, что прибыль компании за 2016 год составила S миллионов рублей, где

$$S = \lg\left(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ\right) + \lg\left(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ\right) + \ldots + \lg\left(10^{20} \operatorname{tg} 2023^\circ\right).$$

Совет дикторов не удовлетворился этими сведениями и попросил аналитика указать не формулу вычисления S, а результат, т. е. конкретное число. Через 11 минут число S было получено. Каково оно?

6.1.2. (*«Росатом», 2017, 11.1*) При каких натуральных n уравнение

$$\log_2 x + \log_2 x^3 + \log_2 x^5 + \ldots + \log_2 x^{2n-1} = 5040$$

имеет рациональное решение?

6.1.3. (*Открытая олимпиада, 2022, 11.2*) Вася придумал новую операцию на множестве положительных чисел: $a * b = a^{\ln b}$. Найдите логарифм числа $\frac{(ab)*(ab)}{(a*a)(b*b)}$ по основанию $a * b$.

6.1.4. (*Открытая олимпиада, 2021, 11.5*) Вася выбрал четыре числа и для каждой пары вычислил логарифм большего по основанию меньшего. Получилось шесть логарифмов. Четыре из них равны 15, 20, 21 и 28. Какие значения может принимать наибольший из всех шести логарифмов?

6.1.5. (*«Физтех», 2023, 11.5*) Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6.1.6. (*«Физтех», 2021, 11.5*) Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

6.2 Показательные уравнения

Дополнительные задачи — в листке Показательные уравнения.

6.2.1. (*САММАТ, 2021, 11.4*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+1}+3^{3x}=4^y+3^{3y}-3, \\ 2^{y+1}+3^{3y}=4^x+3^{3x}-3. \end{cases}$$

6.2.2. (*«Росатом», 2017, 11.1*) Для каждой пары целых, положительных чисел (m, n), связанных соотношением

$$3m+2n=19,$$

найти решение x уравнения

$$2^{r_n x}+r_m\cdot 2^x-8=0,$$

где r_k — остаток от деления k на 3.

6.3 Логарифмические уравнения

Дополнительные задачи — в листке Логарифмические уравнения.

6.3.1. (*«Росатом», 2023, 11.4*) Решить уравнение

$$\left(\log_2 x+\sqrt{\log_2^2 x+1}\right)\left(\log_2(x-2)+\sqrt{\log_2^2(x-2)+1}\right)=1.$$

6.4 Логарифмические неравенства

Дополнительные задачи — в листке Логарифмические неравенства.

6.4.1. (*«Шаг в будущее», 2017, 11.2*) Решите неравенство

$$\log_x\left(36-60x+25x^2\right)<0.$$

6.4.2. (*«Физтех», 2022, 11.2*) Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4}\leqslant \log_{9x}\frac{1}{x^2}.$$

6.4.3. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.2*) Решите неравенство

$$\frac{\left(x+9-4\sqrt{x+6}\right)\log_2(x+1)}{(4^x-3\cdot 2^x+2)\log_5(5-x)}\geqslant 0.$$

6.4.4. (*«Шаг в будущее», 2017, 11.5*) Решите неравенство

$$\frac{\left(5\cdot 2^{-\log_x 3}-2{,}5\right)\sqrt{2-\sqrt{\log_x 3+1}}}{1+\sqrt{\log_x 3+8}} > \frac{\left(2^{-\log_x 3}-0{,}5\right)\sqrt{2-\sqrt{\log -x3+1}}}{\sqrt{\log_x 3+8}-3}.$$

6.5 Комбинированные уравнения и неравенства

Дополнительные задачи — в листках

- Комбинированные уравнения и неравенства. 1
- Комбинированные уравнения и неравенства. 2

6.5.1. (*«Росатом», 2018, 11.1*) Найти x, при которых числа $\log_2(6\sin x)$, $\log_{2\cos x}(6\sin x)$ и $\log_{2\cos x} 4$ могут быть тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

6.5.2. (*«Росатом», 2023, 11.2*) Решить уравнение

$$\log_{\sin x}\sin 2x+\log_{\sin 2x}\sin 3x+\log_{\sin 3x}\sin x=\log_{\sin 2x}\sin x+\log_{\sin 3x}\sin 2x+\log_{\sin x}\sin 3x.$$

6.5.3. (*САММАТ, 2021, 11.6*) Решите уравнение $2\cdot\cos\left(2\cdot 2021^x\right)-3\cdot\cos(2021^x)+1=0$.

6.5.4. (*«Шаг в будущее», 2016, 11.4*) Решите неравенство

$$\left(\log_x^2(7x-6)-4\right)(\cos\pi x-1)\leqslant 0.$$

6.5.5. (*Открытая олимпиада, 2016, 11.6*) Найдите суммарную длину промежутков на числовой оси, на которых выполняются неравенства $x<1$ и $\sin\log_2 x<0$.

6.6 Функции в уравнениях и неравенствах

Дополнительные задачи — в листках

- Функции в уравнениях и неравенствах. 1
- Функции в уравнениях и неравенствах. 2

6.6.1. (*САММАТ, 2022, 11.2*) Решите неравенство

$$4\left(1-\ln\left(\frac{x}{2021}\right)\right)^{2020}+\left(1+\ln\left(\frac{x}{2021}\right)\right)^{2022}\geqslant 2^{2022}.$$

6.6.2. (*Открытая олимпиада, 2015, 11.1*) Решите систему:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right| + \dfrac{4x^2}{15} - \dfrac{16}{15} = 0, \\ \dfrac{\ln\left(x+\frac{2}{3}\right)}{\ln 7} + 12x - 5 = 0. \end{cases}$$

6.6.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 11.2*) Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2023}+\sqrt{2022}\right)^x - \left(\sqrt{2023}-\sqrt{2022}\right)^x = \sqrt{8088}.$$

6.6.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 10–11.3*) Сколько корней имеет уравнение

$$2^{\lg\left(x^2-3\right)} = \lg 2^{x^2-2}?$$

6.6.5. (*«Физтех», 2022, 11.3*) Решите неравенство

$$5^{\log_{12}\left(x^2+18x\right)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

6.6.6. (*«Физтех», 2023, 11.3*) Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x-1)\ln(2x) + (\ln 2)\ln x \geqslant 0.$$

6.6.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 11.5*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x = \sqrt{y}, \\ 2^{-y} = x^3. \end{cases}$$

6.6.8. (*«Ломоносов», 2022, 11.5*) Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c. Найдите все значения t, при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 100t; \quad b = 2^t - 16; \quad c = \sin t - \frac{1}{2}$$

положительно.

6.6.9. (*«Курчатов», 2021, 11.6*) Даны положительные действительные числа a, b, c. Известно, что

$$(a-b)\ln c + (b-c)\ln a + (c-a)\ln b = 0.$$

Докажите, что $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$.

Здесь $\ln x$ — это натуральный логарифм (логарифм числа x по основанию e).

6.7 Минимаксные задачи с логарифмами

Дополнительные задачи — в листке Минимаксные задачи и логарифмы.

6.7.1. (*«Ломоносов», 2023, 11.3*) Решите уравнение

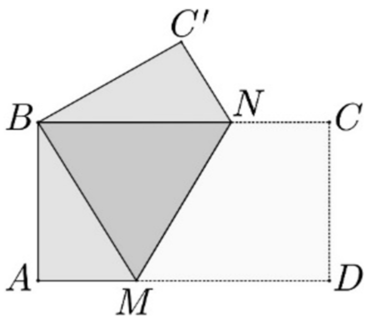
$$\log_2(|x^2-2|^3+1)+\sqrt{4x^4-3x^2+5}=\sqrt{2x^4+5x^2-3}.$$

Глава 7

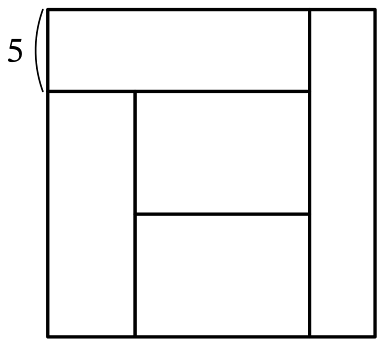
Планиметрия

7.1 Прямоугольники и квадраты

7.1.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 11.1*) Прямоугольник $ABCD$ сложили вдоль линии MN так, что точки B и D совпали. Оказалось, что $AD = AC'$. Найдите соотношение сторон прямоугольника.



7.1.2. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 11.2*) Квадрат разрезали на пять прямоугольников равной площади, как изображено на рисунке. Ширина одного из прямоугольников равна 5. Найдите площадь квадрата.



7.1.3. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.5*) На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат со стороной 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с диагональю длины 1, а прокантовали его 7 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

7.1.4. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.7*) Пьедестал олимпиады «Последняя надежда математики» состоит из трех ступеней. В вертикальном разрезе он представляет собой три состыкованных прямоугольника, длины которых образуют арифметическую прогрессию, а высоты — геометрическую. Площади прямоугольников равны соответственно 15, 60, 180 дм^2, а их общая длина составляет 30 дм. Найдите размеры пьедестала, учитывая, что ступень с самой маленькой длиной имеет и самую маленькую высоту.

7.1.5. (*Всеросс., 2023, РЭ, 11.7*) Назовем два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника.

7.2 Прямоугольный треугольник

Дополнительные задачи — в листке Прямоугольный треугольник.

7.2.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 11.4*) У Сени есть три прямых палки длиной 24 сантиметра каждая. Сеня разломил одну из них на две части так, что из двух кусков этой палки и двух целых палок он смог выложить контур прямоугольного треугольника. Сколько квадратных сантиметров составляет площадь этого треугольника?

7.2.2. (*«Бельчонок», 2023, 11.2*) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На его катете BC длины 26 как на диаметре построена окружность ω. Из точки A к этой окружности проведена касательная AP, отличная от AC. Перпендикуляр PH, опущенный на отрезок BC, пересекает отрезок AB в точке Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH : CH = 4 : 9$

7.2.3. (*«Физтех», 2023, 11.2*) Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC — в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

7.2.4. (*«Шаг в будущее», 2022, 11.3*) Точка M принадлежит катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, причем $AM = 2$, $MC = 16$. Отрезок MH — высота треугольника AMB. Точка D расположена на прямой MH так, что угол ADB равен 90°, и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину отрезка BL, если L — точка пересечения BD и AC, а тангенс угла ACH равен $1/18$.

7.2.5. (*Всеросс., 2020, РЭ, 11.3*) В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. На стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH — точка E, а на отрезке CH — точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90°$.

7.2.6. (*«Бельчонок», 2018, 11.4*) Дан прямоугольный треугольник ABC. На продолжении гипотенузы BC выбрана точка D так, что прямая AD — касательная к описанной окружности ω треугольника ABC. Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Оказалось, что биссектриса угла ADE касается окружности ω. В каком отношении точка C делит отрезок AE?

7.2.7. (*«Бельчонок», 2021, 11.4*) В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. Точки X и Y — центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и CBH соответственно. Прямая XY пересекает катеты AB и BC в точках P и Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH = a$.

7.2.8. (*Всесиб., 2019, 11.4*) В прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы BC, а точки P и T делят катеты AB и AC в отношении $AP : PB = AT : TC = 1 : 2$. Обозначим за K точку пересечения отрезков BT и PM, за E — точку пересечения отрезков CP и MT, и за O — точку пересечения отрезков CP и BT. Доказать, что четырёхугольник $OKME$ — вписанный.

7.2.9. (*«Надежда энергетики», 2016, 11.5*) При благоустройстве городского сада «Пифагор» сначала были проложены три аллеи, образующие прямоугольный треугольник с острым углом α. Следующие аллеи проложили как внешние квадраты на сторонах этого треугольника (получилась фигура, иллюстрирующая теорему Пифагора и называемая пифагоровыми штанами). Наконец, на третьем этапе соединили прямолинейными аллеями центр наибольшего квадрата с вершиной прямого угла, а центры двух меньших квадратов друг с другом. Определите, какая из аллей третьего этапа имеет большую длину. При каком значении угла α их длины различаются сильнее всего?

7.2.10. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.6*) Господин Сыр Жуй, большой поклонник Фэн-шуй, владеет парком, представляющим собой прямоугольный треугольник с острым углом $\alpha = \frac{11}{24}\pi$ и гипотенузой длины 640 м и желает устроить в нем лабиринт аллей. Для этого прокладываются аллеи, идущие вдоль медианы и высоты, опущенных из прямого угла. Эти аллеи вместе с отсекаемой частью гипотенузы образуют новый прямоугольный треугольник. В нем из прямого угла снова прокладываются аллея-высота и аллея-медиана и т. д.

1. Найдите длину аллеи-гипотенузы 5-го треугольника.

2. Найдите площадь 5-го треугольника.

7.3 Биссектрисы, медианы, высоты

Дополнительные задачи — в листке Медианы, высоты, биссектрисы.

7.3.1. (*Всесиб., 2023, 11.1*) В треугольнике ABC биссектрисы углов BAC и BCA пересекают стороны BC и AB в точках K и P соответственно. Известно, что длина стороны AC равна сумме длин отрезков AP и CK. Найдите величину угла ABC.

7.3.2. (*«Бельчонок», 2022, 11.2*) На продолжении за точку C стороны BC равностороннего треугольника ABC выбрана точка M, через неё проведена прямая, параллельная AC. Эта прямая пересекает продолжение стороны AB в точке N. Медианы треугольника BNM пересекаются в точке O. Точка D — середина AM. Найдите углы треугольника ODC.

7.3.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 11.3*) Точки H, K и M лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, в котором AH является высотой. Докажите, что AH служит биссектрисой угла KHM тогда и только тогда, когда AH, BK и CM пересекаются в одной точке.

7.3.4. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.3*) Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон треугольника в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Найдите угол $A_1C_1B_1$ и длину отрезка A_1B_1, если $AC = 5$, $BC = 2$, а угол ACB равен $\arccos\frac{13}{20}$.

7.3.5. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.3*) Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, причем $AO : OA_1 = 2 : 1$. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает прямую AB в точке C_1. Найдите угол $B_1A_1C_1$ и длину отрезка A_1C_1, если $AB = 2$, $AC = 4$.

7.3.6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 11.3*) Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

7.3.7. (*Олимпиада КФУ, 2019, 11.4*) В треугольнике ABC проведены две высоты AA' и CC'. Найдите величину угла B, если известно, что $AC = 2 \cdot A'C'$.

7.3.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 11.4*) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK и CM. Известно, что середины отрезков AB, BC и ML лежат на одной прямой. Найдите AB, если $BK = 4$, а $KC = 5$.

7.3.9. (*Всесиб., 2016, 11.4*) В треугольнике ABC отрезки AK, BL и CM — высоты, H — их точка пересечения, S — точка пересечения MK и BL, P — середина отрезка AH, T — точка пересечения прямой LP и стороны AB. Доказать, что прямая ST перпендикулярна стороне BC.

7.3.10. (*Всесиб., 2022, 11.4*) Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC, точка M — середина стороны AC. На стороне AB выбрана точка K такая, что прямая BH делит отрезок CK пополам. Доказать, что отрезки MH и CK перпендикулярны.

7.3.11. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.4*) В треугольнике ABC с углом A, равным $60°$, проведена биссектриса AD. Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $2\sqrt{3}/3$. Найдите длину отрезка BM, где M — точка пересечения отрезков AD и BO, если $AB = 1$.

7.3.12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 11.4*) В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{13}$.

7.3.13. На сторонах BC, CA и AB неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки L, M и N соответственно. Биссектриса угла ABC и серединный перпендикуляр к отрезку NL пересекаются в точке P. Известно, что $\angle ABC = 135^\circ$, $AN = NM = ML = LC = 1$. Найдите длину отрезка MP.

7.3.14. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 11.6*) (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 11.6*) В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AM и CN, а также высоты AP и CQ. Известно, что $MP = NQ$ и что радиус окружности, касающейся стороны AC и продолжений сторон BA и BC, равен 1. Найдите периметр треугольника ABC.

7.3.15. (*ОММО, 2022.8*) В треугольнике ABC сторона $AC = 42$. Биссектриса CL делится точкой пересечения биссектрис треугольника в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Найдите длину стороны AB, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 14.

7.4 Теоремы Менелая и Чевы

Дополнительные задачи — в листке Теорема Менелая.

7.4.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 11.4*) Пусть все углы треугольника ABC меньше 120° и $AB \neq AC$. Рассмотрим точку T внутри треугольника, для которой $\angle BTC = \angle CTA = \angle ATB = 120^\circ$. Пусть прямая BT пересекает сторону AC в точке E, а прямая CT пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC пересекаются в некоторой точке M, причём $MB : MC = TB : TC$.

7.5 Параллелограмм

Дополнительные задачи — в листке Параллелограмм.

7.5.1. (*«Надежда энергетики», 2022, 11.4*) На каждой из сторон параллелограмма выбрано по произвольной точке. Точки на соседних сторонах параллелограмма соединены отрезками прямых. В результате от параллелограмма оказываются отсеченными четыре треугольника. Вокруг каждого из этих треугольников описана окружность. Докажите, что центры этих окружностей являются вершинами некоторого параллелограмма.

7.5.2. (*«Росатом», 2020, 11.6*) Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Прямая CM наклонена к основанию AD под углом 30°. Вершина B равноудалена от прямой CM и вершины A. Найти углы параллелограмма. Найти площадь параллелограмма, если длина основания AD равна 2.

7.6 Трапеция

Дополнительные задачи — в листке Трапеция.

7.6.1. (*Открытая олимпиада, 2018, 11.1*) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 16$ и $BC = 10$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 10. Найдите длину BD.

7.6.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 11.3*) Дана трапеция $ABCD$ и точка M на боковой стороне AB, такая, что $DM \perp AB$. Оказалось, что $MC = CD$. Найдите длину верхнего основания BC, если $AD = d$.

7.6.3. (*«Физтех», 2022, 11.4*) Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ — прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

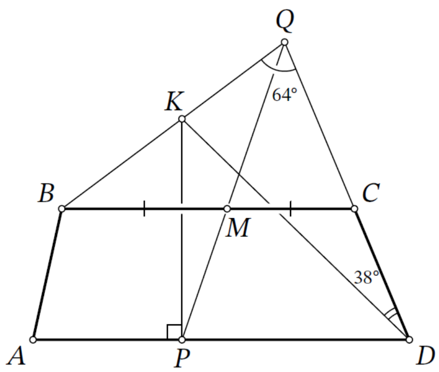
7.6.4. (*«Курчатов», 2021, 11.4*) Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. На AB отметили точку E такую, что прямая EO параллельна основаниям трапеции. Оказалось, что EO — биссектриса угла CED. Докажите, что трапеция — прямоугольная.

7.6.5. (*Открытая олимпиада, 2017, 11.5*) Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$, CD — меньшее основание, H — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на AB. Докажите, что биссектриса угла A пересекает отрезок CH.

7.6.6. (*Открытая олимпиада, 2019, 11.5*) В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна диагонали AC. На меньшей дуге AD описанной окружности треугольника ABD выбрана точка E так, что $AB = AE$. Найдите $\angle CED$.

7.6.7. (*Всеросс., 2023, МЭ, 11.6*) Точка M — середина основания BC трапеции $ABCD$. На основании AD выбрана точка P. Луч PM пересекает луч DC в точке Q. Перпендикуляр к основанию AD, проведённый через точку P, пересекает отрезок BQ в точке K.

Известно, что $\angle KQD = 64°$ и $\angle KDQ = 38°$. Сколько градусов составляет угол KBC?



7.6.8. (*Открытая олимпиада, 2023, 11.6*) В трапеции $ABCD$ длины диагонали BD и основания BC равны. Точка X на луче BD такова, что $BX = CX$. На прямой CX взята точка Y такая, что $AB = BY$. Известно, что $\angle DBC = \alpha°$, $\angle ABD = \beta°$. Найдите градусную меру угла $\angle BYC$.

7.7 Общие четырёхугольники

7.7.1. (*«Шаг в будущее», 2022, 11.3*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB — биссектриса угла ADC, $AD : DC = 4 : 3$. Найдите косинус угла AKB, если K — точка пересечения диагоналей AC и BD, и $BK : KD = 1 : 3$.

7.7.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 11.4*) На стороне AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка O. Оказалось, что $AO = BO$, $CO = OD$ и $\angle BOA = \angle COD$. Пусть E — точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите, что EO — биссектриса угла AED.

7.7.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 11.4*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E, причём $\angle BAE = \angle BEA = 80°$, $\angle CAD = \angle CDA = 80°$, $\angle EAD = \angle EDA = 50°$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.

7.7.4. (*Всеросс., 2021, МЭ, 11.6*) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\angle C = 57°$, $\sin\angle A + \sin\angle B = \sqrt{2}$ и $\cos\angle A + \cos\angle B = 2 - \sqrt{2}$. Сколько градусов составляет угол D?

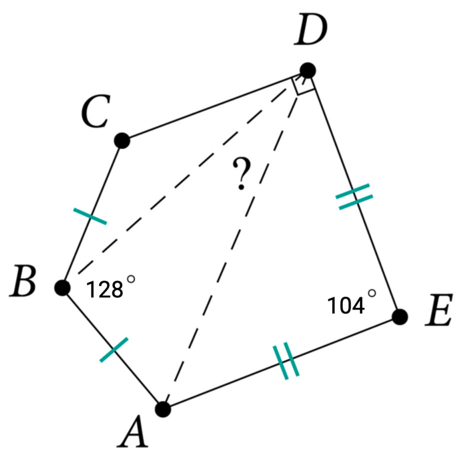
7.8 Многоугольники

7.8.1. (*«Бельчонок», 2020, 11.3*) Около пятиугольника $ABCDE$ описана окружность, P — точка пересечения отрезков AC и BD, Q — точка касания отрезка CE и описанной около треугольника ABP окружности. Найдите $\angle CQP$, если известно, что $\angle ECD = 40°$.

7.8.2. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 11.4*) Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. На стороне AE отмечена точка K, на стороне CD — точка L. Известно, что $\angle LAE + \angle KCD = 108°$, $AK : KE = 3 : 7$. Найдите $CL : AB$.

Правильный пятиугольник — пятиугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

7.8.3. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 11.4*) Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $\angle ABC = 128°$, $\angle CDE = 90°$, $\angle AED = 104°$, $AB = BC$, $AE = ED$. Сколько градусов составляет угол ADB?



7.8.4. (*«Бельчонок», 2022, 11.4*) В выпуклом семиугольнике $ABCDEFG$ рассматриваются семь четырёхугольников, вершинами которых являются четыре последовательные по часовой стрелке вершины семиугольника. Могут ли четыре из семи четырёхугольников быть описанными?

7.8.5. (*Открытая олимпиада, 2015, 11.6*) $ABCDE$ — вписанный пятиугольник. Окружность ω касается его описанной окружности в точке E. Прямая BC пересекает окружность ω в точках K и L, причём K лежит на луче ED, а L на луче EA. P и Q — точки пересечения описанных окружностей треугольников LCD и ACK с ω соответственно (не совпадающие с L и K). Докажите, что прямые AQ и PD пересекаются на прямой EC.

7.8.6. (*Открытая олимпиада, 2020, 11.6*) В описанном пятиугольнике $ABCDE$ даны длины сторон $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 11$, $DE = 8$, $EA = 12$. Диагонали AC и BE пересекаются в точке M. Найдите отношение площадей треугольников AMD и BMD.

7.9 Площадь

7.9.1. (*САММАТ, 2021, 11.3*) В треугольнике ABC на сторонах AB и AC выбраны точки D и E соответственно так, что $AD : DB = 2 : 1$ и $AE : EC = 3 : 1$. Пусть отрезки BE и CD пересекаются в точке F. Найти площадь треугольника $\triangle ABC$, если площадь четырехугольника $ADFE$ равна $S_{ADFE} = 7$.

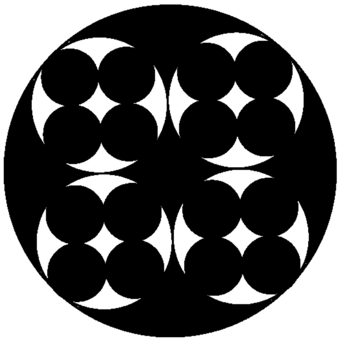
7.9.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 11.3*) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, в которую вписана окружность с центром O. Прямые BO и CO пересекают нижнее основание AD в точках M и N соответственно. Докажите соотношение для площадей

$$S_{AON} + S_{DOM} + 2S_{NOM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

7.9.3. (*«Бельчонок», 2022, 11.4*) Коля и Влад начертили одинаковые выпуклые четырёхугольники $ABCD$. На стороне AB каждый из них выбрал точку E, на стороне CD каждый выбрал точку F. Коля выбрал точки на серединах сторон, а Влад — на расстоянии $1/3$ длины стороны AB от A и на расстоянии $1/3$ длины стороны CD от C. Потом каждый из них отметил середины отрезков AF, DE, BF, CE, получил соответственно точки K, L, M, N, и соединил их в указанном порядке. У каждого получился четырехугольник $KLMN$. Коля считает, что площадь его четырёхугольника больше. Прав ли он?

7.9.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 11.4*) На плоскости отмечены пять точек, любые три из которых образуют треугольник площади не меньше 2. Докажите, что найдутся 3 точки, образующие треугольник площади не меньше 3.

7.9.5. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 11.5*) На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются четыре новые внутренне касающиеся ее окружности равных радиусов. Эти четыре окружности внешне касаются друг друга. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.



7.10 Касательные, секущие, хорды

7.10.1. (*«Бельчонок», 2023, 11.2*) В треугольник ABC вписана окружность ω радиуса r, которая касается стороны AB в точке P. На окружности отметили точку R, диаметрально противоположную точке P. Прямая CR пересекает сторону AB в точке Q, причём $CA + AQ = 1$. Найдите площадь треугольника ABC.

7.10.2. (*«Надежда энергетики», 2020, 11.3*) Две равные окружности пересекаются в точках P и Q. Произвольная прямая, проходящая через Q, повторно пересекает окружности в точках A и B, а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C. Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

7.10.3. (*«Бельчонок», 2020, 11.3*) Окружность, проходящая через вершины A и B остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно, а также проходит через центр описанной около треугольника PQC окружности. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке K, а $\angle ACB = 2\angle AKP$. Найдите $\angle ACB$.

7.10.4. (*«Бельчонок», 2020, 11.3*) Окружность, проходящая через вершины B и C остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно, а также проходит через центр описанной около треугольника APQ окружности. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке K, а $\angle BAC = 3\angle BKP$. Найдите $\angle BAC$.

7.10.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 11.3*) Дан треугольник ABC, вписанный в окружность ω. Точка M — основание перпендикуляра из точки B на прямую AC, точка N — основание перпендикуляра из точки A на касательную к ω, проведенную через точку B. Докажите, что $MN \parallel BC$.

7.10.6. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.3*) Дан треугольник ABC с углом B, равным 60°. На продолжениях сторон AB, CB и медианы BM за точку B взяты точки K, L, N соответственно так, что $BK : AB = 3 : 1$, $BL : CB = 5 : 1$, $BN : BM = 4 : 1$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если площадь треугольника KLN равна $6\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC равно 1.

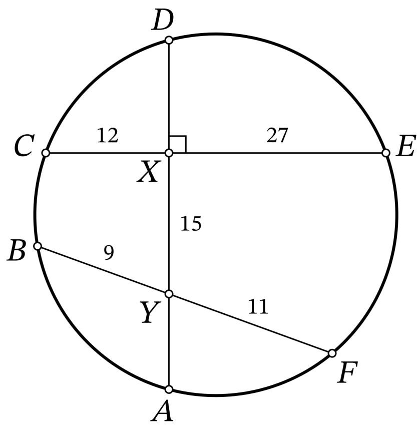
7.10.7. (*Олимпиада КФУ, 2021, 11.4*) В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках D и E. Хорда BX параллельна прямой DE. В каком отношении прямая XC делит хорду DE?

7.10.8. (*«Бельчонок», 2018, 11.4*) На продолжении стороны BC треугольника ABC взята точка D так что прямая AD — касательная к описанной окружности ω треугольника ABC. Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E, причем $AC : CE = 1 : 2$. Оказалось, что биссектриса угла ADE касается окружности ω. Найдите углы треугольника ABC.

7.10.9. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.4*) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 2, отрезок AD является биссектрисой. Через точку D проведена касательная DH к окружности, описанной около треугольника ADB, точка H лежит на стороне AC. Найдите площадь треугольника ABC, если $CD = CH\sqrt{2}$.

7.10.10. (*«Физтех», 2022, 11.4*) Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB — диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

7.10.11. (*Всеросс., 2022, МЭ, 11.5*) На окружности по часовой стрелке расположены точки A, B, C, D, E, F, как изображено на рисунке. Хорды AD и CE пересекаются в точке X под прямым углом, хорды AD и BF пересекаются в точке Y. Известно, что $CX = 12$, $XE = 27$, $XY = 15$, $BY = 9$, $YF = 11$.



1. Найдите длину отрезка AD.

2. Найдите радиус окружности.

7.10.12. (*«Надежда энергетики», 2019, 11.5*) Окружность единичного радиуса поделили на 2^{2019} равных частей. Докажите, что расстояние от центра окружности до хорды, стягивающей одну такую часть, составляет ровно половину от величины

$$\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{2018\text{ двоек}}}.$$

7.10.13. (*Всесиб., 2018, 11.5*) Пусть A и B — две различных фиксированных точки окружности, C — произвольная точка этой окружности, отличная от A и B, и MP — перпендикуляр, опущенный из середины M хорды BC к хорде AC. Доказать, что прямые PM при любом выборе C проходят через некоторую общую точку T.

7.10.14. (*«Физтех», 2021, 11.6*) Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок BC в точке P. Касательные к ω, проведённые через точки A и C, пересекаются в точке T. Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K. Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 6 и 4.

а) Найдите площадь треугольника ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{7}{5}$. Найдите AC.

7.10.15. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 11.8*) Касательная l к окружности, вписанной в ромб, пересекает его стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Докажите, что произведение $AE \cdot FC$ не зависит от выбора касательной l.

7.11 Вписанные и описанные окружности

Дополнительные задачи — в листке Вписанные и описанные окружности.

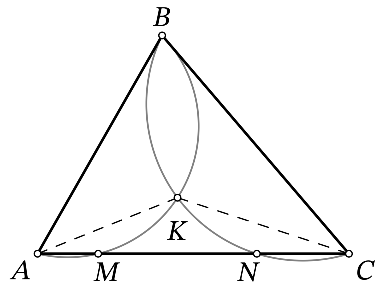
7.11.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 11.2*) Дан треугольник ABC. O_1 — центр его вписанной окружности; O_2 — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника ABC. На дуге BO_2 описанной окружности треугольника O_1O_2B отмечена такая точка D, что угол BO_2D вдвое меньше угла BAC. M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки D, M, C лежат на одной прямой.

7.11.2. (*Всесиб., 2015, 11.2*) На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC со стороной 10 взяты точки P и Q соответственно такие, что отрезок PQ касается вписанной в треугольник окружности и его длина равна 4. Найти площадь треугольника APQ.

7.11.3. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.3*) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что площадь треугольника ADE равна 0,5. Вписанная в четырехугольник $BDEC$ окружность касается стороны AB в точке K, причем $AK = 3$. Найдите тангенс угла BAC, если около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, и $BC = 15$.

7.11.4. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.3*) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 9\sqrt{2}/2$, $BK = 9$, $KC = 3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и точку D, лежащую на стороне AB, проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P , причем $CP > CD$. Найдите DP, если $\angle APB = \angle BAC$, CD — биссектриса треугольника ABC.

7.11.5. (*Всеросс., 2021, МЭ, 11.4*) На стороне AC треугольника ABC отмечены точки M и N (M лежит на отрезке AN). Известно, что $AB = AN$, $BC = MC$. Описанные окружности треугольников ABM и CBN пересекаются в точках Bи K. Сколько градусов составляет угол AKC, если $\angle ABC = 68°$?



7.11.6. (*САММАТ, 2021, 11.8*) В треугольник ABC вписана окружность, которая касается стороны AC в точке P. Могут ли оба центра окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABP, вторая — в треугольник BPC, одновременно лежать на окружности, вписанной в треугольник ABC? Ответ объясните.

7.11.7. (*Олимпиада КФУ, 2020, 11.4*) На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно так, что $BD = AE$. Прямая, соединяющая центры описанных окружностей треугольников ADC и BEC, пересекает прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Чему равно отношение $KC : LC$?

7.11.8. (*«Бельчонок», 2022, 11.4*) Точки P и Q — середины дуг KL и LM, описанной окружности треугольника KLM, LS — биссектриса этого треугольника. Оказалось, что

$$\angle KLM = 2\angle KML \quad \text{и} \quad \angle PSQ = 90°.$$

Найдите углы треугольника KLM.

7.11.9. (*Всесиб., 2020, 11.4*) Пусть точки O и I — центр описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Известно, что угол AIO прямой, а величина угла CIO равна $45°$. Найти отношение сторон $AB : BC : CA$.

7.11.10. (*Всесиб., 2021, 11.4*) Доказать, что четыре перпендикуляра, опущенных из середин сторон произвольного вписанного четырёхугольника на его противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

7.11.11. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.4*) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, сторона AC равна $\sqrt{2}$. Описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ACD. Найдите площадь треугольника ACD, если $R_1 : R_2 = \sqrt{3}$, где R_1, R_2 — радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD соответственно.

7.11.12. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.4*) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Известно, что центры вписанной в треугольник ABD и описанной около треугольника ABC совпадают. Найдите CD, если $AC = \sqrt{5} + 1$. Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним.

7.11.13. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.4*) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Известно, что центры вписанной в треугольник ABD и описанной около треугольника ABC совпадают. Найдите площадь треугольника ABC, если $CD = 4$. Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним.

7.11.14. (*«Физтех», 2023, 11.5*) Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E — середины сторон AC и AB соответственно, CF — биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

7.11.15. (*«Курчатов», 2022, 11.5*) Точка P внутри остроугольного треугольника ABC такова, что $\angle BAP = \angle CAP$. Точка M — середина стороны BC. Прямая MP пересекает описанные окружности треугольников ABP и ACP в точках D и E соответственно (точка P лежит между точками M и E, точка E лежит между точками P и D). Оказалось, что $DE = MP$. Докажите, что $BC = 2BP$.

7.11.16. (*Всеросс., 2020, МЭ, 11.6*) В треугольнике ABC построена точка D, симметричная центру I вписанной окружности относительно центра O описанной окружности. Докажите, что $AD^2 = 4R^2 - AB \cdot AC$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

7.11.17. (*Открытая олимпиада, 2021, 11.6*) Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O. K, L, M, N — точки касания сторон AB, BC, CD и AD соответственно. KP, LQ, MR и NS — высоты в треугольниках OKB, OLC, OMD, ONA. $OP = 15$, $OA = 32$, $OB = 64$.

Найдите длину отрезка QR.

7.11.18. (*«Шаг в будущее», 2016, 11.6*) На диагонали AC ромба $ABCD$ выбрана точка K, удаленная от прямых AB и BC на расстояния 8 и 2 соответственно. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 3. Найдите сторону ромба $ABCD$ и радиус окружности, вписанной в этот ромб.

7.11.19. (*«Росатом», 2019, 11.6*) Около выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и по длине равны 5 и 6, можно описать окружность с центром в точке O. Найти площадь четырехугольника $ABCO$

7.11.20. (*«Росатом», 2021, 11.6*) Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Длины сторон AB и AD равны. На стороне CD расположена точка Q так, что $DQ = 1$, а на стороне BC — точка P так, что $BP = 2$. При этом $\angle DAB = 2\angle QAP$. Найти длину отрезка PQ.

7.11.21. (*«Росатом», 2023, 11.6*) Длина стороны AD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равна 5. Точка M делит эту сторону в отношении $AM : MD = 1 : 4$, а прямые MC и MB параллельны сторонам AB и CD соответственно. Найти длину стороны BC четырехугольника.

7.11.22. (*«Шаг в будущее», 2017, 11.7*) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 8$, $BK = 24$, $KC = 3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP > CD$. Найдите DP, если $\angle APB = \angle BAC$.

7.11.23. (*ОММО, 2023.8*) В треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а A_1, B_1, C_1 — точки касания этих сторон со вписанной окружностью соответственно. Прямые A_1C_1, B_1C_1 пересекают A_0B_0 в точках X и Y. Докажите, что прямая CC_1 делит отрезок XY пополам.

7.12 Касающиеся окружности

Дополнительные задачи — в листке Касающиеся окружности.

7.12.1. (*САММАТ, 2022, 11.10*) Три окружности с радиусами $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются внешним образом четвертой окружности с радиусом r. Найти r.

7.12.2. (*«Бельчонок», 2019, 11.3*) Две окружности касаются внутренним образом в точке K. В большей окружности проведена хорда AB, касающаяся меньшей окружности в точке L. Найдите BL, если $AL = 10$ и $AK : BK = 2 : 5$.

7.12.3. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.3*) Окружность радиуса 1 касается сторон AB и BC треугольника ABC, а окружность радиуса 3 внешним образом касается первой окружности и сторон AC и BC треугольника ABC. Общая касательная к этим окружностям, не содержащая сторону BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите длины сторон треугольника ABC, если $\angle AMN = 30°$, $\angle ANM = 90°$.

7.12.4. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.3*) Окружность радиуса 4 касается сторон AB и BC треугольника ABC, а окружность радиуса 12 внешним образом касается первой окружности и сторон AC и BC треугольника ABC. Общая касательная к этим окружностям, не содержащая сторону BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника AMN, если $\angle AMN = 30°$, $\angle ANM = 90°$.

7.12.5. (*«Росатом», 2019, 11.3*) Найти наибольшее число окружностей радиуса 1, не имеющих общих точек, которые могут одновременно касаться окружности радиуса 3.

7.12.6. (*Открытая олимпиада, 2022, 11.4*) Окружности O_1 радиуса b и O_2 радиуса c касаются в точке O — центре окружности O_3 радиуса a. Точка A — одна из точек пересечения окружностей O_1 и O_3. Окружность O_4 касается окружности O_1 в точке A и окружности O_2 в точке B. Точка C — такая точка на прямой OB, что треугольники OAB и OCA подобны. Найдите AC.

Все указанные в условии касания происходят внешним образом.

7.13 Четыре точки на окружности

Дополнительные задачи — в листке Четыре точки на окружности.

7.13.1. (*САММАТ, 2023, 11.10*) Дан треугольник ABC с острым углом A такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Доказать, что точка M пересечения прямых BE и CG лежит на окружности ω.

7.13.2. (*«Курчатов», 2023, 11.4*) Дан параллелограмм $ABCD$ такой, что $\angle A = 60^\circ$. Пусть P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Оказалось, что точки A, P, Q, D лежат на одной окружности. Найдите $\angle ADB$.

7.13.3. (*Олимпиада КФУ, 2022, 11.4*) В неравнобедренном треугольнике ABC провели высоту BH, медиану BM и биссектрису BL. Точки P и Q — ортогональные проекции вершин A и C на прямую BL. Докажите, что точки M, H, P и Q лежат на одной окружности.

7.13.4. (*«Высшая проба», 2023, 11.4*) В окружность ω вписан треугольник ABC такой, что $AB < BC$. Биссектриса внешнего угла B пересекает ω в точке M. Прямая, параллельная MB, пересекает стороны BC, AB и продолжение стороны AC за точку A в точках P, Q и R соответственно. Прямая MR вторично пересекает ω в точке X. Докажите, что точки B, P, Q, X лежат на одной окружности.

7.13.5. (*Всеросс., 2021, РЭ, 11.7*) Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая ℓ, параллельная стороне AC, и на неё опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

7.14 Неравенство треугольника

Дополнительные задачи — в листке Неравенство треугольника.

7.14.1. (*«Росатом», 2022, 11.1*) Клиенты интернет магазина «Али-экспресс» проживают в семи домах, расположенных в вершинах выпуклого семиугольника. От жителей первого дома поступил один заказ, от второго дома — два заказа, и т. д. от жителей шестого — шесть заказов. А вот жители последнего седьмого дома сделали 21 заказ. Менеджер магазина задумался о том в какое место следует доставить все заказы, чтобы суммарное расстояние, преодолеваемое всеми клиентами для получения товара, было минимально возможным. Помогите ему в решении этой задачи и обоснуйте результат.

7.14.2. (*Всесиб., 2017, 11.4*) Доказать, что рёбра произвольного тетраэдра (треугольной пирамиды) можно разбить некоторым образом на три пары так, что существует треугольник, длины сторон которого равны суммам длин рёбер тетраэдра в этих парах.

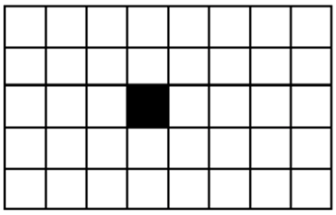
7.14.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 11.7*) Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Точка K лежит на продолжении стороны AC за точку A, точка N лежит на прямой, параллельной прямой AC и проходящей через точку B, причем $|AK| = 2$, $|BN| = 1$. Рассматриваются такие ломаные $KLMN$, что точка L лежит на стороне AB, точка M лежит на стороне BC, а отрезок LM параллелен стороне AC. Найдите наименьшее возможное значение суммы $|KL| + |MN|$, если $|AN| > |CN|$.

7.14.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 11.8*) На плоскости отмечено 8 различных точек, среди которых есть красные, синие и зеленые. Точек других цветов нет. Известно, что сумма всех попарных расстояний между красными и синими точками равна 12, между красными и зелеными равна 10, а между синими и зелеными равна 1. Каким может быть количество красных отмеченных точек?

7.15 Задачи на экстремум в планиметрии

Дополнительные задачи — в листке Геометрические задачи на экстремум.

7.15.1. (*«Бельчонок», 2021, 11.1*) На рисунке изображен клетчатый прямоугольник 5×8 (сторона каждой клетки равна 1) с одной закрашенной клеткой. Из центра чёрной клетки проведены векторы в центры всех других клеток, кроме двух. Какое наименьшее значение может принимать длина суммы всех полученных векторов?



7.15.2. (*«Надежда энергетики», 2021, 11.2*) Точка A лежит внутри острого угла. Через эту точку проведена прямая, отсекающая от угла треугольник наименьшей площади. Выясните, в каком отношении точка A делит отрезок этой прямой, заключенный внутри угла.

7.15.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 11.3*) Среди всех вписанных четырёхугольников найдите четырёхугольник $ABCD$ с наименьшим периметром, в котором $AB = BC = CD$ и все попарные расстояния между точками A, B, C и D выражаются целыми числами. Чему при этом равен радиус описанной вокруг $ABCD$ окружности?

7.15.4. (*ОММО, 2023.4*) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 9$, $BC = 2$ и боковыми сторонами $AB = 5$, $CD = 3\sqrt{2}$. Точка P на прямой BC такова, что периметр треугольника APD наименьший из возможных. Найдите этот периметр.

7.15.5. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.4*) На произвольной параболе даны точки A и B. Точка C выбрана на дуге параболы между A и B, так, что треугольник ABC имеет максимальную площадь. Прямая, проходящая через точку C параллельно оси симметрии параболы, пересекает отрезок AB в точке M. Найдите отношение $AM : MB$

7.15.6. (*«Ломоносов», 2023, 11.4*) Две стороны выпуклого четырехугольника имеют длину 6, ещё одна — длину 1, а его площадь — наибольшая возможная при таких условиях. Какова длина четвертой стороны четырехугольника?

7.15.7. (*САММАТ, 2021, 11.10*) На плоскости заданы точки $A(2, 4)$, $B(4, 2)$ и прямая $y = kx$ $(k > 0)$. Точка M принадлежит прямой $y = kx$. Найти треугольник $\triangle ABM$ с минимальным значением его периметра и вычислить значение периметра.

7.15.8. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.5*) Из равнобедренного треугольника с углом α при вершине и площадью 1 вырезают максимальный по площади круг, а из него — максимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $60^\circ \leqslant \alpha \leqslant 120^\circ$?

7.15.9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 10–11.5*) Бумажный квадрат площади 17 согнули по прямой, проходящей через его центр, после чего соприкасающиеся части склеили. Найдите максимально возможную площадь получившейся бумажной фигуры.

7.15.10. (*«Росатом», 2021, 11.5*) Множество вертикальных и горизонтальных параллельных прямых разбивают плоскость на бесконечное число равных прямоугольников со сторонами 1 и $\sqrt{3}$. Пусть A — одна из точек пересечения прямых. Рассмотрим множество всех равносторонних треугольников с вершиной в точке A и двумя другими вершинами, расположенными в точках пересечения прямых. Какое минимальное значение может принимать площадь таких треугольников? Сколько треугольников из этого множества имеет площадь $39\sqrt{3}$?

7.15.11. (*«Росатом», 2015, 11.6*) Волк окружен собаками, расположенными в точках M, N, P и Q на сторонах квадрата $ABCD$, $M \in [A;B]$, $N \in [B;C]$, $P \in [C;D]$, $Q \in [D;A]$ так, что $AM : MB = BN : NC = = CP : PD = DQ : QA = 1 : 3$. Волк, находящийся внутри квадрата в точке пересечения прямых MP и NQ, может бежать со скоростью $v_в$ по прямой в любом направлении. Собаки бегают только по сторонам квадрата со скоростью, не превосходящей $v_с$. Волк может вырваться из окружения, если на границе квадрата встретит не более одной собаки. При каких значениях отношения $v_с/v_в$ волк имеет шанс спастись?

7.15.12. (*«Росатом», 2017, 11.6*) Две параллельные прямые, расстояние между которыми 1, пересекают прямоугольник размерами 3×5 под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$ к его стороне. Найти максимальное возможное значение суммы длин отрезков этих прямых, принадлежащих прямоугольнику.

7.15.13. (*«Росатом», 2017, 11.6*) На дуге, равной половине дуги окружности радиуса R, расположены 5 точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника. Найти периметр многоугольника, если известно, что сумма квадратов длин его сторон максимально возможная.

7.15.14. (*«Росатом», 2016, 11.6*) В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AD = 8$, $AB = 4$ расположены три круга K, K_1 и K_2. Круг K касается кругов K_1, K_2 внешним образом, а также прямых AD и BC. Круги K_1, K_2 касаются также сторон AD, AB и AD, CD соответственно. Найти максимальное возможное значение суммы площадей трех кругов.

7.15.15. (*«Ломоносов», 2022, 11.7*) Высота BD остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке H. Точка K лежит на отрезке AC так, что величина угла BKH максимальна. Найдите DK, если $AD = 2$, $DC = 3$.

7.15.16. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 11.8*) Диагонали AD, BE и CD выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке O. Известно, что площади треугольников AOB, COD и EOF равны 4, 6 и 9 соответственно. Какую наименьшую площадь может иметь данный шестиугольник?

7.16 Векторы в планиметрии

Дополнительные задачи — в листке Векторы в планиметрии.

7.16.1. (*«Курчатов», 2021, 11.3*) В первой четверти координатной плоскости отметили две точки A и B с целочисленными координатами. Оказалось, что $\angle AOB = 45°$, где O — начало координат. Докажите, что хотя бы одна из четырёх координат точек A и B — чётное число.

7.16.2. (*ОММО, 2022.4*) Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $BC = 8$ и $AC = 4$. Найдите длину стороны AB, если длина вектора $4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$ равна 10.

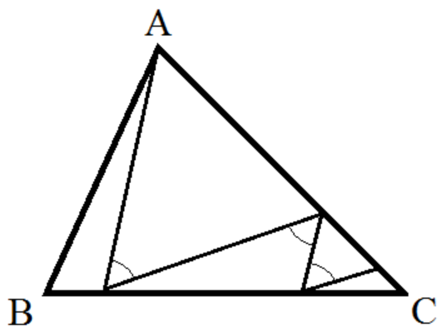
7.17 Неравенства в планиметрии

Дополнительные задачи — в листке Неравенства в геометрии.

7.17.1. (*Всесиб., 2021, 11.1*) На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ соответственно отмечены точки P, Q, R, S, отличные от вершин. Известно, что длина стороны квадрата равна 1. Доказать, что выполнены неравенства:

$$2 \leqslant PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 < 4.$$

7.17.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 11.1*) Муха сидит в вершине A треугольной комнаты ABC ($\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$, $AB = 5$ м). В какой-то момент она вылетает оттуда в произвольном прямом направлении, после чего каждый раз, долетая до стены, поворачивает на $60°$ и продолжает лететь по прямой (см. рис.).



Может ли оказаться, что через какое-то время муха пролетела больше 12 метров?

7.17.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 11.2*) Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Пусть M — точка пересечения медиан. Докажите, что

$$\angle BAM < 2\angle MAC.$$

7.17.4. (*ОММО, 2021.4*) В треугольнике ABC длины сторон равны 4, 5 и $\sqrt{17}$. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек X внутри треугольника ABC, для которых выполняется условие $XA^2 + XB^2 + XC^2 \leqslant 21$.

7.17.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 11.4*) Угол между диагоналями трапеции равен $60°$. Докажите, что сумма длин боковых сторон не меньше, чем длина большего основания.

7.17.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 11.7*) Назовем положительное число a близким сверху положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 1%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

7.17.7. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.7*) В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD перпендикулярны. Сравните величины $BC + AD$ и $AB + CD$.

7.18 Построения

7.18.1. (*«Надежда энергетики», 2019, 11.3*) Транспортная компания «Пианогруз» специализируется на перевозке тяжелых музыкальных инструментов. После того как в автомашине компании были оборудованы места для грузчиков, остался грузовой отсек в форме квадрата со стороной 3 м. Изобразите в координатах «длина — ширина» множество всех точек, которые могут задавать размеры прямоугольного инструмента, помещающегося в грузовой отсек. Считайте, что оборудование кузова позволяет закрепить инструмент в любом положении, а ограничения по высоте отсутствуют.

7.19 Разные планиметрические задачи

7.19.1. (*САММАТ, 2023, 11.4*) Длины сторон AB, AC, BC треугольника ABC, периметр которого равен 6, в указанном порядке являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите ее разность, если угол $\angle BAC$ в два раза больше угла $\angle ABC$.

7.19.2. (*«Бельчонок», 2021, 11.3*) Серединный перпендикуляр к боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AB в точке L, а продолжение основания — в точке K. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что треугольники ALC и KBL равновелики.

7.19.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 11.3*) Дана прямая на плоскости и на ней отмечено несколько (больше двух) точек. Докажите, что можно отметить еще одну точку на плоскости (вне данной прямой) так, чтобы среди всех треугольников с отмеченными вершинами было больше половины остроугольных.

7.19.4. (*Всесиб., 2017, 11.3*) Внутри остроугольного треугольника ABC выбрали точку P, отличную от O — центра описанной окружности треугольника ABC, и такую, что угол PAC равен углу PBA и угол PAB равен углу PCA. Доказать, что угол APO — прямой.

7.19.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 11.3*) На плоскости отмечены $2n+1$ точек, причём никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре — на одной окружности. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из этих точек, внутри которой лежит $n-1$ точек и снаружи — тоже $n-1$.

7.19.6. (*«Ломоносов», 2020, 11.4*) Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиусом 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Другая окружность с центром Q и радиусом 8 описана около треугольника ACO. Найдите BQ.

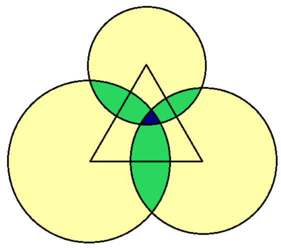
7.19.7. (*Открытая олимпиада, 2016, 11.5*) Три окружности, радиусов 1, 1 и $2\sqrt{\frac{13-6\sqrt{3}}{13}}$, расположены так, что треугольник, образованный центрами этих окружностей, является равносторонним со стороной $\sqrt{3}$. Найдите, чему равен радиус описанной вокруг треугольника, каждая из вершин которого является точкой пересечения двух из этих окружностей, дальней от центра третьей окружности.

7.19.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 11.6*) Дан треугольник ABC; точка K на стороне AB и точка L на стороне BC таковы, что $AK = KL = LC$. На луче CB отмечена точка M, для которой $CM = AB$, а на прямой AL — точка N, для которой $MN \parallel AC$. Докажите, что $BN = AB$.

7.19.9. (*«Росатом», 2019, 11.6*) На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N так, что $AM = CN = = \sqrt{3}$. Точка P — середина отрезка MN, точка Q — середина стороны AC. Угол при вершине B треугольника ABC равен $60°$. Найти длину отрезка PQ.

7.19.10. (*«Росатом», 2020, 11.6*) На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вовне построены два равных прямоугольника $AMNB$ и $APQC$. Найти расстояние между вершинами N и Q прямоугольников, если длины сторон AB и AC равны 3 и 4 соответственно, а угол при вершине A треугольника равен $30°$.

7.19.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 11.6*) На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Что больше: сторона треугольника или суммарная длина зелёных отрезков, лежащих на сторонах треугольника?



7.19.12. (*ОММО, 2021.8*) Дан равнобедренный треугольник KLM ($KL = LM$) с углом при вершине, равным $114°$. Точка O расположена внутри треугольника KLM так, что $\angle OMK = 30°$, а $\angle OKM = 27°$. Найдите величину угла $\angle LOM$.

7.20 Метод координат

Дополнительные задачи — в листке Формула расстояния между точками.

7.20.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 11.3*) Существует ли пятизвенная неплоская замкнутая ломаная, все звенья которой равны, а каждые два соседних звена перпендикулярны?

7.20.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 11.5*) На координатной плоскости дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин, отличный от квадрата. Докажите, что можно провести несколько прямых, параллельных сторонам прямоугольника, так, что прямоугольник разобьется на квадраты с целочисленными координатами вершин.

7.20.3. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.6*) Для испытания новой модели моторного катера выбран участок берега моря, представленный на карте прямой линией. Вдоль этого участка берега проходит прямая трасса, на которой расположен командный пункт. В 2 км от него в море по линии, перпендикулярной берегу, на рейде стоит корабль. Моторный катер движется в море так, что расстояние от наблюдателя на корабле до катера в любой момент времени совпадает с расстоянием от катера до движущегося по трассе автомобиля наблюдения. При этом в декартовой системе координат с началом в точке O — командном пункте, осью абсцисс, направленной вдоль трассы по ходу движения автомобиля, и осью ординат, направленной на корабль, абсциссы координат автомобиля и катера в каждый момент времени совпадают.

Укажите координаты катера в этой системе координат через четверть часа с момента начала движения автомобиля от командного пункта, если он двигался все время в одном направлении с постоянной скоростью 40 км/ч.

Глава 8

Стереометрия

8.1 Параллелепипед и куб

Дополнительные задачи — в листке Куб.

8.1.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 11.2*) Длины диагоналей граней $ABCD$, ABB_1A_1 и ADD_1A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выражаются различными целыми числами. Какой наименьшей может быть сумма этих чисел?

8.1.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 11.2*) Какие линейные размеры может иметь прямоугольный параллелепипед, если его объем равен 200 см^3, площадь полной поверхности равна 300 см^2, а периметр основания равен 50 см?

8.1.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 11.2*) Через каждую пару противоположных рёбер куба проведена плоскость. На сколько частей эти плоскости разбивают куб?

8.1.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 11.2*) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ отметили середину O медианы AM треугольника $AB'D'$. Оказалось, что эта точка удалена от прямых AB', AD' и от грани $ABCD$ на расстояние 1. Найдите объём параллелепипеда.

8.1.5. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 11.4*) На поверхности куба $ABCDA'B'C'D'$ построена замкнутая линия, каждая точка X которой обладает следующим свойством: длина кратчайшего пути по поверхности куба между точками X и A равна длине кратчайшего пути по поверхности куба между X и C'. Найдите длину этой линии, если длина ребра куба равна 1.

8.1.6. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 11.4*) У Пети скопилось много кусочков пластилина трех цветов, и он плотно заполнил пластилином полый куб со стороной 5 см, так что в кубе не осталось свободного места. Докажите, что внутри куба найдутся две точки одного цвета на расстоянии ровно 7 см друг от друга.

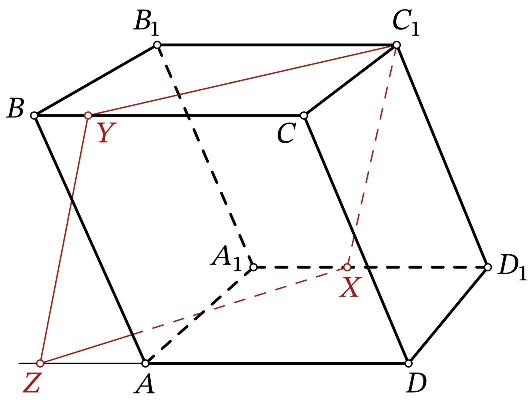
8.1.7. (*«Росатом», 2019, 11.6*) Расстоянием между двумя точками на поверхности прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ называют наименьшую длину ломаной на поверхности, соединяющей эти точки. По поверхности параллелепипеда с размерами $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{2}$, $AA' = 4$ ползет муравей так, что расстояние на поверхности между ним и вершиной A всегда постоянное и равно $2\sqrt{2}$. Нарисовать замкнутую траекторию движения муравья по поверхности параллелепипеда и найти ее длину.

8.1.8. (*«Росатом», 2021, 11.6*) На ребре AD основания куба $ABCDA'B'C'D'$ (AA', BB', CC', DD' параллельные боковые ребра) расположена точка M так, что $AM : AD = 1 : 3$. Через точку M и вершины A' и C' куба проведена плоскость P. Найти расстояние до плоскости P точки N, расположенной на ребре AB так, что $AN : AB = 1 : 2$, если длина ребра куба равна $2\sqrt{19}$.

8.1.9. (*«Росатом», 2022, 11.6*) Точка M лежит на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $MNLK$ так, что одной из его вершин является точка M, а три другие расположены на различных сторонах квадрата основания. Прямоугольник $M_1N_1L_1K_1$ является ортогональной проекцией прямоугольника $MNLK$ на плоскость верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$. Диагонали четырехугольника MK_1L_1N перпендикулярны. Найти отношение $AM : MB$.

8.1.10. (*«Ломоносов», 2020, 11.7*) Куб с ребром $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2}$, направленным вдоль главной диагонали куба. Найдите площадь освещённой части поверхности куба.

8.1.11. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 11.8*) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ребре A_1D_1 выбрана точка X, а на ребре BC выбрана точка Y. Известно, что $A_1X = 5$, $BY = 3$, $B_1C_1 = 14$. Плоскость C_1XY пересекает луч DA в точке Z. Найдите DZ.



8.2 Пирамида

Дополнительные задачи — в листке Пирамида.

8.2.1. (*САММАТ, 2023, 11.1*) В треугольной пирамиде $ABCD$ на ребре AB взята точка P так, что $AP : PB = 1 : 2$, на ребре AD взята точка Q так, что $AQ : QD = 2 : 3$ и на ребре BC точка R такая, что $BR : RC = 3 : 1$. В каком отношении отрезок QR делится плоскостью CDP?

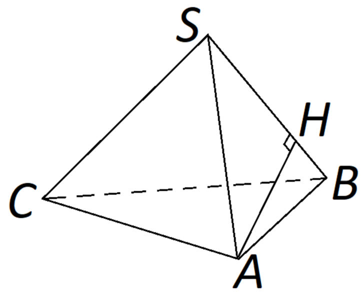
8.2.2. (*Всеросс., 2020, МЭ, 11.2*) В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SA перпендикулярно основанию ABC. Известно, что биссектрисы плоских углов BAC и BSC пересекаются. Докажите, что углы ABC и ACB равны.

8.2.3. (*Всеросс., 2022, РЭ, 11.3*) В треугольной пирамиде $ABCD$ на её гранях BCD иACD нашлись соответственно точки A' и B' такие, что $\angle AB'C = \angle AB'D = \angle BA'C = \angle BA'D = 120°$. Известно, что прямые AA' и BB' пересекаются. Докажите, что точки A' и B' равноудалены от прямой CD.

8.2.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 11.4*) A', B' и C' — проекции вершины S правильной треугольной пирамиды $SABc$ на биссекторные плоскости двугранных углов при рёбрах BC, AC и AB. Найдите тангенс каждого из этих углов, если объём пирамиды $SA'B'C'$ в 10 раз меньше объёма пирамиды $SABC$.

8.2.5. (*«Курчатов», 2020, 11.4*) Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$. На отрезке AC нашлась точка M такая, что $SM = MB$ и плоскости SBM и SAB перпендикулярны. Найдите отношение $AM{:}AC$.

8.2.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 11.4*) На плоскости в ортогональной проекции изображена правильная пирамида $SABC$ (с основанием ABC) и высота AH грани SAB, как показано на рисунке. Как с помощью циркуля и линейки построить изображение центра сферы, описанной возле пирамиды?



8.2.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 11.5*) Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 1. Через точку M, лежащую на грани ABC (но не на ребре), проведены плоскости, параллельные трём другим граням. Эти плоскости делят тетраэдр на части. Найдите сумму длин рёбер той части, которая содержит точку D.

8.2.8. (*Открытая олимпиада, 2022, 11.6*) Дана четырёхугольная пирамида $OABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α пересекает ребра OA, OB, OC и OD пирамиды в точках A', B', C' и D' соответственно. Известно, что $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{a}$, $\frac{OB'}{OB} = \frac{1}{b}$, $\frac{OC'}{OC} = \frac{1}{c}$. Найдите $\frac{V_{OABCD}}{V_{OA'B'C'D'}}$.

8.2.9. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.6*) Основанием пирамиды $TABCD$ является ромб $ABCD$. Высота пирамиды TK равна 1, точка K лежит на прямой, содержащей диагональ основания AC, причем $KC = KA + AC$. Боковое ребро TC равно $2\sqrt{2}$, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углами 30° и 60°. Найдите длину стороны основания и угол между боковым ребром TA и плоскостью боковой грани TCD.

8.2.10. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.6*) Основанием пирамиды $TABCD$ является ромб $ABCD$. Высота пирамиды TK равна 5, точка K лежит на прямой, содержащей диагональ основания AC, причем $KC + KA + AC$. Боковое ребро TC равно $6\sqrt{5}$, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углами 30° и 60°. Найдите длину стороны основания и угол между стороной основания AB и боковой гранью TBC.

8.2.11. (*«Росатом», 2017, 11.6*) На боковых ребрах EA, EB, EC правильной четырехугольной пирамиды $ABCDE$ расположены точки M, N, K соответственно, причем $EM : EA = 1 : 2$, $EN : EB = 2 : 3$, $EK : EC = 1 : 3$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проходящая через точки M, N, K?

8.2.12. (*«Росатом», 2017, 11.6*) Через ребро AB основания правильной четырехугольной пирамиды $EABCD$ проведена плоскость P, пересекающая ребра EC и ED в точках M и N соответственно. Плоскость P делит объем пирамиды в отношении $V_{EABMN} : V_{EABCD} = 5 : 9$. Найти отношение площадей полных поверхностей пирамид $S_{EABMN} : S_{EABCD}$, если боковые грани пирамиды $EABCD$ наклонены к плоскости основания $ABCD$ под углом $\alpha = \operatorname{arctg} 5$.

8.2.13. (*«Росатом», 2018, 11.6*) Плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках M, N, K соответственно и образует угол $45°$ с боковой гранью SBC. Найти объем пирамиды $SABC$, если произведение ее ребер $SA \cdot SB \cdot SC = 5\sqrt{15}$, а пирамида $SMNK$ правильная.

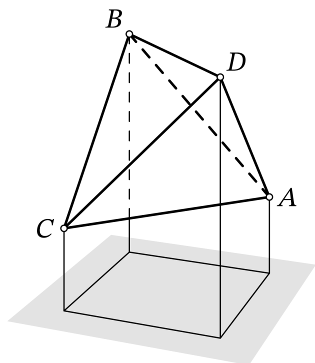
8.2.14. (*«Росатом», 2021, 11.6*) Длины всех ребер (боковых и основания) тетраэдра $ABCD$ равны 1. На ребре AB расположена точка M так, что $AM : AB = 1 : 3$. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми CM и AD.

8.2.15. (*«Росатом», 2023, 11.6*) На ребре AC основания треугольной пирамиды $ABCD$ расположена точка M так, что $AM : MC = 1 : 2$. Через середину ребра BC основания пирамиды проведена плоскость P, проходящая через точку M и параллельная боковому ребру CD. В каком отношении плоскость P делит объем пирамиды?

8.2.16. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.6*) В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна $180°$. Найдите площадь поверхности этой пирамиды, если площадь грани BCD равна S и $AB = CD$, $AD = BC$.

8.2.17. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.6*) В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы, суммы плоских углов при вершинах C и D тоже одинаковы, а сумма площадей граней ABD и ACD равна S. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

8.2.18. (*Всеросс., 2022, МЭ, 11.7*) Все вершины правильного тетраэдра $ABCD$ находятся по одну сторону от плоскости α. Оказалось, что проекции вершин тетраэдра на плоскость α являются вершинами некоторого квадрата. Найдите значение величины AB^2, если известно, что расстояния от точек A и B до плоскости α равны 17 и 21 соответственно.



8.2.19. (*Открытая олимпиада, 2016, 11.7*) Четыре из шести середин рёбер некоего тетраэдра образуют правильный тетраэдр с ребром 1. Найдите рёбра исходного тетраэдра.

8.2.20. (*Открытая олимпиада, 2019, 11.7*) Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины D, и делит их в отношении $5 : 1$ (не обязательно от вершины D). Также эта плоскость пересекает прямые AB и AC в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников AEF и ABC.

8.3 Призма

Дополнительные задачи — в листке Призма.

8.3.1. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.6*) Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через середину стороны AB основания ABC и точку M, лежащую на стороне B_1C_1, если $MC_1 = 3B_1M$, расстояние от точки C до секущей плоскости равно $\sqrt{2}$, а сторона основания призмы равна $4\sqrt{7}$.

8.3.2. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.6*) Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через вершину C и центр симметрии боковой грани AA_1B_1B, если площадь сечения призмы этой плоскостью равна 21, а сторона основания призмы равна $2\sqrt{14}$.

8.3.3. (*ОММО, 2021.10*) Вася смастерил из стеклянных стержней призму. Призма имеет 171 боковое ребро и столько же рёбер в каждом из оснований. Вася задумался: «Можно ли параллельно перенести каждое из 513 рёбер призмы так, чтобы они образовали замкнутую ломаную в пространстве?» Возможна ли реализация Васиной задумки?

8.4 Сечения

Дополнительные задачи — в листке Сечения.

8.4.1. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.5*) Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 2$ и $BC = 6$. Высотой пирамиды $SABC$ является отрезок SD, где точка D симметрична точке B относительно середины отрезка AC. Точка M принадлежит боковому ребру SB, причем $SM = 2MB$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через D параллельно гипотенузе основания AC и отрезку AM, если расстояние от точки B до секущей плоскости равно $\sqrt{14}$.

8.4.2. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.5*) Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершину F основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF, если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{7}$, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно $\sqrt{7}$.

8.4.3. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.5*) Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершину C основания $ABCDEF$ и параллельной медиане BM боковой грани SAB и апофеме SN боковой грани SAF, если сторона основания пирамиды равна 2, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 1.

8.4.4. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.6*) Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, которая параллельна диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходит через середину стороны AB основания ABC и точку M, лежащую на стороне B_1C_1, если $MC_1 = 3B_1M$, расстояние между AC_1 и секущей плоскостью равно 3, а сторона основания призмы равна $2\sqrt{14}$.

8.4.5. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.6*) Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 3, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через центр сферы, описанной около пирамиды, образующей с плоскостью основания угол $60°$, пересекающей ребро AB в точке M, так что $MB = 2AM$, и пересекающей ребро BC. Известно, что расстояние от точки A до плоскости сечения равно 0,25.

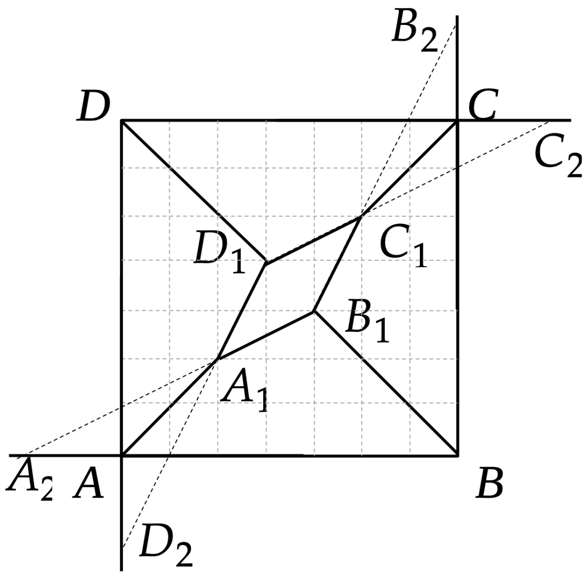
8.4.6. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.6*) Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середины бокового ребра TA и стороны основания BC и параллельной апофеме TF боковой грани ATB, если радиус сферы равен 3.

8.4.7. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.6*) Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середину бокового ребра TA и параллельной медиане AD боковой грани ATC, если стороны основания равны 4, а центр сферы делит высоту пирамиды в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

8.5 Многогранники

Дополнительные задачи — в листке Многогранники.

8.5.1. (*Олимпиада КФУ, 2023, 11.4*) Многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ изображен в ортогональной проекции на плоскость $ABCD$. Докажите, что такой многогранник невозможен.



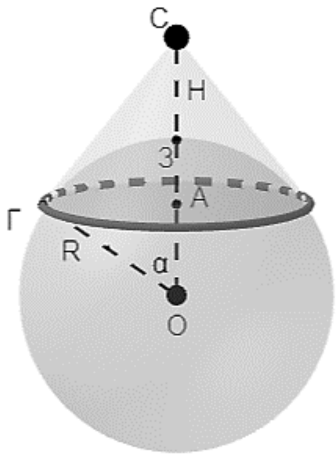
8.6 Сфера и шар

Дополнительные задачи — в листке Сфера и шар.

8.6.1. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.6*) Искусственный спутник (ИСЗ) движется по круговой орбите вокруг Земли (имеет форму шара) на высоте H, равной радиусу Земли $R = 6372$ км, с периодом обращения $T = 4$ ч и постоянной угловой скоростью $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Для того, чтобы можно было наблюдать за спутником с поверхности Земли, он должен находиться выше плоскости горизонта. Определите: а) продолжительность наблюдения за спутником (в минутах) от момента его появления над горизонтом до момента захода за горизонт, если траектория ИСЗ проходит ровно над головой наблюдателя; б) плоский угол при вершине конуса обзора поверхности Земли с ИСЗ (в градусах).

8.6.2. (*«Шаг в будущее», 2022, 11.6*) В 2022 году исполняется 65 лет запуска первого искусственного спутника Земли (ИСЗ). В настоящее время для обеспечения бесперебойной работы сотовой связи, систем теле и радиовещания используются различные виды спутников, находящихся на различных орбитах, на различных высотах.

Зоной покрытия спутника назовем часть поверхности земного шара, в пределах которой обеспечивается уровень сигналов к спутнику и от него, необходимый для их приема с заданным качеством в конкретный момент времени. Как правило, эта часть поверхности ограничивается окружностью, проходящей по линии видимого горизонта. На рисунке - линия проходит через точку Г.



а) Определите площадь земной поверхности (в км^2), которая является зоной покрытия спутника, находящегося на высоте $H = 500$ км относительно земной поверхности, считая ее сферой радиуса $R = 6400$ км с центром в точке O.

б) Найдите все значения $n > 1$, для которых на поверхности земли можно расположить окружности $C_1, \ldots, C_n$, каждая из которых внешним образом касается окружности C_0, с центром в точке A и радиусом $r < R$, каждая из них является границей зоны покрытия ИСЗ, находящегося на той же высоте H, что и спутник с зоной покрытия C_0. Каждая из зон покрытия C_i должна внешним образом касаться окружностей C_0 и C_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, т. е. первая касается C_0 и C_2, вторая — C_0 и C_3, и т. д. Окружность C_n должна касаться C_0 и C_1.

8.6.3. (*«Шаг в будущее», 2022, 11.6*) Современную жизнь невозможно представить без спутниковой связи и навигации. В 202 году только тремя ведущими космическими державами произведено 126 успешных запусков спутников. По данным прикладного потребительского центра ГЛОНАСС в настоящее время в составе системы ГЛОНАСС задействовано 25 спутников, в системах GPS — 32, ГАЛИЛЕО — 26, БЕЙДОУ — 49 спутников. Возникает проблема безопасности их полетов.

а) Считая Землю шаром радиуса R, определите, какое наибольшее количество спутников может одновременно находиться на орбитах вокруг Земли на одной и той же высоте H от ее поверхности так, чтобы расстояние между аппаратами было не меньше $\sqrt{2}(R+H)$.

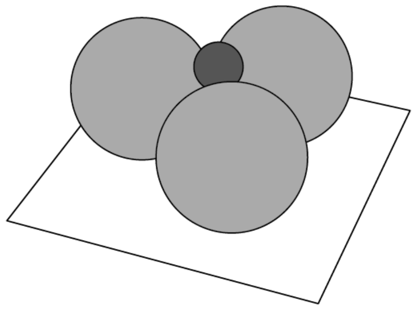
б) Для найденного максимального количества спутников указать координаты возможного их расположения в системе координат с началом в центре Земли и осью абсцисс, направленной вдоль вектора, соединяющего центр Земли с одним из спутников.

8.7 Касающиеся сферы

Дополнительные задачи — в листке Сфера и шар.

8.7.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 11.7*) Центры шести сфер радиуса 1 расположены в вершинах правильного шестиугольника со стороной 2. Эти сферы внутренним образом касаются большой сферы S с центром в центре шестиугольника. Сфера P касается шести сфер внешним образом и сферы S внутренним образом. Чему равен радиус сферы P?

8.7.2. (*Всеросс., 2023, МЭ, 11.4*) На горизонтальном полу лежат три волейбольных мяча радиусом 18, попарно касающиеся друг друга. Сверху положили теннисный мяч радиусом 6, касающийся всех трёх волейбольных мячей. Найдите расстояние от верхней точки теннисного мяча до пола. (Все мячи имеют форму шара.)



8.7.3. (*«Надежда энергетики», 2023, 11.4*) Две сферы касаются друг друга внешним образом и каждая из них касается внутренним образом большей сферы. Радиус одной в два раза, а другой — в три раза меньше радиуса наибольшей сферы. В точке касания малых сфер друг с другом построена касательная плоскость к ним. Найдите расстояние от этой плоскости до центра наибольшей сферы, если ее радиус равен R.

8.7.4. (*«Ломоносов», 2022, 11.4*) Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Снаружи этого конуса расположены 11 шаров радиуса 3, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

8.8 Вписанная сфера

Дополнительные задачи — в листке Вписанная сфера.

8.8.1. (*«Росатом», 2018, 11.6*) Плоскости P и Q, параллельные основанию правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, пересекают ребро SA пирамиды в точках M и N. Длины отрезков SM, SN и SA являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q = 3$. Найти двугранный угол при основании пирамиды, если известно, что в усеченную пирамиду с плоскостями оснований P и Q можно вписать шар.

8.8.2. (*Всеросс., 2021, МЭ, 11.8*) Внутри тетраэдра $ABCD$ даны точки X и Y. Расстояния от точки X до граней ABC, ABD, ACD, BCD равны 14, 11, 29, 8 соответственно. А расстояния от точки Y до граней ABC, ABD, ACD, BCD равны 15, 13, 25, 11 соответственно. Найдите радиус вписанной сферы тетраэдра $ABCD$.

8.9 Описанная сфера

Дополнительные задачи — в листке Описанная сфера.

8.9.1. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.5*) На боковых ребрах TA, TB, TC правильной треугольной пирамиды $TABC$ соответственно выбраны точки A_1, B_1, C_1 так, что $\frac{TA}{TA_1} = \frac{TB}{TB_1} = \frac{TC}{TC_1} = 3$. Точка O — центр сферы, описанной около пирамиды $TABC_1$. Докажите, что прямая TO перпендикулярна плоскости A_1B_1C. Найдите радиус этой сферы и объем пирамиды TA_1B_1C, если сторона основания $AB = 1$, боковое ребро $TA = 5/4$.

8.9.2. (*«Физтех», 2022, 11.7*) Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

8.10 Сфера, вписанная в каркас

8.10.1. (*Открытая олимпиада, 2023, 11.4*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром равным x. S — сфера, вписанная в каркас этого куба (то есть, касающаяся всех его рёбер). Точка M — середина ребра B_1C_1. Прямая AM вторично пересекает сферу S в точке X. Найдите AX.

8.10.2. (*«Росатом», 2018, 11.6*) В правильной четырехугольной пирамиде противоположные боковые грани перпендикулярны. Высота пирамиды равна h. Найти радиус шара, касающегося ребер основания и боковых ребер пирамиды или их продолжений.

8.11 Тела вращения

Дополнительные задачи — в листке Тела вращения.

8.11.1. (*«Надежда энергетики», 2018, 11.2*) На кондитерской фабрике решили разработать новый сорт конфет. По технологическим соображениям конфета должна иметь вид цилиндра объемом V и с площадью полной поверхности S. При каких условиях на V и S любые два цилиндра с такими параметрами равны?

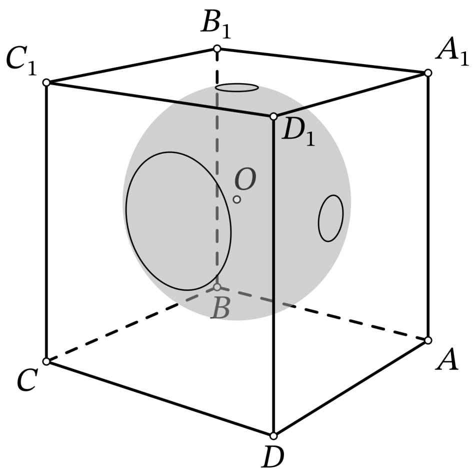
8.11.2. (*САММАТ, 2021, 11.6*) На дне вертикального цилиндрического сосуда с радиусом основания R лежит шар радиуса r. В сосуд налита жидкость так, что ее поверхность является касательной к поверхности шара. Этот шар заменили другим — большего радиуса. Жидкость при этом не выливалась из сосуда и не доливалась в него. Оказалось, что новый шар лежит на дне цилиндра, а поверхность жидкости опять является касательной к поверхности шара. При каких значениях соотношения R/r можно наблюдать такое явление при замене шара другим шаром большего радиуса?

8.11.3. (*САММАТ, 2021, 11.9*) На дне вертикального цилиндрического сосуда с радиусом основания R лежит шар радиуса r. В сосуд налита жидкость так, что ее поверхность является касательной к поверхности шара. Этот шар заменили другим — меньшего радиуса. Жидкость при этом не вылилась из сосуда и не доливалась в него. Оказалось, что новый шар лежит на дне цилиндра, а поверхность жидкости опять является касательной к поверхности шара. При каких значениях соотношения R/r можно наблюдать такое явление при замене шара другим шаром меньшего радиуса?

8.12 Комбинации фигур

Дополнительные задачи — в листке Комбинации фигур.

8.12.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 11.6*) Внутри куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен центр O сферы радиуса 10. Сфера пересекает грань AA_1D_1D по окружности радиуса 1, грань $A_1B_1C_1D_1$ по окружности радиуса 1, грань CDD_1C_1 по окружности радиуса 3. Найдите длину отрезка OD_1.



8.12.2. (*Открытая олимпиада, 2020, 11.4*) $ABCD$ — пирамида с правильным треугольником ABC в основании. Сфера радиуса 10 с центром в точке D проходит через середины сторон AD, BD и CD и касается грани ABC. Найдите объём пирамиды.

8.12.3. (*«Надежда энергетики», 2018, 11.4*) На каждую грань куба установлена правильна 4-угольная пирамида, основанием которой является эта грань куба. Все пирамиды равны.

- 4А. Могут ли боковые ребра трех пирамид, исходящие из одной вершины куба, лежать в одной плоскости? Если это возможно, найдите высоты таких пирамид, выразив их через длину a ребра куба. Если это возможно, приведите доказательство.
- 4В. Могут ли указанные в п. 4А тройки ребер лежать в плоскостях (каждая тройка — в

своей плоскости) одновременно для всех вершин куба?

8.12.4. (*Открытая олимпиада, 2015, 11.5*) В правильной треугольной пирамиде (не являющейся правильным тетраэдром) площадь основания в четыре раза меньше площади боковой грани. Высота пирамиды имеет длину 130 см.

Построим следующую (бесконечную) последовательность сфер. Пусть S_1 — вписанная сфера этой пирамиды. Тогда S_2 — сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_1; S_3 — сфера, касающаяся боковых граней пирамиды и сферы S_2, не равная S_1 и т. д.; S_{n+1} — сфера, касающаяся граней пирамиды и сферы S_n, не равная S_{n-1}.

Найдите суммарный объём всех этих сфер.

8.12.5. (*«Шаг в будущее», 2022, 11.5*) Шар радиуса $4/9$ лежит внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания 8 и высотой 3. Этот шар касается плоскости основания $ABCD$ пирамиды и боковых граней SBC и SCD. Плоскость γ касается шара, проходит через точку B, середину K ребра CD и пересекает ребро SC в точке M. Найдите объем пирамиды $MBCK$.

8.12.6. (*«Шаг в будущее», 2022, 11.5*) Внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ расположена правильная четырехугольная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$, основание $KLMN$ которой лежит в плоскости ABC. Центр основания $KLMN$ призмы расположен на отрезке AC, $KL \parallel AC$, $KN \parallel BD$ (точки K и B лежат по одну сторону от AC), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро KK_1 призмы равно 3. Вершины L_1 и M_1 верхнего основания призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ принадлежат боковым граням SBC и SCD пирамиды $SABCD$ соответственно. Плоскость γ проходит через прямую BD и точку L_1. Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду $SABCD$ плоскость γ, если сторона пирамиды равна $8\sqrt{2}$, а её высота равна 12.

8.12.7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 11.5*) В треугольной пирамиде $SABC$ в основании лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Боковые грани SAB и SAC перпендикулярны плоскости ABC. Сфера радиусом, равным AC, с центром в точке S делит пирамиду на две части. Найдите объём большей из этих частей, если $SA = AB = 2$.

8.12.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 11.6*) Около шара радиуса 1 описана правильная n-угольная призма, все ребра которой касаются некоторого другого шара. Докажите, что $n = 4$ и найдите объем этой призмы.

8.12.9. (*«Росатом», 2021, 11.6*) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 45°. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании пирамиды, а другие четыре — на ее боковых гранях. Найти отношение объемов куба и пирамиды.

8.12.10. (*«Физтех», 2022, 11.7*) Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани $ABCD$ и CDD_1C_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых B_1C_1 и C_1D_1, плоскости CDD_1, а также плоскости ABC в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle BB_1C_1$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1M = 3$.

8.12.11. (*«Физтех», 2023, 11.7*) Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

8.12.12. (*«Физтех», 2023, 11.7*) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD — высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объем пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

8.13 Неравенства в стереометрии

Дополнительные задачи — в листке Неравенства в геометрии.

8.13.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 11.3*) На боковых ребрах AD, BD и CD тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 такие, что плоскость $A_1B_1C_1$ параллельна основанию ABC. Точка D_1 лежит в основании. Докажите, что объем тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ не превосходит $\frac{4}{27}V$, где V — объем тетраэдра $ABCD$.

8.13.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 11.5*) Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — единичные вектора в пространстве. Докажите, что

$$\sqrt{1 - \vec{a} \cdot \vec{b}} \leqslant \sqrt{1 - \vec{b} \cdot \vec{c}} + \sqrt{1 - \vec{a} \cdot \vec{c}}.$$

8.13.3. (*Открытая олимпиада, 2017, 11.6*) Сфера радиуса 10 вписана в каркас тетраэдра (т. е. касается всех его рёбер). Сумма длин рёбер тетраэдра составляет 180. Докажите, что объём тетраэдра не превосходит 3000.

8.14 Задачи на экстремум в стереометрии

Дополнительные задачи — в листке Геометрические задачи на экстремум.

8.14.1. (*«Физтех», 2021, 11.2*) Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 6$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра — наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

8.14.2. (*«Росатом», 2022, 11.4*) Длины ребер a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 прямоугольных параллелепипедов P_A и P_B — целые числа. Если в параллелепипеде P_A увеличить на 1 длину одного из ребер a_1, a_2 или a_3, то отношение объемов $V_A : V_B$ изменится на 3, 5 или на 7 единиц соответственно. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение отношения объемов $V_A : V_B$.

8.14.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 11.5*) В тетраэдре $SABC$ ребра SA, SB, SC взаимно перпендикулярны и равны a, b, c соответственно.

а) Найдите сторону куба с вершиной S наибольшего объема, целиком лежащего в тетраэдре;

б) Определите размеры прямоугольного параллелепипеда с вершиной S наибольшего объема, целиком лежащего в тетраэдре.

8.14.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 11.5*) На сфере расположены точки A, B, C таким образом, что минимальные расстояния по поверхности сферы от точки A до точки B, от точки A до точки C и от точки B до точки C равны 6π, 8π, 10π соответственно. Найдите минимальный возможный при таких условиях периметр треугольника ABC.

8.14.5. (*«Росатом», 2020, 11.6*) В каком отношении $CE : CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом $30°$, если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

8.14.6. (*«Росатом», 2022, 11.6*) По диагоналям оснований AC и B_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a ползут два муравья Гоша и Леша. Движение они начали одновременно из точек A и B_1 соответственно с постоянной скоростью, причем скорость Леши была в два раза больше скорости передвижения Гоши, и закончили, когда Леша оказался в точке D_1. Какое наименьшее расстояние разделяло Гошу и Лешу во время движения?

8.14.7. (*Открытая олимпиада, 2021, 11.7*) Два куба с ребром $12\sqrt[4]{\frac{8}{11}}$ имеют общую грань. Сечение одного из этих кубов некоторой плоскостью — треугольник площади 16. Сечение другого той же плоскостью — четырёхугольник. Какое наибольшее значение может принимать его площадь?

8.14.8. (*«Шаг в будущее», 2016, 11.10*) В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота относится к стороне основания, как $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану боковой грани? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае.

8.14.9. (*«Шаг в будущее», 2017, 11.10*) Боковые ребра треугольной пирамиды $TABC$ образуют между собой прямые углы. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину C и середину стороны AB основания, если боковые ребра $TA = 6$, $TB = 12$, $TC = 2$? Какое из боковых ребер пересекает в этом случае плоскость и на какие части его делит?

8.15 Координаты и векторы в пространстве

Дополнительные задачи — в листке Векторы.

8.15.1. (*«Росатом», 2017, 11.2*) Найти наибольшее значение выражения $|x| + |y| + |z|$ для троек $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin(x+y) \cdot \sin(x+y+z) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{\pi^2}{3}. \end{cases}$$

Найти тройки $(x; y; z)$, для которых наибольшее значение достигается.

8.15.2. (*Открытая олимпиада, 2015, 11.2*) В пространстве дано сто единичных векторов, сумма которых равна нулевому вектору. Можно ли выбрать из них несколько таких, что их сумма имеет длину хотя бы 60?

8.15.3. (*Открытая олимпиада, 2018, 11.2*) В равногранном тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. Докажите, что получившийся многогранник — прямоугольный параллелепипед.

8.15.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 11.3*) В трёхмерном пространстве задана стандартная система координат. Найдите площадь множества точек, удовлетворяющих следующим условиям: $x^2 + y^2 = 5$, $|x - y| < 1$, $|y - z| < 1$.

8.15.5. (*Всеросс., 2021, РЭ, 11.4*) Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу Ω. Докажите, что сферы, симметричные Ω относительно прямых SA, SB, SC и плоскости ABC, имеют общую точку. Сфера, симметричная данной относительно прямой ℓ — это сфера такого же радиуса, центр которой симметричен центру исходной сферы относительно прямой ℓ.

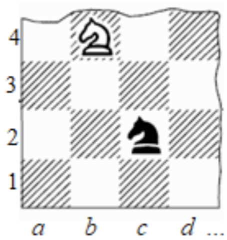
Глава 9

Комбинаторика

9.1 Правила суммы и произведения

Дополнительные задачи — в листке Правила суммы и произведения.

9.1.1. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.1*) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, состоящей из 10×10 клеток двух коней — белого и черного так, чтобы они угрожали друг другу? (Конь ходит буквой «Г», т. е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.)



9.1.2. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.1*) Имеется 5 кусков прозрачного стекла одинаковой квадратной формы и одинакового размера. Каждое стекло своими диагоналями условно разделено на 4 одинаковые части (прямоугольные треугольники), и один из этих треугольников закрашен непрозрачной краской своего индивидуального цвета, отличного от цветов закраски других стекол. Затем все эти стекла укладываются друг на друга в стопку (с точным выравниванием границ и вершин) закрашенными частями вверх. Сколько существует различных способов укладки стекол в стопку так, чтобы вся она в итоге оказалась полностью непрозрачной в вертикальном направлении.

9.1.3. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.2*) Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

9.1.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 11.2*) Сколько пятизначных чисел делятся на свою последнюю цифру?

9.1.5. (*«Шаг в будущее», 2022, 11.2*) Имеется куб, зафиксированный на ножках, и шесть различных красок. Сколькими способами можно покрасить все грани куба (каждую в один цвет, все краски использовать не обязательно) так, чтобы соседние грани (имеющие общее ребро) были разного цвета?

9.1.6. (*«Физтех», 2023, 11.2*) Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

9.1.7. (*«Курчатов», 2020, 11.2*) Найдите количество способов раскрасить все натуральные числа от 1 до 20 в синий и красный цвета так, чтобы оба цвета встречались и произведение всех красных чисел было взаимно просто с произведением всех синих чисел.

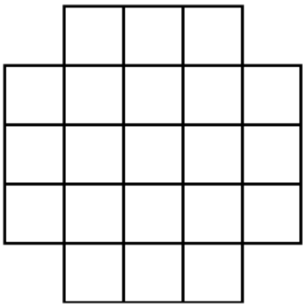
9.1.8. (*Открытая олимпиада, 2021, 11.3*) Палиндром — это слово, которое не меняется, если в нём переставить буквы в обратном порядке, например $\overline{abcba}$. Сколько различных 11-буквенных слов можно составить из букв a, b, c, d, e так, чтобы они не содержали палиндромов длины больше 1?

9.1.9. (*Всесиб., 2022, 11.3*) Перестановка чисел 1, 2, 3, $\ldots$, n в некотором порядке называется *забавной*, если в ней каждое число, начиная со второго слева, либо больше всех чисел, стоящих левее него, либо меньше всех чисел, стоящих левее него. Например, перестановка 3, 2, 1, 4, 5, 6 является забавной, а перестановка 3, 1, 2, 4, 5, 6 — нет. Найти количество всех различных забавных перестановок чисел 1, 2, 3, $\ldots$, n.

9.1.10. (*«Физтех», 2022, 11.3*) Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

9.1.11. (*«Бельчонок», 2020, 11.4*) Сколькими способами можно поставить 17 фишек на шахматную доску 6×6, если фишки нельзя ставить на клетки, имеющие общую сторону?

9.1.12. (*«Бельчонок», 2020, 11.4*) Фигура (см. рис.) состоит из одинаковых квадратных клеток, и две из них покрасили в синий цвет, а остальные клетки остались белыми. Сколько существует таких раскрасок, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются за одну?



9.1.13. (*«Бельчонок», 2020, 11.4*) Квадрат 5×5 расчертили на 25 одинаковых клеток, и две из них покрасили в синий цвет, а остальные клетки остались белыми. Сколько существует таких раскрасок, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются за одну?

9.1.14. (*«Физтех», 2021, 11.4*) Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}\,(a; b; c) = 6, \\ \text{НОК}\,(a; b; c) = 2^{15} \cdot 3^{16}. \end{cases}$$

9.1.15. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 11.5*) Код сейфа состоит из пяти идущих подряд цифр. Василий Петрович положил деньги в сейф, а когда захотел их забрать, выяснилось, что он забыл код. Он только помнил, что в коде были числа 21 и 16. Какое наименьшее количество пятизначных номеров необходимо перебрать, чтобы наверняка открыть сейф?

9.1.16. (*«Бельчонок», 2022, 11.5*) Трое бельчат на завтрак обычно едят кашу: манную (М), пшённую (П), овсяную (О), гречневую (Г). Ни одна каша не нравится всем троим бельчатам, но для каждой пары бельчат есть хотя бы одна каша, которая нравится им обоим. Сколько можно составить разных таблиц, в которых в каждой клетке стоит плюс (если нравится) или минус (если не нравится)?

	М	П	О	Г
Бельчонок 1				
Бельчонок 2				
Бельчонок 3				

9.1.17. (*Открытая олимпиада, 2019, 11.6*) Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 9 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была чётна? (Числа могут повторяться)

9.2 Количество делителей

Дополнительные задачи — в листке Функции делителей.

9.2.1. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.1*) Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 42 натуральных делителя (включая единицу и само число).

9.2.2. (*«Бельчонок», 2020, 11.2*) Натуральное число N имеет 30 делителей, а число $5N$ имеет 40 делителей. Приведите пример такого числа.

9.2.3. (*«Бельчонок», 2020, 11.2*) Существует ли натуральное число N, имеющее 24 делителя, такое, что число $3N$ имеет 32 делителя?

9.2.4. (*«Росатом», 2018, 11.3*) Найти натуральное число, делящееся на 225 и имеющее 15 различных делителей.

9.2.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 11.4*) Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 55 натуральных делителей, считая единицу и само число.

9.2.6. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2023, 11.6*) Для натурального числа N выписали все его натуральные делители p_l в порядке возрастания: $1 = p_1 < p_2 < \ldots < p_k = N$. Обозначим количество натуральных делителей числа N через $\sigma(N)$. Найдите все возможные значения $\sigma(N^3)$, если известно, что

$$p_3 \cdot p_4 \cdot p_{1876} \cdot p_{1877} \geqslant N^2.$$

9.3 Функции делителей

Дополнительные задачи — в листке Функции делителей.

9.3.1. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.1*) Найдите натуральное число, которое имеет десять натуральных делителей (включая единицу и само число), два из которых простые, а сумма всех его натуральных делителей равна 186.

9.4 Сочетания

Дополнительные задачи — в листке Размещения, перестановки и сочетания.

9.4.1. (*«Надежда энергетики», 2023, 11.1*) Каждый из шести домов, стоящих на одной стороне улицы, соединен кабельными воздушными линиями с каждым из восьми домов на противоположной стороне. Сколько попарных пересечений образуют тени этих кабелей на поверхности улицы, если никакие три из них не пересекаются в одной точке? Считайте, что свет, порождающий эти тени, падает вертикально вниз.

9.4.2. (*«Бельчонок», 2023, 11.1*) У бельчонка есть 7 орехов, 6 грибов и 10 ягод. Сколькими способами он может выложить все эти предметы в ряд так, чтобы никакие две ягоды не лежали рядом?

9.4.3. (*«Бельчонок», 2023, 11.1*) Андрей, Боря, Вася, Гриша, Денис и Женя после олимпиады собрались в кинотеатр. Они купили билеты на 6 мест подряд в одном ряду. Андрей и Боря хотят сидеть рядом, а Вася и Гриша не хотят. Сколькими способами они могут сесть на свои места с учетом их пожеланий?

9.4.4. (*«Бельчонок», 2022, 11.3*) Каким числом способов можно разложить 30 яблок в 3 корзинки так, чтобы в первой корзинке лежало меньше яблок, чем во второй, во второй меньше, чем в третьей, и пустых корзинок не было?

9.4.5. (*«Росатом», 2015, 11.3*) Найти зависимость от n числа целых неотрицательных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$$

при $m = 2$ и $m = 3$. При каком n число решений для $m = 3$ будет в четыре раза большим, чем число решений для $m = 2$?

9.4.6. (*«Росатом», 2017, 11.3*) Сколько существует различных, целых, положительных, двенадцатиразрядных чисел, делящихся на 9, в записи которых используется две цифры 3 и 4?

9.4.7. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.3*) Сколько существует различных многочленов вида

$$P(x) = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,$$

где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1) = 11$, $P(1) = 21$?

9.4.8. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 11.5*) В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.

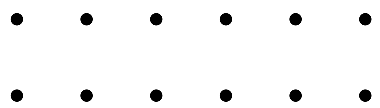
Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.

Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры); числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трёх разрядах цифры совпадают, и только в четвёртом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).

Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?

9.4.9. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 11.6*) Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.

9.4.10. (*«Ломоносов», 2023, 11.8*) Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 7 пар пересекающихся отрезков?



9.5 Перестановки с повторениями. Полиномиальная формула

Дополнительные задачи — в листке Размещения, перестановки и сочетания.

9.5.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 11.1*) Пусть $a_1 + \ldots + a_m = n$, где $a_1, \ldots, a_m$ — натуральные числа. Докажите, что $n!$ делится на произведение $a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_m!$.

9.5.2. (*ОММО, 2021.7*) При каком наибольшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1 - 2x + ax^2)^8$ будет равен -1540?

9.6 Формула включений и исключений

Дополнительные задачи — в листке Формула включений и исключений.

9.6.1. (*Открытая олимпиада, 2021, 11.2*) Найдите сумму натуральных чисел от 1 до 3000 включительно, имеющих с числом 3000 общие делители, большие 1.

9.7 Геометрическая комбинаторика

Дополнительные задачи — в листке Геометрическая комбинаторика.

9.7.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 11.1*) Внутри круга нарисовано 16 радиусов этого круга и 10 окружностей, центры которых совпадают с центром круга. На сколько областей радиусы и окружности делят круг?

9.7.2. (*Всеросс., 2021, МЭ, 11.3*) На координатной плоскости отметили все точки (x, y) такие, что x и y — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $0 \leqslant y \leqslant 26$. Сколько существует прямых, проходящих ровно через 3 отмеченные точки?

9.7.3. (*«Физтех», 2023, 11.6*) На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

9.7.4. (*Открытая олимпиада, 2022, 11.7*) Дан правильный n-угольник, в котором проведены все диагонали. Докажите, что они образуют не больше

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} - \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) + 1 - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 3\right)$$

точек пересечения (не считая вершин).

(Число n во всех вариантах задачи представляется в виде $n = 4k + 2$, где k натуральное число.)

9.8 Рекуррентные соотношения в комбинаторике

Дополнительные задачи — в листке Рекуррентные соотношения в комбинаторике.

9.8.1. (*САММАТ, 2022, 11.3*) В школе математики и программирования лестница с первого этажа на второй этаж состоит из двух пролетов, состоящих из 8 и 9 ступенек. Сколькими способами десятиклассник Вася может спуститься по ней, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки?

9.8.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 11.5*) В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА — нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

9.9 Принцип Дирихле

Дополнительные задачи — в листке Принцип Дирихле.

9.9.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 11.2*) На столе лежат 30 монет: 23 десятирублёвых и 7 пятирублёвых, причём 20 из этих монет лежат вверх орлом, а остальные 10 — решкой. При каком наименьшем k среди произвольно выбранных k монет обязательно найдётся десятирублёвая монета, лежащая орлом вверх?

9.9.2. (*«Бельчонок», 2022, 11.2*) Каждый из 8 бельчат бросил шишку в какого-нибудь другого бельчонка, независимо от других. Докажите, что всегда найдётся группа из трёх бельчат, которые не бросили шишку в бельчонка из этой группы.

9.9.3. (*«Ломоносов», 2020, 11.2*) Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных гномика, а всего есть 12 разновидностей гномиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки гномиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному гномику всех 12 разновидностей?

9.9.4. (*Всеросс., 2021, РЭ, 11.6*) Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

9.10 Знакомства

9.10.1. (*Всеросс., 2022, МЭ, 11.4*) В спортивной школе занимается 55 человек, каждый из которых либо теннисист, либо шахматист. Известно, что нет четырёх шахматистов, которые имели бы поровну друзей среди теннисистов. Какое наибольшее количество шахматистов может заниматься в этой школе?

9.10.2. (*Всеросс., 2022, РЭ, 11.4*) В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что при любом выборе 101 человека из этой компании количество пар дружащих людей среди них нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

9.10.3. (*Всесиб., 2015, 11.4*) Докажите, что в любой компании из 13 человек либо найдётся человек, знающий четырёх других, либо найдутся четверо, попарно не знакомых. Знакомства обоюдны — если А знает Б, то и Б знает А.

9.10.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 11.8*) Каждый из 25 учеников 11 «А» класса дружит ровно с двумя учениками 11 «Б», а все ученики 11 «Б» имеют разные наборы друзей в 11 «А». Каким наибольшим может быть число учеников в 11 «Б»?

9.10.5. (*ОММО, 2023.10*) В группе из 80 человек некоторые знакомы друг с другом (знакомства взаимны). Известно, что в группе есть человек, который знает ровно 1 из оставшихся, человек, который знает ровно 2 из оставшихся, $\ldots$, человек, который знает ровно 54 из оставшихся. Докажите, что в группе есть три человека, каждые два из которых знакомы.

9.11 Графы

Дополнительные задачи — в листке Графы.

9.11.1. (*«Надежда энергетики», 2016, 11.1*) В стране «Энергетика» 150 заводов и некоторые из них соединены автобусными маршрутами, которые не останавливаются нигде, кроме этих заводов. Оказалось, что любые четыре завода можно разбить на две пары так, что между заводами каждой пары ходит автобус. Найдите наименьшее число пар заводов, которые могут быть соединены автобусными маршрутами.

9.11.2. (*Открытая олимпиада, 2016, 11.3*) В некоторой стране 100 городов. Министерство авиации требует, чтобы каждые два города были соединены двусторонним авиарейсом ровно одной авиакомпании и чтобы рейсами каждой авиакомпании можно было бы добраться от любого (возможно, с пересадками). При каком наибольшем числе авиакомпаний это возможно?

9.11.3. (*Открытая олимпиада, 2018, 11.4*) В некоторой стране 450 городов и 6 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из шести авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 150 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

9.11.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 11.5*) В стране 100 городов, между ними действует несколько беспосадочных авиалиний так, что от любого города до любого можно добраться, возможно, с пересадками. Для каждой пары городов вычислили наименьшее количество перелётов, необходимых чтобы добраться от одного до другого. Назовём транспортной затруднённостью страны сумму квадратов этих 4950 чисел. Какое наибольшее значение может принимать транспортная затрудённость? Ответ должен быть дан в виде числа (в десятичной системе счисления).

9.11.5. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 11.7*) В стране 110 городов. Между каждыми двумя из них либо есть дорога, либо её нет.

Автомобилист находился в некотором городе, из которого вела ровно одна дорога. Проехав по дороге, он оказался во втором городе, из которого вели уже ровно две дороги. Проехав по одной из них, он оказался в третьем городе, из которого вели уже ровно три дороги, и так далее. В какой-то момент, проехав по одной из дорог, он оказался в N-м городе, из которого вели уже ровно N дорог. На этом автомобилист своё путешествие прекратил. (Для каждого $2 \leqslant k \leqslant N$ из k-го города выходило ровно k дорог с учётом той, по которой автомобилист в этот город приехал.)

Какое наибольшее значение может принимать N?

9.11.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 11.8*) В стране 20 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Беспосадочный перелёт из А в Б назовём централизующим, если из Б можно в большее, чем из А, число городов долететь без пересадки. Какое наибольшее число городов может насчитывать авиамаршрут, все перелёты на котором централизующие?

Глава 10

Вероятность

10.1 Классическая вероятность

Дополнительные задачи — в листке Вероятность.

10.1.1. (*«Бельчонок», 2022, 11.1*) Борис раскладывает 8 белых и 8 чёрных шариков по двум коробкам. Настя наугад выбирает коробку, а потом не глядя берёт из неё шарик. Может ли Борис так разложить шарики по двум коробкам, чтобы вероятность вынуть белый шарик была больше $2/3$?

10.1.2. (*«Бельчонок», 2022, 11.1*) Для отбора на соревнования борец Владимир должен был провести три схватки и одержать подряд хотя бы две победы. Его соперниками были Андрей (А) и Борис (Б). Владимир мог выбрать схему встреч: АБА или БАБ. Вероятность Владимира потерпеть поражение в одной схватке от Бориса равна 0,3, а от Андрея 0,4; вероятности постоянны. При какой схеме вероятность отобраться на соревнования больше, и чему равна эта вероятность?

10.1.3. (*«Бельчонок», 2022, 11.1*) Какова вероятность, что в случайной последовательности из 8 единиц и двух нулей между двумя нулями ровно три единицы?

10.1.4. (*«Курчатов», 2022, 11.1*) На тарелке лежат различные конфеты трех видов: 2 леденца, 3 шоколадных и 5 мармеладных. Света последовательно все их съела, выбирая каждую следующую конфету наугад. Найдите вероятность того, что первая и последняя съеденные конфеты были одного вида.

10.1.5. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.2*) Имеется одна подключенная к сети электрическая розетка, два удлинителя на три розетки каждый и одна настольная лампа в комплекте. Незнайка случайным образом воткнул все три вилки в 3 из 7 розеток. С какой вероятностью загорится лампа?

10.1.6. (*«Шаг в будущее», 2022, 11.2*) В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/2$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее трех. Лаборант поочередно случайно выбирает три колбы, и первую из них полностью заполняет 80-процентным раствором соли, вторую полностью заполняет 50-процентным раствором соли, а третью колбу полностью заполняет 20-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих трех колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 45% до 55% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать.

10.1.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 11.3*) В противоположных углах шахматной доски стоят Красная и Белая Королевы. Раз в минуту они случайным образом переходят на соседнюю по стороне клетку (одна только вправо или вверх, другая только влево или вниз). Какова вероятность, что они одновременно окажутся в одной клетке (и будут стоять там вместе в течение минуты)?

10.1.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 11.4*) Робот и сотрудники компании участвуют в викторине. Вероятность правильного ответа у робота равна 4/5, а вероятность правильного ответа у сотрудника равна 2/3, если отвечал мужчина, и равна 3/7, если отвечала женщина. Вероятность того, что ответ случайно выбранного сотрудника совпадет с ответом робота равна 1/2. Чему равно отношение количества мужчин в компании к количеству женщин?

10.1.9. (*«Росатом», 2021, 11.4*) В колоде 10 карт, на каждой из них нарисовано одно из чисел от 1 до 10. Случайно выбранную из колоды карту кладут на стол, показывают всем написанное на ней число и возвращают ее в колоду. После этого колода тщательно перемешивается и готова к продолжению игры. Петя выкладывал на стол карту три раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел оказалась равной 5?

10.1.10. (*«Росатом», 2021, 11.4*) Петя совершенно случайно написал на бумаге два телефонных номера. Какова вероятность того, что суммы последних двух цифр этих номеров отличаются на 6 единиц?

10.1.11. (*«Росатом», 2017, 11.4*) Через случайно выбранные три вершины куба с ребром 2 проводится плоскость. Найти вероятность того, что площадь сечения превзойдет 5. Допускается, что эти вершины принадлежат одной грани куба.

10.1.12. (*«Росатом», 2020, 11.4*) Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число, кратное 5 и имеющее при делении на 7 остаток 3.

10.1.13. (*«Росатом», 2017, 11.4*) Случайно выбранное шестизначное целое положительное число оканчивается на 32. Найти вероятность того, что оно делится на 14.

10.1.14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 11.4*) Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение

$$3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0.$$

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых как минимум два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

10.1.15. (*«Росатом», 2021, 11.4*) На детском новогоднем празднике раздавали шоколадные и фруктовые конфеты. Дети подходили к деду Морозу, залезали рукой в его мешок и вынимали из него по две конфеты. Когда Петя подошел к мешку, он понял, что шоколадных конфет в мешке почти не осталось и вероятность получить две шоколадные конфеты в три раза меньше, чем шоколадную и фруктовую. Какое наименьшее число шоколадных конфет могло находиться в мешке деда Мороза в момент, когда Петя забирал свои конфеты, если после него еще не менее 10 детей получили свои конфеты до того, как мешок опустел?

10.1.16. (*«Росатом», 2023, 11.5*) На клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом расставлены 4 одинаковых фигуры. Найти вероятность того, что три из них будут находиться либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, либо на одной из двух главных диагоналей.

10.2 Геометрическая вероятность

Дополнительные задачи — в листке Вероятность.

10.2.1. (*«Росатом», 2019, 11.4*) На сторонах BA и BC треугольника ABC совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь треугольника BMN окажется не больше половины площади треугольника ABC.

10.2.2. (*«Росатом», 2018, 11.4*) На окружности совершенно случайно взяты три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный.

10.2.3. (*«Росатом», 2019, 11.4*) На боковых ребрах DA и DB правильной треугольной пирамиды $ABCD$ совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь боковой поверхности пирамиды $MNCD$ с вершиной в точке D составляет не более половины площади боковой поверхности пирамиды $ABCD$.

10.2.4. (*«Росатом», 2019, 11.4*) В квадрате $ABCD$ со стороной 4 расположена точка O, отстоящая от сторон AD и CD на расстояние 1. Через точку O совершенно случайно проведена прямая L, разделяющая квадрат на две части. Найти вероятность того, что одна из частей будет иметь площадь, не превосходящую 3.

10.2.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 11.5*) Соревнование по *бегу на непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B, после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Зритель купил билет на стадион и хочет, чтобы спортсмены пробежали мимо его места (тогда он сможет сделать удачную фотографию). Какова вероятность, что это случится?

10.3 Дискретные распределения

Дополнительные задачи — в листке Вероятность.

10.3.1. (*«Росатом», 2018, 11.4*) Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 10 шагов и остановился. Найти вероятность того, что он окажется на расстоянии более двух шагов от начала движения.

10.3.2. (*«Росатом», 2017, 11.4*) Игральная кость представляет собой кубик, на гранях которого отмечено другим цветом от одного до шести очков. Петя случайным образом бросает на стол три игральных кости одновременно и считает сумму числа очков, выпавших на всех костях. Каждое значение s этой суммы, расположенное от 3 до 18, может появится с определенной вероятностью. Найти s, при котором эта вероятность максимально возможная.

10.3.3. (*«Росатом», 2018, 11.4*) Код замка состоит из трех цифр от 0 до 9. Замок открывается, если сумма цифр кода делится на 3. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет замок.

10.3.4. (*«Росатом», 2017, 11.4*) Игральная кость имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с двугранным углом $60°$ при основании. На боковых гранях пирамиды нарисованы цифры от 1 до 4, на основании — 5. Вероятность того, что при бросании кость ляжет на плоскость, закрывая определенную цифру, пропорциональна площади грани или основания с этой цифрой. Найти вероятность того, что сумма цифр, закрытых костью при трех бросаниях, равна 13.

10.3.5. (*«Росатом», 2020, 11.4*) Саша и Маша задают друг другу по пять каверзных вопросов и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Машей вопрос Саша скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{2}$. Маша на вопрос Саши дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{2}{3}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Маша дала на два правдивых ответа больше, чем Саша. С какой вероятностью это могло произойти?

10.3.6. (*«Росатом», 2022, 11.4*) Петя бросает несколько раз на стол игральный кубик и считает сумму очков, выпавших на его верхней грани. Для любого натурального числа n событие A_n наступает, если эта сумма равна n. Найти вероятность события A_{11}.

10.3.7. (*«Росатом», 2022, 11.3*) Блоха Кузя может совершать прыжки по прямой L. Старт для прыжков находится в точке A прямой L, длина одного прыжка h, направление каждого прыжка выбирается случайным и равновозможным. Найти вероятность того, что, сделав от четырех до восьми случайных прыжков, Кузя хотя бы один раз будет находиться на расстоянии $3h$ от A.

10.4 Формула полной вероятности

Дополнительные задачи — в листке Вероятность.

10.4.1. (*«Росатом», 2021, 11.4*) На столе лежит колода игральных карт 36 листов. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый из игроков совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 3. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игроки могут забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

10.5 Математическое ожидание

Дополнительные задачи — в листке Вероятность.

10.5.1. (*«Росатом», 2016, 11.4*) Петя и Вова играют в кости на фантики. Ведущий игру Петя выигрывает, если при бросании им двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков не превосходит 4, и проигрывает во всех остальных случаях. Проиграв, Петя отдаёт Вове 1 фантик, выиграв — получает от Вовы k фантиков. Игра считается справедливой, если среднее значение выигрыша каждым игроком равна нулю. Найти значение k, при котором игра будет справедливой.

10.5.2. (*«Росатом», 2020, 11.4*) Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 2 : 1$, $AQ : QC = 1 : 3$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в три раза. Найти математическое ожидание случайной величины — отношения площадей треугольников PQM и ABC.

10.5.3. (*«Росатом», 2023, 11.5*) Петя записывает на листе бумаги строчку из 7 нулей и 20 единиц, расположенных в совершенно случайном порядке. Найти математическое ожидание случайной величины — числа нулей, записанных до появления первой единицы.

Глава 11

Задачи с параметрами

11.1 Равносильные переходы

11.1.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 11.1*) Найдите все значения параметра a, для которых уравнение
$$\left|x^3+1\right| = a(x+1)$$
имеет три корня.

11.1.2. (*«Росатом», 2018, 11.1*) Для каждого допустимого a найти наименьшее решение уравнения
$$2\log_a^2 x + \log_a x^3 - 3 = \log_x a^2.$$

11.1.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 11.2*) Найти значение параметра p, при котором уравнение $px^2 = |x-1|$ имеет ровно три решения.

11.1.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 11.2*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2+2x+2+2|x+1| = a$ имеет ровно два корня.

11.1.5. (*САММАТ, 2023, 11.9*) Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$$\frac{a^2+x^2-4x-6a-23}{\sqrt{a^2+ax-2x^2-2a-x+1}} = 0$$
имеет единственное решение.

11.1.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 11.5*) При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log_x 5} - \dfrac{1}{\log_y 5} = 1, \\ y = ax^2 + x + 1. \end{cases}$$
не имеет решений?

11.1.7. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.5*) Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{|x-1|}(ax) = 2\log_{|x-1|}(x+y), \\ 3 - x = \sqrt{x^2 - 6x + y + 8} \end{cases}$$

имеет единственное решение, и найдите это решение при каждом a.

11.1.8. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.5*) Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{|x+4|}(ax + 5a) = 2\log_{|x+4|}(x+y), \\ x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + y - 2} = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения, и найдите эти решения при каждом a.

11.1.9. (*«Шаг в будущее», 2018, 11.5*) Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнение

$$6a - 2ab\tilde{\operatorname{tg}}x + \sqrt{2\left(x + \left|x + b\tilde{\operatorname{tg}}x\right| + b\tilde{\operatorname{tg}}x\right)} = 4 + 2ax$$

имеет единственное решение, если $\tilde{\operatorname{tg}}x = \operatorname{tg}x$ при $x \neq \pi/2 + \pi n$, и $\tilde{\operatorname{tg}}x = 0$ при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Укажите это решение при каждом из найденных значений a и b.

11.1.10. (*«Росатом», 2016, 11.5*) Функция

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t > 0, \\ 0, & \text{при } t \leqslant 0. \end{cases}$$

При каких значениях a система

$$\begin{cases} x \cdot \chi(x - a) + y \cdot \chi(y - 2a) = 5a, \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

11.1.11. (*«Ломоносов», 2020, 11.5*) Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наибольшее из двух чисел $x^3 + 3x + a - 9$ и $a + 2^{5-x} - 3^{x-1}$ положительно.

11.1.12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 11.6*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\left|x^3 + 2x^2 + x + a\right| + \left|x^3 - 2x^2 + x - a\right| < 4x^2 + 8x$$

представляет собой на числовой прямой промежуток длиной 1.

11.1.13. (*«Шаг в будущее», 2016, 11.9*) Определите все значения a, при которых уравнение

$$4x^2 - 16|x| + (2a + |x| - x)^2 = 16$$

имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

11.1.14. (*«Шаг в будущее», 2017, 11.9*) Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2y - 2 = a(x-1), \\ \dfrac{2x}{|y|+y} = \sqrt{x} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

11.2 Параметры и квадратный трёхчлен

Дополнительные задачи — в листках

- Параметры и квадратный трёхчлен. 1
- Параметры и квадратный трёхчлен. 2
- Параметры и квадратный трёхчлен. 3

11.2.1. (*САММАТ, 2021, 11.2*) На координатной плоскости рассматриваются параболы вида $f(x) = 2020ax^2 - 2020ax + 1$, относительно которых известно, что $|f(x)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Найдите наибольшее возможное значение параметра a.

11.2.2. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.3*) Числа a, b, c таковы, что каждое из двух уравнений $x^2 + bx + a = 0$ и $x^2 + cx + a = 1$ имеет по два целых корня, при этом все эти корни меньше -1. Найдите наименьшее значение a.

11.2.3. (*ОММО, 2022.7*) При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_2^2 x + (a-6)\log_2 x + 9 - 3a = 0$$

имеет ровно два корня, один из которых в четыре раза больше, чем другой?

11.3 Параметры и уравнения высших порядков

Дополнительные задачи — в листке Параметры. Уравнения высших порядков.

11.3.1. (*«Надежда энергетики», 2020, 11.1*) Числовая характеристика x некоторого теплоэнергетического процесса является корнем уравнения

$$x^3 - 3x = t,$$

где t — температура окружающей среды, измеряемая в градусах Цельсия. По некоторым технологическим соображениям корень должен быть единственным. При каких значениях t уравнение имеет единственный корень x_0? Оцените снизу абсолютную величину этого корня и покажите, что полученную оценку улучшить нельзя.

11.3.2. (*«Росатом», 2021, 11.5*) Доказать, что уравнение

$$x^3 - 6x = a^3 + \frac{8}{a^3}$$

не может иметь трех действительных решений ни при каких a.

При каких a уравнение имеет два различных решения? Найти эти решения.

11.4 Параметры в тригонометрии

Дополнительные задачи — в листке Параметры и тригонометрия.

11.4.1. (*САММАТ, 2021, 11.7*) Укажите, при каких значениях параметра a уравнение имеет решение:

$$2\cos^2\left(2^{4x-x^2-4}\right) = 5a - \sqrt{3}\sin\left(2^{4x-x^2-3}\right).$$

11.4.2. (*«Росатом», 2019, 11.2*) При каком значении a уравнение

$$|\sin(2x-y)| + |\cos(x+2y)| + 1 = \frac{2a}{a^2+1}$$

имеет решение? Найти эти решения. Найти минимальное R, при котором любой круг радиуса R на плоскости содержит хотя бы одну точку с координатами $(x; y)$ — решениями уравнения.

11.4.3. (*«Росатом», 2020, 11.2*) При каких значениях a точка с координатами $(\sin a; \sin 3a)$ симметрична точке с координатами $(\cos a; \cos 3a)$ относительно прямой с уравнением $x+y=0$?

11.4.4. (*«Росатом», 2022, 11.2*) Найти все числа C, для которых неравенство

$$|\alpha\sin x + \beta\cos 2x| \leqslant C$$

выполняется при всех x и любых $(\alpha; \beta)$ таких, что $\alpha^2+\beta^2 \leqslant 4$.

11.4.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 10–11.2*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

при любом значении b имеет хотя бы одно решение.

11.4.6. (*«Ломоносов», 2023, 11.2*) При каком наименьшем по модулю значении параметра α уравнение

$$1234\sin^{20}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 789\cos^{23}\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right) = 2023$$

имеет решение на отрезке $[-\pi; \pi]$?

11.4.7. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 11.3*) Решите уравнение

$$\frac{\sin^4\varphi}{\sin^2 x} + \frac{\cos^4\varphi}{\cos^2 x} = 1$$

при всех значениях параметра φ.

11.4.8. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.5*) Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\log_2 \frac{3\sqrt{3} + (\sin x + 4)\cos a}{3\sin a \cos x} = |3\sin a \cos x| \left|(\sin x + 4)\cos a + 3\sqrt{3}\right|.$$

11.4.9. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.5*) Найдите все значения параметра b, при котором для любого значения параметра $a \in [-2; 1]$ неравенство $a^2 + b^2 - \sin^2 2x - 2(a+b)\cos 2x - 2 > 0$ не выполняется хотя бы для одного значения x.

11.4.10. (*«Шаг в будущее», 2020, 11.5*) Найдите все значения параметра b, при котором для любого значения параметра $a \in [-1; 2]$ неравенство $\operatorname{tg}^2 x + 4(a+b)\operatorname{tg} x + a^2 + b^2 - 18 << 0$ выполняется при каждом $x \in [-\pi/4; \pi/4]$.

11.4.11. (*«Росатом», 2018, 11.5*) При каких a уравнение

$$4\sin^2 x + 4a\cos x - 5a = 0$$

имеет решения на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$?

11.4.12. (*«Росатом», 2021, 11.5*) При каких a уравнение

$$\arcsin(\cos x) = \cos\bigl(\arcsin(x-a)\bigr)$$

имеет единственное решение?

11.4.13. (*ОММО, 2023.6*) Укажите все значения параметра a, $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства

$$\frac{|\cos t - a| - \sin t}{\left|\cos t - \frac{3}{4}\right|} > 0$$

для $t \in (0; \pi)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

11.4.14. (*«Ломоносов», 2022, 11.6*) При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями уравнения

$$a\operatorname{tg}^3 x + \left(2 - a - a^2\right)\operatorname{tg}^2 x + \left(a^2 - 2a - 2\right)\operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

11.5 Параметры и графики

Дополнительные задачи — в листке Параметры. Графики.

11.5.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 11.2*) Найдите все параметры b, для которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0, \\ ax + y = ab \end{cases}$$

имеет решение при любом a.

11.5.2. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.4*) Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$3\sqrt[3]{\log_x^7 2}+6\sqrt[3]{\log_x^4 2}+a^2 \leqslant a\log_x^2 2+2a\log_x 2+3a\sqrt[3]{\log_x 2}$$

не выполняется ни для одного x из интервала $(1;2)$. Укажите решения неравенства при найденных значениях параметра a.

11.5.3. (*«Шаг в будущее», 2021, 11.4*) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 7a-30\cos t+3\leqslant 0, \\ 5\sin t+a+\dfrac{1}{2}+\dfrac{|\cos t|}{2\cos t}+\dfrac{|5\cos t-4|}{5\cos t-4}=0 \end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра a.

11.5.4. (*«Шаг в будущее», 2022, 11.4*) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (ay-ax+2)\,(4y-3|x-a|-x+5a)=0, \\ \left(\log_a x^2+\log_a y^2-2\right)\log_2 a^2=8 \end{cases}$$

имеет шесть различных решений.

11.5.5. (*«Шаг в будущее», 2022, 11.4*) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \left(a|\operatorname{tg}^3 y|+a|\operatorname{ctg}^3 x|-8\right)\left(\operatorname{ctg}^6 x+\operatorname{tg}^6 y-3a^2\right)=0, \\ \sqrt{(\operatorname{ctg}^6 x)(\operatorname{tg}^6 y)}=a \end{cases}$$

имеет не более двенадцати различных решений при $x\in(0,\pi)$ и $y\in(-\pi/2,\pi/2)$.

11.5.6. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.4*) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y=|a-3|x+1|+x+3|+3|x+1|, \\ 2^{2-y}\log_{\sqrt{3}}\left((x+|a+2x|)^2-6\,(x+1+|a+2x|)+16\right)+2^{x+|a+2x|}\log_{1/3}\left(y^2+1\right)=0, \\ x+|a+2x|\leqslant 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(x;y)$, где x и y — целые числа. Укажите это решение при каждом из найденных a.

11.5.7. (*«Шаг в будущее», 2023, 11.4*) Найдите все значения параметра a, при которых равенство

$$\log_{\sqrt{a/10}}\left(\frac{a+8x-x^2}{20}\right)\geqslant 2$$

имеет хотя бы одно решение $x\geqslant 2$, и каждое такое решение является также решением уравнения

$$|a+2x-16|+|a-2x+9|=|2a-7|\,.$$

11.5.8. (*«Физтех», 2023, 11.4*) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 9\right)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

11.5.9. (*«Физтех», 2023, 11.4*) На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

11.5.10. (*«Росатом», 2018, 11.5*) При каких a система уравнений

$$\begin{cases} \left|x\cos a + y\sin a - \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right| + |y\cos a - x\sin a| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}, \\ |x - y| + |x + y| = 8 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

11.5.11. (*«Росатом», 2018, 11.5*) При каких a система

$$\begin{cases} \left(x^2 + (y-7)^2 - 9\right)\left((x-4)^2 + (y-3)^2 - 1\right) = 0, \\ ax - y - 4a - 2 = 0. \end{cases}$$

11.5.12. (*«Росатом», 2019, 11.5*) При каких a множество решений неравенства

$$x^2 + (|y| - a)^2 \leqslant a^2$$

содержит все пары чисел $(x; y)$, для которых $(x-4)^2 + (y-2)^2 \leqslant 1$?

11.5.13. (*«Росатом», 2019, 11.5*) При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 25)(4x + 3y - 25) = 0, \\ (x - 6\cos a)^2 + (y - 6\sin a)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

11.5.14. (*«Росатом», 2019, 11.5*) При каких b система уравнений

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y - a + b)^2 = 2, \\ (x - y + 3)(x - y - 1) = 0, \end{cases}$$

имеет решения при любых a?

11.5.15. (*«Росатом», 2021, 11.5*) При каких α система уравнений

$$\begin{cases} (x-4\cos\alpha)^2+(y-4\sin\alpha)^2=1, \\ (x-5\cos 2\alpha)^2+(y-5\sin 2\alpha)^2=9 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

11.5.16. (*«Физтех», 2022, 11.6*) Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

11.5.17. (*«Физтех», 2022, 11.6*) Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2} \leqslant ax+b \leqslant -\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right]$.

11.6 Параметры и симметрия

Дополнительные задачи — в листке Симметрия в задачах с параметрами.

11.6.1. (*Всесиб., 2021, 11.3*) Найти все действительные числа a, для которых существуют три различных действительных числа x, y, z таких, что

$$a = x+\frac{1}{y} = y+\frac{1}{z} = z+\frac{1}{x}.$$

11.6.2. (*ОММО, 2023.7*) Дано действительное число t, отличное от 0, 1, -1, $\frac{1}{2}$ и 2. Решите уравнение

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}.$$

Ответ может зависеть от t.

11.7 Параметры и свойства функций

Дополнительные задачи — в листке Параметры. Свойства функций.

11.7.1. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.5*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt[3]{6a\sin x+4a^2-6a}-\sqrt[3]{\cos 2x+8\sin x+9} = \cos 2x+(8-6a)\sin x-4a^2+6a+9$$

имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a.

11.7.2. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.5*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\cos 2x + 14\cos x - 14a)^7 - \left(6a\cos x - 4a^2 - 1\right)^7 = (6a - 14)\cos x + 2\sin^2 x - 4a^2 + 14a - 2$$

имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a.

11.8 Условный экстремум

Дополнительные задачи — в листке Условный экстремум.

11.8.1. (*«Росатом», 2015, 11.1*) Найти наибольшее значение выражения $x - 2y$ для $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $4x^2 + 9y^2 = 25$.

11.8.2. (*«Росатом», 2020, 11.5*) Найти наименьшее положительное значение выражения $x + y$ для всех пар чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$(\sin x + \cos y)(\cos x - siny) = 1 + \sin(x - y)\cos(x + y).$$

Глава 12

Алгоритмы, процессы, игры

12.1 Алгоритмы и операции

Дополнительные задачи — в листке Процессы и операции.

12.1.1. (*Олимпиада КФУ, 2023, 11.1*) У Маши есть копилка, куда она каждую неделю кладет купюру в 50 или 100 рублей. В конце каждых 4 недель она выбирает из копилки купюру наименьшего достоинства и дарит сестренке. Через год оказалось, что сестренке она отдала 1250 рублей. Какое минимальное количество денег могло накопиться за это время у нее самой?

12.1.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 11.1*) Петя печатает на экране компьютера пять цифр, среди которых нет нулей. Каждую секунду компьютер убирает начальную из цифр, а в конец дописывает последнюю цифру суммы четырёх оставшихся цифр. (Например, если Петя введёт 12345, то через секунду получит 23454, потом 34546 и так далее. Но он может ввести и не 12345, а какие-то другие пять цифр.) В какой-то момент Петя останавливает процесс. Какова минимально возможная сумма пяти цифр, которые могут оказаться в этот момент на экране?

12.1.3. (*«Шаг в будущее», 2019, 11.1*) Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет — номер 1, красный — 5, оранжевый — 13, желтый — 19, зеленый — 23, голубой — 53, синий — 55, фиолетовый — 83, черный — 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n \leqslant 17$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $3n - 2$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n \geqslant 18$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129 - 2n|$. Изначально пиксель имел красный цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель?

12.1.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 11.2*) Ниже нарисован магический квадрат, в котором некоторые числа отсутствуют.

20		
	17	
16		

Восстановите данный магический квадрат.

(В магическом квадрате суммы чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях, равны.)

12.1.5. (*«Курчатов», 2023, 11.2*) На прямой выбрано несколько отрезков так, что все их концы различны. Докажите, что на этой прямой можно отметить несколько точек так, чтобы на каждом отрезке было отмечено нечётное количество отмеченных точек.

12.1.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 11.3*) На доске написаны все натуральные числа от 1 до 100. Можно любую пару чисел x, y заменять на $xy-29x-29y+870$. Какое число останется после 99 таких операций?

12.1.7. (*Олимпиада КФУ, 2021, 11.3*) Натуральное число n назовём *удачным*, если его можно единственным образом разбить в сумму 10 различных натуральных чисел (порядок слагаемых не важен). Найдите все удачные числа.

12.1.8. (*ОММО, 2021.3*) В хирургическом отделении 4 операционных: I, II, III и IV. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной I, через некоторое время — в операционной II, ещё через некоторое время — в III, а потом и в IV.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 2 часа 32 минуты. За 30 минут до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 52 минуты, а ещё за 10 минут до этого — 30 минут. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

12.1.9. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 11.3*) Встретились N детей. Некоторые из них подарили некоторым другим подарок (один другому не мог подарить больше одного подарка). Получилось, что все получили поровну подарков, хотя дарили все разное количество (в том числе, возможно, кто-то ничего не дарил). При каких $N > 1$ это возможно?

12.1.10. (*«Росатом», 2020, 11.3*) Поверхность коробки размером $3 \times 4 \times 5$ разбита на 94 квадрата размером 1×1. В квадратах, принадлежащих одной грани, написаны одинаковые натуральные числа. На параллельной ей грани коробки эти числа повторяются (на каждой паре параллельных граней числа, вообще говоря, разные). Муравей Гоша совершает путешествия по поверхности коробки, соблюдая следующие правила:

1) маршрут начинается в центре любого из указанных квадратов, заканчивается в нем же и представляет собой замкнутую ломаную, лежащую в плоскости, перпендикулярной одному из ребер коробки;

2) Гоша никогда не меняет направление движения по маршруту;

3) сумма чисел по всем квадратам, встречающимся на пути Гоши, не зависит от маршрута и равна 2880.

Какие числа написаны на гранях коробки?

12.1.11. (*«Курчатов», 2020, 11.3*) На доске написаны числа 2, 3, 5, …, 2003, 2011, 2017, т.е. все простые числа, не превосходящие 2020. За одну операцию можно заменить два числа a, b на максимальное простое число, не превосходящее $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. После нескольких операций на доске осталось одно число. Какое максимальное значение оно может принимать?

12.1.12. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 11.4*) Каждая из двух сестёр загадала натуральное число от 1 до 1000. Папа по очереди задаёт сёстрам (то одной, то другой) вопросы, на которые можно ответить «да» или «нет». Он хочет, задав не более чем по 6 вопросов каждой из сестёр, выяснить, верно ли, что загаданные числа различаются более чем на 500. При этом ни одна из девочек не знает, что загадала другая, поэтому каждую сестру можно спрашивать только о её числе. Придумайте, как папе добиться цели.

12.1.13. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 11.4*) Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат $n \times n$ клеток, где n — чётное число. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:

- нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
- нельзя проводить две диагонали с общим концом.

Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машином рисунке?

12.1.14. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.5*) В городе работают три банка. Известно, что вклад, размещенный в одном из них (неизвестно в каком), через год удвоится, в другом (тоже неизвестно, в каком) — утроится, а один из банков (неизвестно, какой из трех) разорится, и вкладчик потеряет свои деньги. У Ивана Ивановича есть 600000 рублей. Он хочет рискнуть и разместить свои деньги в банках на год. Как ему разложить деньги по банкам, чтобы при самом плохом ходе событий получить максимально возможный доход (некоторую сумму он может оставить и дома)? Какую сумму в этом случае он получит на руки через год?

12.1.15. (*«Надежда энергетики», 2020, 11.5*) Юный хакер желает изменить оценки в электронном журнале. Но при изменении одних оценок изменяются и другие, а именно:

а) если он увеличивает на 2 количество пятерок, то при этом количество двоек уменьшается на 1;

б) если он увеличивает на 1 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 2;

в) если он уменьшает на 2 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 1;

г) если он уменьшает на 1 количество пятерок, то количество двоек уменьшается на 2.

Может ли он, совершая такие операции, превратить свои 3 пятерки и 30 двоек в 30 пятерок и 3 двойки?

12.1.16. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 11.5*) а) Докажите, что первые 11 натуральных чисел 1, 2, …, 11 нельзя переставить так, чтобы соседние числа отличались либо на 3, либо на 5.

б) Можно ли сделать это для чисел 1, 2, …, 12?

12.1.17. (*Всесиб., 2020, 11.5*) За одну *операцию* к любой из нескольких лежащих на столе кучек камней можно прибавлять столько же, сколько в ней уже содержится, из любой другой. Доказать, что любая начальная раскладка N камней по кучкам может быть собрана в одной куче в результате некоторого количества операций тогда и только тогда, когда N является степенью двойки.

12.1.18. (*«Курчатов», 2021, 11.5*) Есть колода из 1024 карточек, на каждой из которых написан набор различных цифр от 0 до 9, причём все наборы различны (в частности, есть и пустая карточка). Назовём набор карточек *полным*, если на них каждая цифра от 0 до 9 встречается ровно по разу.

Найдите все натуральные k, для которых существует набор из k карточек со следующим условием: среди них нельзя выбрать полный набор, но при добавлении любой карточки из колоды это условие нарушается.

12.1.19. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 11.6*) На столе лежат 28 конфет. Петя считает некоторые из них вкусными. Вася за один ход может указать любой набор конфет и спросить Петю, сколько из них вкусных. Как Васе гарантированно найти все вкусные конфеты... (а) за 21 ход; (б) за 20 ходов?

12.1.20. (*«Высшая проба», 2023, 11.5*) Дана клетчатая доска 100×100. Каждая клетка доски покрашена в один из двух цветов: белый или чёрный. Назовём раскраску доски **уравновешенной**, если в каждой строке и в каждом столбце 50 белых и 50 чёрных клеток. За одну операцию разрешается выбрать две строки и два столбца так, чтобы из 4 клеток на их пересечении две были чёрными, а две — белыми, и перекрасить каждую из этих 4 клеток в противоположный цвет. Докажите, что из любой уравновешенной раскраски можно получить любую другую уравновешенную раскраску с помощью указанных операций.

12.1.21. (*«Ломоносов», 2023, 11.7*) На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

1. при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;

2. при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 5 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

12.1.22. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 11.8*) В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный;

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* $\to$ *ФФ*, *АФ* $\to$ *ЛЛ*, *ФЛ* $\to$ *АА*, *ЛЛ* $\to$ *АФ*, *ФФ* $\to$ *ЛА* или *АА* $\to$ *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ* — это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?

12.1.23. (*Всеросс., 2022, МЭ, 11.8*) В каждой клетке полоски $1 \times N$ стоит либо плюс, либо минус. Ваня умеет совершать следующую операцию: выбрать любые три клетки (не обязательно последовательные), одна из которых находится ровно посередине между двумя другими клетками, и поменять три знака в этих клетках на противоположные. Число N назовём *позитивным*, если из расстановки из N минусов Ваня такими операциями может получить расстановку из N плюсов.

Рассмотрим числа 3, 4, 5, …, 1400. Сколько среди них позитивных?

12.1.24. (*Открытая олимпиада, 2018, 11.8*) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 200-значное число

$$12341234\ldots1234.$$

С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

12.2 Таблицы

Дополнительные задачи — в листке Числовые таблицы.

12.2.1. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.3*) Карта города разделена вертикальными и горизонтальными прямыми на n^2 областей, условно называемых «квадратами» и расположенных в n горизонтальных рядов и n колонок. В каждом «квадрате» располагают или не располагают одну трансформаторную подстанцию. Во всех рядах число подстанций различно. Может ли при этом число подстанций в каждой колонке не совпадать ни с одним числом подстанций в ряду? Если это возможно не всегда, то при каких условиях?

12.2.2. (*Открытая олимпиада, 2017, 11.3*) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ — натуральные числа, большие 1 (не обязательно различные). В таблице 100×100 расставлены числа следующим образом: на пересечении i-ой строки и k-го столбца записано число $\log_{x_k} \frac{x_k}{4}$. Найдите наименьшее возможное значение суммы всех чисел в таблице.

12.2.3. (*«Бельчонок», 2021, 11.5*) Дана квадратная таблица $n \times n$, где $n \geqslant 2$. В каждую из некоторых k клеток таблицы ставится по одной фишке так, чтобы в любом квадрате 2×2 было ровно 2 фишки. Найдите все значения k, при которых это можно сделать.

12.2.4. (*«Бельчонок», 2021, 11.5*) Найдите все возможные размеры таблицы $n \times m$ ($m \geqslant n \geqslant 3$), в клетки которой можно вписать какие-то числа (в каждую клетку по одному числу) так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма чисел в каждом квадрате 3×3 была положительной.

12.2.5. (*«Курчатов», 2023, 11.6*) Таблица 101×101 покрашена в несколько цветов (каждая клетка — ровно в один цвет) так, что в любом квадрате 2×2 присутствуют клетки не более чем трёх различных цветов. Какое наибольшее количество цветов могло быть использовано?

12.2.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 11.6*) Клетки кубической таблицы $7 \times 7 \times 7$ (то есть маленькие кубики) пронумеровали по порядку числами от 1 до 343. (Сначала нумеруются клетки верхнего слоя: в первой строке слева направо от 1 до 7, в следующей от 8 до 14, и так далее до 49. Далее в таком же порядке нумеруются клетки второго слоя и т. д.) После этого из таблицы удалили несколько непересекающихся кубов $2 \times 2 \times 2$, а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 8?

12.2.7. (*Открытая олимпиада, 2020, 11.7*) Куб $8 \times 8 \times 8$ состоит из 512 маленьких кубиков $1 \times 1 \times 1$ (назовём их ячейки). Ячейки называются соседними, если имеют общую грань — таким образом, у каждой ячейки не более 6 соседних.

В каждой ячейке записано неотрицательное число. Сумма чисел в ячейке и во всех соседних не менее 35. Докажите, что сумма чисел во всех ячейках куба строго больше 2560.

12.2.8. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 11.8*) В таблице 28×35 некоторые k клеток покрашены в красный цвет, ещё r — в розовый, а оставшиеся s — в синий. Известно, что

- $k \geqslant r \geqslant s$;
- у каждой граничной клетки есть хотя бы 2 соседа такого же цвета;
- у каждой неграничной клетки есть хотя бы 3 соседа такого же цвета.

Какое наименьшее значение может принимать величина $k - s$?

(Клетка называется граничной, если она примыкает к границе таблицы. Соседями называются клетки, имеющие общую сторону.)

12.2.9. (*Открытая олимпиада, 2015, 11.8*) В клетках таблицы $(2k+1) \times (2n+1)$, где $k \leqslant n$, расставлены числа 1, 2 и 3 так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

12.2.10. (*Открытая олимпиада, 2022, 11.8*) В таблице 8×8 какие-то 23 клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали и находящихся с ней на одной вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

12.3 Взвешивания

Дополнительные задачи — в листке Взвешивания.

12.3.1. (*САММАТ, 2021, 11.8*) Имеются чашечные весы и гирька массой 1 грамм. За какое минимальное количество взвешиваний можно на этих весах взвесить 2021 грамм сахара-песка? После каждого взвешивания новая порция сахара отсыпается в отдельную емкость. Приведите последовательность взвешиваний.

12.4 Игры и стратегии

Дополнительные задачи — в листке Игры и стратегии.

12.4.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 11.1*) Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 3231 — 1539 — 9756 — 6561... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

12.4.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 11.2*) Есть 8 белых кубиков одинакового размера. Марине нужно покрасить 24 грани кубиков в синий цвет, а остальные 24 грани — в красный. После этого Катя склеивает из них куб $2\times2\times2$. Если на поверхности куба столько же синих квадратов, сколько и красных, то Катя побеждает. Если нет, то побеждает Марина. Сможет ли Марина покрасить кубики так, чтобы Катя не смогла достичь цели?

12.4.3. (*Всесиб., 2019, 11.3*) Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета клетки доски размера 10 на 10 клеток. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода клетку, у которой ни одна из соседних по стороне клеток уже не окрашена в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода клетку. Вася ходит первым. Какое максимальное количество клеток он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?

12.4.4. (*Всеросс., 2023, МЭ, 11.5*) Юра и Яша играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Юра.

Изначально на доске написано число n. Игрок в свой ход может прибавить к числу на доске любой его натуральный делитель, стереть старое число и записать новое. (Например, если на доске написано число 12, то можно его стереть и написать одно из чисел 13, 14, 15, 16, 18, 24.)

Рассмотрим все возможные натуральные значения n от 2 до 59 включительно.

1. Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **проигрывает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 60?

2. Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **побеждает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 60?

12.4.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 11.5*) Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.

Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право взять любую колоду из 30 карт. Может ли он подобрать колоду так, чтобы вероятность его выигрыша была больше $1/2$?

12.4.6. (*Всеросс., 2023, ЗЭ, 11.5*) Изначально на доске написано 10 единиц. Гриша и Глеб играют в игру, делая ходы по очереди. Своим ходом Гриша возводит некоторые 5 чисел на доске в квадрат. Глеб своим ходом выбирает несколько (возможно, ни одного) чисел на доске и увеличивает каждое из них на 1. Если в течение 10 000 ходов на доске появится число, делящееся на 2023, то побеждает Глеб, иначе побеждает Гриша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым ходит Гриша?

12.4.7. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.7*) На столе лежат 2021 красных и 2022 зелёных камня. Аня и Петя делают ходы по очереди. Аня ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

12.4.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 11.8*) Два игрока по очереди выкладывают монеты в ряд. За один ход можно положить две или три монеты. Выигрывает тот, кто выложит 16 монету. Определите, какой игрок (первый или второй) обладает стратегией, которая позволит ему выиграть вне зависимости от ходов другого игрока. Опишите эту стратегию.

12.4.9. (*Открытая олимпиада, 2021, 11.8*) Гензель и Гретель играют в игру, Гензель ходит первым. Они по очереди ставят фишки на клетчатую доску 7×8 (7 строк и 8 столбцов). Каждый раз, когда Гретель ставит фишку, она получает 4 очка за каждую фишку, уже стоящую в той же строке и 3 очка за каждую фишку, уже стоящую в том же столбце.

На одной клетке может стоять только одна фишка. Игра заканчивается, когда все клетки доски заполнены.

Какое наибольшее количество очков может заработать Гретель вне зависимости от действий Гензеля?

12.5 Турниры

Дополнительные задачи — в листке Турниры.

12.5.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 11.3*) В турнире по футболу участвовало 15 команд, каждая сыграла с каждой ровно один раз. За победу давалось 3 очка, за ничью — 1 очко, а за поражение — 0 очков.

После завершения турнира оказалось, что некоторые 6 команд набрали хотя бы N очков каждая. Какое наибольшее целое значение может принимать N?

12.5.2. (*«Курчатов», 2022, 11.2*) В школьном турнире по крестикам-ноликам участвовали 16 учеников, каждый сыграл с каждым ровно одну игру. За победу давалось 5 очков, за ничью — 2 очка, за поражение — 0 очков. После завершения турнира выяснилось, что суммарно все участники набрали 550 очков. Какое наибольшее количество участников могло ни разу не сыграть вничью в этом турнире?

12.5.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 11.3*) 14 теннисистов сыграли в однокруговом турнире (каждый игрок сыграл с каждым одну партию). Докажите, что найдутся такие три игрока, что каждый из остальных 11 игроков проиграл хотя бы одному из этой тройки. (Ничьих в теннисе не бывает.)

12.5.4. (*«Бельчонок», 2023, 11.4*) 20 команд провели турнир по хоккею, каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш очков не давалось. При этом каждые три команды в играх между собой набрали разное количество очков. Какое наибольшее число ничьих могло быть в этом турнире?

12.5.5. (*«Бельчонок», 2023, 11.4*) Несколько команд провели турнир по футболу — каждая команда сыграла с каждой по разу. За победу начислялось 3 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш очков не давалось. Команда «Бельчата» заняла первое место, набрав больше всего очков, а команда «Метеор» — последнее место, набрав меньше всех очков. Если бы за победу давали не 3 очка, а 2, то наоборот, команда «Метеор» стала бы первой, а команда «Бельчата» — последней. Найдите наименьшее количество команд, которое могло участвовать в таком турнире.

12.5.6. (*Всеросс., 2021, МЭ, 11.5*) В шахматном турнире соревнуются друг с другом команда школьников и команда студентов, в каждой из которых по 15 человек. В течение турнира каждый школьник должен сыграть с каждым студентом ровно один раз, причём каждый день каждый человек должен играть не более одного раза. В разные дни могло проводиться разное количество игр.

В некоторый момент турнира организатор заметил, что может составить расписание на следующий день из 15 игр ровно 1 способом, а из 1 игры — N способами (порядок игр в расписании не важен, важно лишь кто с кем играет). Найдите наибольшее возможное значение N.

Глава 13

Рассуждения и методы

13.1 Примеры и конструкции

Дополнительные задачи — в листке Примеры и конструкции.

13.1.1. (*«Росатом», 2021, 11.3*) Представить число 2021 в виде суммы трех взаимно простых чисел.

13.1.2. (*Олимпиада КФУ, 2019, 11.3*) Функция $f(x)$ задана на всей числовой оси, причём для всех x выполняются неравенства: $f(x+2018) \leqslant f(x) \leqslant f(x+2019)$.

а) Придумайте хотя бы одну функцию $f(x)$, удовлетворяющую этим условиям.

б) Докажите, что функция $f(x)$ — периодическая.

13.1.3. (*Всеросс., 2020, РЭ, 11.6*) На доске написаны функции: $x+1$, x^2+1, x^3+1, x^4+1. Разрешается дописывать на доску новые функции, получаемые из написанных на доске с помощью операций вычитания и умножения. Покажите, как получить ненулевую функцию, которая при положительных значениях аргумента принимает неотрицательные значения, а при отрицательных значениях аргумента — неположительные значения.

13.2 Да или нет?

Дополнительные задачи — в листке Да или нет?.

13.2.1. (*Всеросс., 2020, МЭ, 11.1*) Можно ли из всех прямоугольников размерами 1×1, 1×3, 1×5, …, 1×2019, взятых по одному разу, сложить прямоугольник, каждая сторона которого больше 1?

13.2.2. (*Всеросс., 2022, РЭ, 11.1*) Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

13.2.3. (*«Высшая проба», 2023, 11.1*) Каждое натуральное число покрасили в один из трёх цветов: красный, синий или зелёный, причём все 3 цвета встречаются. Может ли оказаться так, что сумма любых двух чисел разных цветов является числом оставшегося цвета?

13.2.4. (*«Надежда энергетики», 2015, 11.1*) Станция связана линиями с несколькими предприятиями, при этом

1. среди любых 3 линий есть ведущая на предприятие города М;

2. среди любых 4 линий есть ведущая на предприятие поселка П.

Может ли число линий быть меньше 5? Если оно не меньше 5, то найдутся ли среди любых 5 линии, не ведущие ни в М, ни в П?

13.2.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 11.1*) Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

13.2.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 11.1*) Каждая клетка доски 1000×1000 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Можно ли раскрасить доску так, чтобы на ней было более 600000 синих равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

13.2.7. (*«Курчатов», 2023, 11.1*) На доске написаны 100 различных натуральных чисел. Петя записал в тетрадку красным цветом все их попарные суммы, а синим цветом — все их попарные произведения. Может ли оказаться так, что для каждого красного числа найдётся делящееся на него синее? (Допускается, что одно и то же синее число может делиться на разные красные числа.)

13.2.8. (*Олимпиада КФУ, 2020, 11.1*) Провод длиной d метров разрезали на два куска. Можно ли из образовавшихся двух частей провода вырезать куски длиной 1, 2, 3, 6 и 12 метров, если

а) $d = 25$;

б) $d = 24{,}99$?

13.2.9. (*Олимпиада КФУ, 2021, 11.1*) Даны три целых числа. Из первого числа вычли сумму цифр второго числа, из второго вычли сумму цифр третьего, а из третьего вычли сумму цифр первого числа. Могут ли эти разности равняться соответственно

а) 2, 3, 4?

б) 3, 4, 5?

13.2.10. (*Олимпиада КФУ, 2021, 11.2*) Существует ли такая непостоянная функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, что при всех действительных x выполняется равенство

а) $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$?

б) $f(\sin x) - f(\cos x) = 1$?

13.2.11. (*Олимпиада КФУ, 2023, 11.2*)

а) Может ли для некоторых a, b оказаться, что $\log_2 a \cdot \log_2 b = \log_2 ab$?

б) Может ли для некоторых a, b оказаться, что $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(a+b)$?

в) Могут ли при каких-то a, b выполняться оба равенства?

13.2.12. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 11.2*) Имеется n гирек весом 1, 2, …, n (гр) и двухчашечные весы. Можно ли все гирьки разложить на весах так, чтобы на одной чаше было вдвое больше гирек, чем на другой, и весы уравновесились:

а) при $n = 90$;

б) при $n = 99$?

13.2.13. (*Всесиб., 2016, 11.2*) По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один см направлен вдоль оси OX, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после сотого прыжка оказаться в начале координат?

13.2.14. (*Всесиб., 2018, 11.3*) Может ли сумма объёма, длин всех рёбер и площадей всех граней некоторого прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого являются целыми числами, равняться 866?

13.2.15. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 11.4*) Дано несколько прямоугольных параллелепипедов в пространстве. Известно, что у каждой пары параллелепипедов есть хотя бы одна общая точка, а их рёбра соответственно параллельны. Обязательно ли все параллелепипеды имеют общую точку?

13.2.16. (*САММАТ, 2023, 11.8*) Вершины правильного 11-угольника раскрашены в 2 цвета: красный и синий. Может ли оказаться так, что для каждой вершины A этого 11-угольника найдутся такие красные вершины B и C, а также синие вершины D и E, что выполняются равенства $AB = AC$ и $AD = AE$?

13.2.17. (*Всеросс., 2022, ЗЭ, 11.6*) На доске написаны 11 целых чисел (не обязательно различных). Может ли оказаться, что произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести?

13.2.18. (*ОММО, 2021.9*) Функция g определена на целых числах и принимает целые значения, причём $g(x) \neq x$ для каждого целого x. Назовём число a *красивым*, если для любого целого числа x выполнено $g(x) = g(a - x)$. Может ли каждое из чисел 739 и 741 быть красивым?

13.2.19. (*ОММО, 2022.10*) Пусть B — множество действительных чисел, не содержащее 0 и 1. Известно, что если $b \in B$, то $\frac{1}{b} \in B$ и $1 - \frac{1}{b} \in B$. Может ли в B быть ровно 1000 элементов?

13.3 Логические задачи

Дополнительные задачи — в листке Логические задачи.

13.3.1. (*Всеросс., 2021, МЭ, 11.1*) Учитель написал на доске двузначное число. Каждый из троих ребят сказал по два утверждения.

- Андрей: «это число заканчивается на цифру 6» и «это число делится на 7».
- Боря: «это число больше 26» и «это число заканчивается на цифру 8».
- Саша: «это число делится на 13» и «это число меньше 27».

Известно, что каждый из мальчиков один раз сказал правду и один раз ошибся. Какое число могло быть написано на доске? Укажите все возможные варианты.

13.3.2. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 11.5*) По зову воеводы пришли 55 солдат: лучники и мечники. Все они были одеты либо в золотые, либо в чёрные доспехи. Известно, что мечники говорят правду, когда носят чёрные доспехи и обманывают, когда носят золотые доспехи, а лучники — наоборот.

- На вопрос «На тебе золотые доспехи?» утвердительно ответили 44 человека.
- На вопрос «Ты лучник?» утвердительно ответили 33 человека.
- На вопрос «Сегодня понедельник?» утвердительно ответили 22 человека.

Сколько пришло лучников в золотых доспехах на зов воеводы?

13.3.3. (*«Надежда энергетики», 2022, 11.5*) Охотник Пулька для своей собаки Бульки заказал на АлиЭкспресс три куля собачьего корма. Наутро после доставки один куль оказался съеден. Под подозрение попали четверо, и Незнайке удалось установить следующее.

1. Если алиби Пончика истинно, то Сиропчик также имеет алиби.
2. Если Пончик ел корм, то либо Сиропчик, либо Авоська тоже ел корм (либо оба вместе).
3. Из двух показаний: «Авоська ел корм», «Пончик не ел, но при этом ел Небоська» — хотя бы одно истинное.
4. Если Небоська ел корм, то также ел либо Авоська, либо Сиропчик (либо оба вместе).

Кого из подозреваемых Незнайка может гарантированно обвинить в поедании за ночь целого куля собачьего корма?

13.4 Рыцари и лжецы

Дополнительные задачи — в листках

- Рыцари и лжецы. Рассуждения
- Рыцари и лжецы. Уравнения

13.4.1. (*«Бельчонок», 2018, 11.1*) На поляне в лесу собралось 25 бельчат. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо хитрец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, хитрецы говорят правду, если предыдущий бельчонок лгал, и лгут, если предыдущий бельчонок говорил правду (хитрец никогда не говорит первым). Каждый бельчонок заявил другим бельчатам: «Среди вас есть хотя бы по одному рыцарю, лжецу и хитрецу». Сколько рыцарей могло быть на поляне?

13.4.2. (*«Бельчонок», 2018, 11.1*) На поляне в лесу собралось 25 бельчат. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Один из бельчат сказал: «Среди всех бельчат на поляне, кроме меня, нечётное число лжецов». После чего убежал в лес, и бельчат на поляне осталось 24. Еще один из бельчат сказал ту же самую фразу, после чего тоже убежал в лес, и их осталось 23. И так далее, они по одному говорили эту фразу и убегали в лес. Сейчас на поляне осталось 10 бельчат. Сколько лжецов могло быть среди бельчат на поляне изначально?

13.4.3. (*«Бельчонок», 2021, 11.1*) В лесу живут бельчата-рыцари и бельчата-лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды несколько бельчат, среди которых был, по крайней мере, один рыцарь, собрались на поляне и сказали по фразе:

1-й бельчонок: «Среди нас ровно один рыцарь».
2-й бельчонок: «Среди нас ровно два лжеца».
3-й бельчонок: «Среди нас ровно три рыцаря».
...
$2k$-й бельчонок: «Среди нас ровно $2k$ лжецов».
$(2k+1)$-й бельчонок: «Среди нас ровно $2k+1$ рыцарей».

Определите количество собравшихся на поляне бельчат.

13.4.4. (*«Курчатов», 2021, 11.1*) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Некоторые жители острова дружат друг с другом (дружба взаимна).

Утром каждый житель острова заявил, что дружит с нечётным числом рыцарей. Вечером каждый житель острова заявил, что дружит с чётным числом лжецов. Может ли количество жителей этого острова быть равно 2021?

13.4.5. (*Открытая олимпиада, 2020, 11.5*) На собрании присутствовали рыцари, всегда говорящие правду и лжецы, которые всегда лгут (точно есть и те и другие). Каждый сказал: «Я знаком хотя бы с 15 рыцарями на этом собрании» и «Я знаком хотя бы с 11 лжецами на этом собрании». Какое наименьшее количество человек могло собраться?

13.5 Оценка плюс пример

Дополнительные задачи — в листке Оценка плюс пример.

13.5.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 11.1*) Произведение девяти последовательных натуральных чисел делится на 1111. Какое наименьшее возможное значение может принимать среднее арифметическое этих девяти чисел?

13.5.2. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 11.2*) Вдоль дороги в один ряд стоят 25 столбов. Иногда на один из столбов садится чиж, и сразу же с одного из соседних столбов взлетает чиж (если на соседних столбах в этот момент хоть кто-нибудь сидел). Также на каждом столбе не может сидеть более одного чижа.

Первоначально на столбах нет птиц. Какое наибольшее количество чижей могут одновременно находиться на столбах?

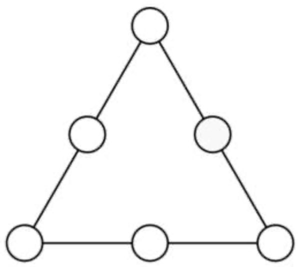
13.5.3. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 11.5*) При каком наименьшем натуральном n можно расставить числа от 1 до n по кругу так, чтобы каждое число было либо больше всех 40 следующих за ним по часовой стрелке, либо меньше всех 30 следующих за ним по часовой стрелке?

13.5.4. (*Всеросс., 2022, МЭ, 11.1*) По кругу выписаны 12 *различных* натуральных чисел, одно из которых равно 1. Любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо на 7. Какое наибольшее значение может принимать наибольшее выписанное число?

13.5.5. (*Всеросс., 2023, МЭ, 11.1*) В корзине лежит 41 яблоко: 10 зелёных, 13 жёлтых и 18 красных. Алёна последовательно достаёт из корзины по одному яблоку. Если в какой-то момент она суммарно вытащит зелёных яблок меньше, чем жёлтых, а жёлтых — меньше, чем красных, то больше яблок из корзины она доставать не будет.

1. Какое наибольшее количество жёлтых яблок сможет достать Алёна из корзины?
2. Какое наибольшее количество яблок сможет достать Алёна из корзины?

13.5.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 11.1*) Шесть последовательных натуральных чисел от 10 до 15 вписаны в круги на сторонах треугольника таким образом, что суммы трех чисел на каждой из сторон равны. Какое максимальное значение может принимать эта сумма?



13.5.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 11.1*) Прямоугольник 11×12 разрезан на несколько полосок $1{\times}6$ и $1{\times}7$. Каково минимальное суммарное количество полосок?

13.5.8. (*Всеросс., 2020, РЭ, 11.1*) На доске написано n различных целых чисел. Произведение двух наибольших равно 77. Произведение двух наименьших тоже равно 77. При каком наибольшем n это возможно?

13.5.9. (*Всеросс., 2021, ЗЭ, 11.1*) При некоторых натуральных $n > m$ число n оказалось представимо в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа m, а также в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа $m + 1$. При каком наибольшем m это могло произойти (хоть при каком-то $n > m$)?

13.5.10. (*Всеросс., 2021, МЭ, 11.2*) У Веры есть набор различных по массе гирь, каждая из которых весит целое число грамм. Известно, что самая лёгкая гиря набора весит в 71 раз меньше, чем все остальные гири вместе взятые. Также известно, что две самые лёгкие гири набора вместе весят в 34 раза меньше, чем все остальные гири вместе взятые. Какое наименьшее число грамм может весить самая лёгкая гиря?

13.5.11. (*Олимпиада КФУ, 2019, 11.2*) Будем говорить, что число *полупростое*, если оно является произведением двух простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных чисел могут быть полупростыми?

13.5.12. (*ОММО, 2023.2*) При каком наименьшем n можно покрасить каждое натуральное число в один из n цветов так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 5, на 8, на 10, на 13 и на 18, были покрашены в разные цвета?

13.5.13. (*ОММО, 2022.2*) Группа авантюристов показывает свою добычу. Известно, что ровно у 13 авантюристов есть рубины; ровно у 9 — изумруды; ровно у 15 — сапфиры; ровно у 6 — бриллианты. Кроме того, известно, что

- если у авантюриста есть сапфиры, то у него есть или изумруды, или бриллианты (но не то и другое одновременно);
- если у авантюриста есть изумруды, то у него есть или рубины, или сапфиры (но не то и другое одновременно).

Какое наименьшее количество авантюристов может быть в такой группе?

13.5.14. (*ОММО, 2021.2*) Даша написала на доске числа 9, 10, 11, ..., 22, а потом стёрла одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

13.5.15. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 11.3*) Паша и Игорь подбрасывают монетку. Если выпадает орёл, выигрывает Паша, если решка — Игорь. В первый раз проигравший заплатил победителю 1 рубль, во второй — 2 рубля, потом — 4, и так далее (каждый раз проигравший платит в 2 раза больше, чем на прошлом шаге). В начале игры у Паши была однозначная сумма денег, а у Игоря — четырёхзначная, а в конце у Игоря стала двузначная, а у Паши — трёхзначная. Какое минимальное количество игр мог выиграть Паша? Игроки не могут уходить в минус.

13.5.16. (*Всеросс., 2021, ЗЭ, 11.3*) В языке три буквы — Ш, У и Я. *Словом* называется последовательность из 100 букв, ровно 40 из которых — гласные (то есть У или Я), а остальные 60 — буква Ш. Какое наибольшее количество слов можно выбрать так, чтобы у любых двух выбранных слов хотя бы в одной из ста позиций одновременно стояли гласные, причём различные?

13.5.17. (*Всеросс., 2020, МЭ, 11.4*) Какое наименьшее количество клеток нужно отметить на доске размером 8×9 так, чтобы среди любых пяти подряд идущих клеток по горизонтали, вертикали или диагонали была отмеченная клетка?

13.5.18. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 11.4*) Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через p обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать p?

13.5.19. (*Всесиб., 2018, 11.4*) В множестве X из 17 элементов выделено семейство из N различных непустых подмножеств таких, что каждый элемент множества X содержится ровно в двух подмножествах из этого семейства. Каково максимальное значение N? Найдите число всех возможных различных типов таких семейств для максимального N. Два семейства подмножеств имеют различные типы, если не получаются друг из друга перестановкой элементов X.

13.5.20. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 11.5*) При каком наибольшем n множество $\{3, 4, 5, \ldots, n\}$ можно так покрасить в синий и красный цвета, чтобы произведение двух любых (в том числе одинаковых) чисел одного цвета имело другой цвет?

13.5.21. (*Всесиб., 2021, 11.5*) В некоторых клетках прямоугольной доски размера 101 на 99 сидят по одной черепашке. Каждую минуту каждая из них одновременно переползает в одну из клеток доски, соседнюю с той, в которой они находятся, по стороне. При этом, каждый следующий ход делается ими в направлении, перпендикулярном предыдущему: если предыдущий ход был горизонтальным — налево или направо, то следующий будет вертикальным — вверх или вниз, и наоборот. Какое максимальное количество черепашек может перемещаться по доске неограниченное время так, что в каждый момент в каждой клетке будет находиться не более одной черепашки?

13.5.22. (*Всесиб., 2023, 11.5*) На одной стороне каждой из 100 карточек написали одно из натуральных чисел от 1 до 100 включительно (каждое число записано ровно на одной карточке), после чего перевернули их обратными сторонами вверх и разложили в произвольном порядке на столе. За один вопрос Вася может указать на две любые карточки, после чего получает от ведущего ответ, являются ли записанные на них числа соседними (отличающимися на 1). За какое минимальное число вопросов Вася может гарантированно назвать хотя бы одну пару карточек, на которых написаны соседние числа?

13.5.23. (*«Курчатов», 2023, 11.5*) У Пети есть n карточек с n последовательными натуральными числами (на каждой карточке написано ровно одно число). Он выложил эти карточки в ряд в некотором порядке.

У каждых двух чисел на соседних карточках Петя нашёл наибольший общий делитель. При каком наибольшем n все эти наибольшие общие делители могут оказаться различными числами?

13.5.24. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 11.8*) Пекарня планирует перейти на округление чеков в меньшую сторону (покупатель будет платить p рублей за товар ценой в p рублей с копейками). В связи с этим коммерческий директор выбрал 100 чеков и подсчитал, что выручка при таком округлении снизилась бы на 1%. Известно, что чеков на сумму менее 10 рублей не было, и что все цены в пекарне кратны 10 копейкам. Каким наибольшим (среди этих чеков) могло быть количество чеков на сумму более 100 рублей каждый?

13.5.25. (*Открытая олимпиада, 2023, 11.8*) На бесконечной клетчатой плоскости некоторые клетки покрашены в красный цвет, некоторые — в синий, а некоторые остались непокрашенными. Известно, что в каждой строчке, где есть хотя бы одна синяя клетка, есть также хотя бы 5 красных, а в каждом столбце, где есть хотя бы одна красная клетка, есть хотя бы 6 синих. Какое наименьшее положительное число покрашенных клеток может быть на плоскости?

В этой задаче правильный ответ с примером оценивается в 1 балл, большая часть баллов ставится за доказательство того, что меньше закрашенных клеток быть не может.

13.6 От противного

Дополнительные задачи — в листке Доказательство от противного.

13.6.1. (*Всеросс., 2020, РЭ, 11.2*) Множество A состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Множество B также состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B.

13.7 Разбиения на пары и группы

Дополнительные задачи — в листке Разбиения на пары и группы.

13.7.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 11.4*) Территория Тридесятого царства состоит из всех целых чисел. Княжеством будем называть множество вида

$$\{ak + b \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

где $a \neq 0$ и b — некие целые числа (то есть бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию). Царь хочет разделить всю территорию царства, кроме чисел 3 и 10, на бесконечное количество непересекающихся княжеств. Возможно ли это?

13.7.2. (*«Росатом», 2022, 11.5*) Можно ли множество из 2017 чисел

$$\{\log_2 5, \log_2 6, \log_2 7, \ldots, \log_2 2021\}$$

разбить на две части так, чтобы сумма чисел, попавших в одну из этих частей, отличалась от суммы чисел в другой не более, чем на 1 (по абсолютному значению)?

13.7.3. (*«Курчатов», 2020, 11.5*) Докажите, что при натуральном $n > 2$ числа от 1 до n можно разбить на два множества так, чтобы произведения чисел в множествах отличались не более чем в $\frac{n-1}{n-2}$ раз.