Олимпиадная математика. 10 класс

Задачник 10.2023

Данное пособие содержит задачи для десятиклассников, которые предлагались в последние годы на следующих олимпиадах:

1. Физтех (2021–2023)
2. Ломоносов (2020–2023)
3. Покори Воробьёвы горы! (2020–2023)
4. Объединённая межвузовская математическая олимпиада (2021–2023)
5. Курчатов (2020–2023)
6. Всероссийская олимпиада школьников, школьный этап в Москве (2021–2023)
7. Всероссийская олимпиада школьников, муниципальный этап в Москве (2020–2023)
8. Всероссийская олимпиада школьников, региональный и заключительный этапы (отдельные задачи, 2020–2023)
9. Росатом (2015–2023)
10. Шаг в будущее (2016–2023)
11. Всесибирская олимпиада (2015–2023)
12. Открытая олимпиада (2015–2023)
13. Формула Единства / Третье тысячелетие (2015–2023)
14. Будущие исследователи — будущее науки (2015–2023)
15. САММАТ (2021–2023)
16. Бельчонок (2018–2023)
17. Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист! (2016–2023)
18. Олимпиада КФУ (2019–2023)
19. Надежда энергетики (2015–2023)
20. Высшая проба (2023)

Годы, являющиеся левой границей промежутка дат для каждой олимпиады, выбраны из следующих соображений.

- Более ранние задачи олимпиад, имеющих номера 1–8 в приведённом списке, можно найти в олимпиадных листках. Кстати, многие пункты оглавления задачника дублируют названия данных листков, и тогда раздел задачника начинается со ссылки на соответствующий листок.

- В остальных случаях нижняя граница определялась либо наличием соответствующих материалов на сайтах олимпиад, либо моими личными возможностями :-)

Указание номера задачи позволяет составить представление о её сложности: чем больше номер задачи, тем она, как правило, труднее.

Распределение задач по темам зачастую сделано «на глаз»; в дальнейшем (по мере моего осмысления) некоторые задачи могут переместиться в другие темы. Актуальная версия задачника находится по адресу: `http://mathus.ru/math/10math2023.pdf`.

Оглавление

Глава 1

Целые числа

1.1 Десятичная запись

Дополнительные задачи — в листке Десятичная запись.

1.1.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 10.1*) Найдите наибольшее 12-значное число N, удовлетворяющее двум следующим условиям:

- В десятичной записи числа N шесть цифр «4» и шесть цифр «7»;
- В десятичной записи числа N никакие четыре подряд идущие цифры не образуют число «7444».

1.1.2. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.1*) Дробь $1/5$ записана в виде бесконечной двоичной дроби. Сколько единиц среди первых 2022 цифр после запятой содержится в такой форме записи?

1.1.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 10–11.1*) Натуральные числа, начиная с 20, выписали в одну строку: $20212223\ldots$ Какая цифра стоит в получившейся последовательности цифр на 2021 месте?

1.1.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 10.1*) В десятичной записи числа N все цифры различны и не равны нулю. Если выписать все числа, получаемые из N перестановкой цифр (в том числе само число N), и найти всевозможные разности этих чисел, то все разности окажутся различными. (Например, число $N = 123$ не удовлетворяет этому условию, так как $132 - 123 = 321 - 312$.) Найдите самое большое такое N.

1.1.5. (*«Курчатов», 2020, 10.1*) Найдите такие два числа a и b, что b получается из a перестановкой цифр, причём $a - b$ состоит только из цифр 1.

1.1.6. (*Всеросс., 2020, МЭ, 10.3*) Пусть n — натуральное число. Какая цифра стоит сразу после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{n^2+n}$?

1.1.7. (*«Бельчонок», 2022, 10.3*) Трёхзначное число состоит из разных цифр. Между первой и второй цифрами, а также между второй и третьей цифрами, вписали по n нулей. Докажите, что существует больше одного исходного трёхзначного числа такого, что полученное $(2n+3)$-значное число является квадратом целого числа при любых натуральных n.

1.1.8. (*«Росатом», 2023, 10.3*) Найти первые 100 цифр после запятой в десятичной форме записи числа $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2023}$.

1.1.9. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.8*) Каким наибольшим может быть количество последовательных десятизначных натуральных чисел, среди которых нет ни одного палиндрома? (Палиндром — это число, одинаково читающееся в обоих направлениях, например, 33, 2552, 70507.)

1.2 Сумма цифр числа

Дополнительные задачи — в листке Сумма цифр числа.

1.2.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 10.1*) Сумма цифр натурального числа равна 2017. При этом, какие бы десять подряд идущих цифр числа мы не рассмотрели, все они различны. Найдите первые 10 цифр наименьшего и наибольшего из таких чисел. Обоснуйте ответ.

1.2.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 10.1*) Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11\ldots11}_{n}$ раз.

1.2.3. (*«Курчатов», 2023, 10.2*) Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?

1.2.4. (*Всесиб., 2020, 10.5*) Представить число 1000 в виде суммы максимально возможного количества натуральных чисел, суммы цифр которых попарно различны.

1.3 Делимость

Дополнительные задачи — в листке Делимость. Общие свойства.

1.3.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 10.5*) Сумма трёх различных натуральных делителей нечётного натурального числа n равна 10327. Какое наименьшее значение может принимать n?

1.3.2. (*Всеросс., 2021, МЭ, 10.3*) Антон выписал на доску три натуральных числа a, b и c. А Ира нарисовала на доске три прямоугольника $a \times b$, $a \times c$ и $b \times c$. Оказалось, что разность площадей какой-то пары прямоугольников равна 1, а разность площадей другой пары прямоугольников равна 49. Чему может быть равно $a + b + c$? Укажите все возможные варианты.

1.3.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 10.1*) Докажите, что для любого натурального n число $n^3 + 6n^2 + 12n + 16$ составное.

1.3.4. (*«Бельчонок», 2019, 10.1*) Вася заметил, что задуманное им натуральное число n равно сумме двух натуральных делителей числа $n + 22$. Какое наибольшее число мог задумать Вася?

1.3.5. (*«Физтех», 2023, 10.1*) Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

1.3.6. (*Всесиб., 2020, 10.1*) Пусть a, b, c — не обязательно различные натуральные числа такие, что дроби $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+c}{b}$, $\frac{b+c}{a}$ тоже являются натуральными числами. Найти все возможные значения суммы $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}$.

1.3.7. (*Всеросс., 2022, ЗЭ, 10.1*) Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

1.3.8. (*САММАТ, 2022, 10.2*) Пусть число $\overline{abc}$ простое. Через n обозначим наименьший делитель числа $\overline{abcabc}$, отличный от 1, а через m — другой делитель, ближайший к n. Найти $n \cdot m$.

1.3.9. (*Всесиб., 2018, 10.2*) Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от единицы и самого числа. Найти все натуральные числа, имеющие не меньше двух различных собственных делителей и делящиеся на разность любых двух из них.

1.3.10. (*Всесиб., 2019, 10.2*) Множество A содержит 15 различных натуральных чисел, не превосходящих 100, одно из которых равно 84, и обладает следующим свойством: модуль разности любых двух различных чисел из A снова содержится в A. Доказать, что A обязательно содержит число 42.

1.3.11. (*Открытая олимпиада, 2023, 10.2*) Сумма трёх попарно различных натуральных делителей натурального числа n равна 170000. Какое наименьшее значение может принимать число n? (Среди указанных делителей могут быть единица и само число.)

1.3.12. (*«Росатом», 2018, 10.3*) При каких целых k выражение $k \cdot (k^2 - 1)(k^2 - 9)$ делится на 1680?

1.3.13. (*«Курчатов», 2022, 10.3*) Назовем *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число N, которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

1.3.14. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.4*) Докажите, что при любых натуральных значениях n число $5^n\left(2^{2n} - 3^n\right) + 2^n - 7^n$ делится нацело на 65.

1.3.15. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.4*) Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых из четырех утверждений

1. $a^2 + 4a + 3$ делится на b;
2. $a^2 + ab - 6b^2 - 2a - 16b - 8 = 0$;
3. $a + 2b + 1$ делится на 4;
4. $a + 6b + 1$ — простое число

три истинны, а одно ложно.

1.3.16. (*Всесиб., 2021, 10.4*) Пусть $m < n$ — натуральные числа. Доказать, что среди произвольных последовательных n натуральных чисел всегда найдутся два, произведение которых делится на mn.

1.3.17. (*Всесиб., 2015, 10.4*) 25 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000 таковы, что произведение любых двух из них является квадратом некоторого натурального числа. Доказать, что и сами числа являются квадратами натуральных чисел.

1.3.18. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 10.4*) Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через p обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать p?

1.3.19. (*Всеросс., 2023, РЭ, 10.4*) Даны натуральные a, b, c такие, что $a > 1$, $b > c > 1$, а число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что b делится на a.

1.3.20. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.5*) На доске написано 15 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 8 чисел делятся на 7, а 10 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 220.

1.3.21. (*«Высшая проба», 2023, 10.5*) Найдите все составные натуральные числа n, обладающие следующим свойством: каждый натуральный делитель числа n (в частности, само n), уменьшенный на 1, является квадратом целого числа.

1.3.22. (*Всеросс., 2023, МЭ, 10.6*) Пару натуральных чисел (a, p) назовём *хорошей*, если число $a^3 + p^3$ делится на $a^2 - p^2$, причём $a > p$.

1. Укажите любое возможное значение a, для которого пара $(a, 13)$ — хорошая.

2. Найдите количество хороших пар, для которых p — простое число, меньшее 20.

1.3.23. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.6*) Можно ли разбить числа 1, 2, 3, ..., 99, 100 на три группы так, чтобы сумма чисел в одной группе делилась на 102, сумма чисел в другой группе делилась на 203, а сумма чисел в третьей группе делилась на 304?

1.3.24. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 10.7*) У Олега есть четыре карточки, на каждой из которых с одной и с другой стороны написаны натуральные числа (всего написано 8 чисел). Он рассматривает всевозможные четвёрки чисел, где первое число написано на первой карточке, второе — на второй, третье — на третьей, четвёртое — на четвёртой. Затем для каждой четвёрки он выписывает произведение чисел к себе в блокнот. Чему равна сумма восьми чисел на карточках, если сумма шестнадцати чисел в блокноте Олега равна 330?

1.3.25. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.8*) Найдите все такие десятизначные числа $C = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5b_1b_2b_3b_4b_5}$, которые делятся на произведение пятизначных чисел $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ и $B = \overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$. ($a_1$, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 — цифры, $a_1 \neq 0$.)

1.4 НОД и НОК

Дополнительные задачи — в листке НОД и НОК.

1.4.1. (*«Росатом», 2015, 10.1*) Для каждого целого, положительного x найти наибольший общий делитель чисел $P_1(x) = = x^3 + 5x^2 + 4x + 15$ и $P_2(x) = x^4 + 5x^3 + 15x + 3$.

1.4.2. (*«Росатом», 2021, 10.1*) Найти наименьшее натуральное число, имеющее при делении на 3, 5 и 6 в остатке 1, а при делении на 11 — остаток 5.

1.4.3. (*«Физтех», 2023, 10.2*) Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

1.4.4. (*«Надежда энергетики», 2021, 10.5*) При решении некоторой задачи с натуральным параметром n получена дробь

$$\frac{101n+25}{57n+14}.$$

При каких n дробь можно сократить?

1.4.5. (*Всесиб., 2022, 10.5*) Какие натуральные числа n можно представить в виде

$$n = [a, b] + [a, c] + [b, c]$$

для некоторых натуральных a, b, c? Здесь $[x, y]$ обозначает наименьшее общее кратное натуральных чисел x и y.

1.4.6. (*Всеросс., 2023, РЭ, 10.6*) Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$?

1.5 Остатки и сравнения

Дополнительные задачи — в листке Остатки и сравнения.

1.5.1. (*Всеросс., 2023, МЭ, 10.1*) а) Натуральное число n меньше 120. Какой наибольший остаток может давать число 209 при делении на n?

б) Натуральное число n меньше 90. Какой наибольший остаток может давать число 209 при делении на n?

1.5.2. (*ОММО, 2022.1*) Докажите, что для каждого натурального числа n число $5^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ делится на 11.

1.5.3. (*САММАТ, 2021, 10.9*) Доказать, что при всех натуральных n число $3^{2n+3} + 40n - 27$ делится на 64.

1.5.4. (*Всесиб., 2023, 10.1*) Найдите все пары натуральных чисел $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$ такие, что остаток от деления числа $3x$ на y равен 1, остаток от деления числа $3y$ на x равен 1 и остаток от деления числа xy на 3 тоже равен 1.

1.5.5. (*«Ломоносов», 2022, 10.1*) Найдите наименьшее натуральное число, обладающее следующим свойством: остаток от его деления на 20 на единицу меньше остатка от его деления на 21, а остаток от его деления на 22 равен 2.

1.5.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 10.1*) Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты A, B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8?

1.5.7. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 10.2*) Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 2026, а при делении на 2019 дает остаток 2009.

1.5.8. (*«Надежда энергетики», 2019, 10.2*) Может ли число $n^2 + n + 17$ делиться на 2019 при каких-либо натуральных n? Либо найдите такое минимальное n, либо докажите невозможность.

1.5.9. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 10.2*) Докажите, что для всех натуральных n число $n^6 - n^2$ делится на 10.

1.5.10. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 10.2*) Докажите, что в любом пифагоровом треугольнике есть сторона, длина которой делится на 5 (пифагоров треугольник — это прямоугольный треугольник с целыми сторонами).

1.5.11. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.2*) Найдите остаток от деления на 11 числа A:

$$A = \frac{2^1 - 2^2 + 2^3 - \ldots + 2^9 - 2^{10}}{-2^{-1} + 2^{-2} - 2^{-3} + \ldots - 2^{-9} + 2^{-10}}.$$

1.5.12. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.2*) Найдите наименьшее натуральное число m, при котором выражение $148^n + m \cdot 141^n$ делится на 2023 при любом нечетном натуральном n.

1.5.13. (*«Росатом», 2015, 10.3*) Доказать, что выражение $2 \cdot 6^n - 25n^2 + 15n - 2$ делится без остатка на 125 при любом натуральном $n > 1$.

1.5.14. (*Открытая олимпиада, 2019, 10.3*) Может ли число $n^{n^n} - 4n^n + 3$ быть простым при натуральном $n > 2$?

1.5.15. (*«Физтех», 2022, 10.3*) Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

1.5.16. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 10.3*) Найдите все натуральные числа n, для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.

1.5.17. (*«Курчатов», 2020, 10.3*) В вершинах правильного 2019-угольника расставили числа так, что сумма чисел в любых девяти подряд идущих вершинах равна 300. Известно, что в 19-й вершине стоит число 19, а в 20-й — число 20. Какое число стоит в 2019-й вершине?

1.5.18. (*«Ломоносов», 2022, 10.3*) Найдите три последние цифры числа $10^{2022} - 9^{2022}$.

1.5.19. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 10.4*) Пусть m и n — натуральные числа. Докажите, что число $5^n + 5^m$ можно представить в виде суммы двух точных квадратов тогда и только тогда, когда число $n - m$ чётное.

1.5.20. (*Открытая олимпиада, 2016, 10.6*) В пространстве расположен куб $1000 \times 1000 \times 1000$ с вершиной в начале координат и гранями, параллельными координатным плоскостям. Из начала координат проведены векторы во все целочисленные точки внутри и на границе этого куба. Найдите остаток от деления суммы квадратов длин этих векторов на 13.

1.5.21. (*Всеросс., 2022, РЭ, 10.6*) На доске написаны три последовательных нечётных числа. Может ли сумма остатков от деления этих трёх чисел на 2022 равняться некоторому простому числу?

1.5.22. (*Открытая олимпиада, 2020, 10.8*) Докажите, что число $3^{3003} + 5^{3003} + 7^{3003}$ раскладывается в произведение хотя бы пяти (не обязательно различных) натуральных чисел, больших единицы.

1.6 Уравнения в целых числах

Дополнительные задачи — в листке Уравнения в целых числах.

1.6.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 10.3*) Лёша разрезал куб $n \times n \times n$ на 153 меньших кубика. Причём у всех кубиков, кроме одного, длина ребра равна 1. Найдите n.

1.6.2. (*САММАТ, 2021, 10.1*) Решить в натуральных числах уравнение

$$n^4m^2 - k^2 = 2021.$$

1.6.3. (*Всесиб., 2016, 10.1*) Найти все натуральные числа n, такие, что $\frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}$ для некоторых простых p и q.

1.6.4. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.1*) Найдите все целые решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \end{cases}$$

1.6.5. (*Олимпиада КФУ, 2022, 10.2*) Найдите все различные натуральные числа x и y, для которых справедливо равенство $x! + y = y! + x$.

1.6.6. (*«Физтех», 2023, 10.3*) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

1.6.7. (*САММАТ, 2021, 10.4*) Найти все натуральные числа n, для которых сумма

$$S_n = 1! + 2! + 3! + \ldots + n!$$

является полным квадратом ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$). Ответ обосновать.

1.6.8. (*САММАТ, 2023, 10.6*) Найти решение уравнения в целых числах:

$$10 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + y^2 - 18x + 81} = 0.$$

1.6.9. (*САММАТ, 2021, 10.10*) Решить в целых числах уравнение

$$4x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 24y = 1.$$

1.6.10. (*«Росатом», 2020, 10.3*) Сократимая обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 7 возросла в три раза. Найти p и q, если известно, что НОД$\,(p, q) = 2$.

1.6.11. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 10.4*) Докажите, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих соотношению

$$x^2 + y^2 = z^{2022}.$$

1.6.12. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 10.5*) Найдите все пары натуральных чисел m, n, для которых $n! + 4! = m^2$ (где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$).

1.6.13. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 10.5*) Решите в простых числах уравнение $a^b + a + b = b^a$.

1.6.14. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 10.8*) Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{14}^4 = 2031$?

1.7 Задачи с целыми числами

Дополнительные задачи — в листке Задачи с целыми числами.

1.7.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 10.3*) У Юры есть n карточек, на которых написаны числа от 1 до n. После того, как Юра потерял одну из них, сумма чисел на оставшихся оказалась равна 101. Какое число написано на потерянной карточке?

1.7.2. (*Всеросс., 2022, МЭ, 10.5*) Несколько сладкоежек приняли участие в состязании по поеданию конфет. Каждый участник съел целое количество конфет, причём любые два участника съели разное количество конфет. Подводя итоги состязания, жюри упорядочило всех людей по убыванию количества съеденных конфет (например, победитель съел больше всего конфет, а человек, занявший последнее место, съел меньше всего конфет).

Известно, что:

- победитель съел в 14 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые;
- участник, занявший третье место, съел в 20 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые;
- участник, занявший последнее место, съел в 21 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые.

Сколько сладкоежек участвовало в состязании?

1.7.3. (*Олимпиада КФУ, 2019, 10.1*) Белоснежке на день рождения подарили 323 белые розы и 221 красную розу. Она решила сделать из всех этих цветов *минимально возможное* количество букетов — причём так, чтобы во всех букетах было одно и то же количество роз и в каждом букете розы были бы одного цвета. Сколько букетов у неё получится?

1.7.4. (*«Бельчонок», 2018, 10.1*) Бельчонок задумал натуральное двузначное число n, и сосчитал сумму натуральных чисел от 1 до n. Он получил число, заканчивающееся цифрой 5. Потом он сосчитал сумму натуральных чисел от 1 до $(n + 1)$ и в результате тоже получил число, заканчивающееся цифрой 5. Какое наименьшее число n могло быть задумано?

1.7.5. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.1*) 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников — сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?

1.7.6. (*«Росатом», 2022, 10.1*) Класс разделили на две команды «Знайки» и «Незнайки» и стали играть в игру «Вопросы и ответы». Правила игры простые: каждый игрок команды должен уметь задать по выбранной теме вопрос любому игроку другой команды и дать ответ на вопрос противника к нему адресованный. Учитель оценивает качество вопросов и ответов. В результате игры каждый член команды «Знайки» принял участие в игре ровно три раза (в форме вопроса или ответа), а каждый игрок команды «Незнайки» только два. Сколько учеников в классе, если на обед ходили 21 ученик, а парт в классе 14? (за партой могут сидеть не более двух учеников)

1.7.7. (*«Росатом», 2021, 10.1*) Вася и Петя занялись тем, что выкладывали на столе фигуры из одинаковых картонных правильных треугольников. Когда каждый из них собрал свой большой правильный треугольник (без дырок), то оказалось, что Вася использовал на него на 161 треугольник больше, чем Петя. Сколько треугольников использовал Петя, если у него их было не более 100 штук?

1.7.8. (*«Росатом», 2023, 10.1*) В поезде 10 вагонов и в них находятся 270 пассажиров. Во втором вагоне более, чем на одного пассажира больше, чем в первом, в третьем вагоне более чем на одного пассажира больше, чем во втором и так до последнего вагона. Число пассажиров в последнем вагоне не более, чем в 2 раза превышает количество пассажиров в первом вагоне. Сколько пассажиров едет в первом вагоне?

1.7.9. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.2*) Монолитный блок типа A весит 17 кг, а монолитный блок типа B — 7 кг. Можно ли из этих блоков сформировать груз, равный максимальной грузоподъемности крана, которая составляет 317 кг? Если да, то какое наибольшее количество блоков при этом будет поднимать кран?

1.7.10. (*«Надежда энергетики», 2018, 10.2*) В стране Лимонии лишь два денежных знака, достоинством в 7 лимонов и в 9 лимонов. Найдите все способы представления такими знаками суммы в 997 лимонов и укажите их количество.

1.7.11. (*«Бельчонок», 2020, 10.2*) В командной олимпиаде по математике для получения призового места необходимо набрать n баллов. В составе команды «Бельчата» 3 участника: Вася, Коля и Петя. Оказалось, что сумма набранных баллов команды «Бельчата» меньше n. Если бы Вася получил вдвое больше баллов, то у команды было бы $2n - 34$ баллов. С другой стороны, если бы Пете добавили бы вдвое больше баллов, чем у него было, то у команды было бы $2n + 6$ баллов. Найдите n, если известно, что у Коли было на 9 баллов больше, чем у Васи.

1.7.12. (*«Бельчонок», 2020, 10.2*) В командной олимпиаде по математике были лёгкие, средние и трудные задачи. За правильный ответ на лёгкую задачу можно было получить 4 балла, среднюю — 5 баллов, трудную — 6 баллов. За неверный ответ на лёгкую задачу вычиталось 2 балла, за неверный ответ на среднюю задачу — 1 балл, а за неверный ответ на трудную задачу баллы не вычитались. Участники команды «Бельчата» ответили правильно на 10 задач и получили на 30 баллов меньше максимально возможного числа баллов. Сколько всего задач было предложено на олимпиаде?

1.7.13. (*«Бельчонок», 2021, 10.2*) На экзамен каждый участник принес или телефон, или три тетради, или четыре книжки. Но пользоваться ими было нельзя, поэтому организаторы сложили всё это на два стола. Телефонов было 58, и все они лежали на первом столе. Ещё там лежала пятая часть всех тетрадей и седьмая часть всех книжек. При этом на каждом столе лежало поровну предметов. Сколько человек пришло на экзамен?

1.7.14. (*«Бельчонок», 2021, 10.3*) В олимпиаде участвовали девятиклассники и десятиклассники. Каждый день для решения предлагалось 10 задач. В первый день каждый девятиклассник решил на одну задачу больше, чем каждый десятиклассник, а всего участники олимпиады в первый день решили 129 задач. Во второй день каждый десятиклассник решил на одну задачу больше, чем каждый девятиклассник, а всего участники олимпиады во второй день решили 190 задач. Сколько человек могло участвовать в олимпиаде?

1.7.15. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.6*) Спортсмены студенческой команды должны были выйти на спортивный праздник прямоугольным строем по 45 человек в ряд. По прибытии выяснилось, что не все спортсмены взяли с собой нужную спортивную форму и, следовательно, они не смогут принять участие в празднике. Оставшихся спортсменов перестроили так, что число рядов стало на два меньше, а число спортсменов в каждом ряду стало на 48 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все спортсмены приняли бы участие в празднике, то их можно было бы выстроить прямоугольным строем так, что число спортсменов в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько спортсменов планировали принять участие в спортивном празднике?

1.7.16. (*«Физтех», 2022, 10.6*) На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них чётны, но не делятся на 3, остальные же делятся на 3 и при этом нечётны. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно чётное и хотя бы одно кратное 3, можно 25 способами. Сколько было выписано чисел?

1.7.17. (*«Ломоносов», 2023, 10.6*) Для укладки пола в квадратной комнате купили одинаковые квадратные плитки. 15 плиток оказались разбитыми. Оставшимися плитками выложили пол в другой комнате прямоугольной формы, в длину которой укладывается на 11 плиток больше, чем в ширину. Сколько плиток было куплено?

Глава 2

Алгебра и анализ

2.1 Рациональные и иррациональные числа

Дополнительные задачи — в листке Рациональные и иррациональные числа.

2.1.1. (*«Курчатов», 2023, 10.1*) Найдите все пары рациональных чисел a и b таких, что число $a + b\sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^2 + bx + a = 0$.

2.1.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 10.1*) Существует ли прямоугольник с иррациональными сторонами, у которого

а) площадь и периметр — числа целые?

б) площадь, периметр и диагональ — числа целые?

2.1.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 10.2*) Даны 2018 чисел x_1, $x_2, \ldots, x_{2018}$, каждое из которых равно либо $2-\sqrt{3}$, либо $2+\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение суммы

$$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2017}x_{2018},$$

если известно, что она является целым числом.

2.1.4. (*САММАТ, 2021, 10.3*) Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 и a_7 образуют геометрическую прогрессию, при этом среди них есть как рациональные числа, так и иррациональные. Какое наибольшее количество членов этой прогрессии могут быть рациональными числами? Ответ обосновать.

2.1.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 10.3*) Дан треугольник, у которого длины сторон — числа рациональные. Докажите, что рациональным числом является отношение R/r, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружности треугольника.

2.1.6. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.7*) Докажите, что число $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^{2021}$ представимо в виде

$$n\sqrt{3} + m\sqrt{5} + k\sqrt{7} + l\sqrt{3\cdot 5\cdot 7},$$

где n, m, k, l — натуральные числа, и при этом $1 - 10^{-500} < \sqrt{35}\frac{l}{n} < 1$.

2.2 Числовые неравенства

Дополнительные задачи — в листке Числовые неравенства.

2.2.1. (*«Надежда энергетики», 2023, 10.1*) Во сколько раз число A больше или меньше числа B, если

$$A=\underbrace{1+\ldots+1}_{2022\ \text{раз}}+\underbrace{2+\ldots+2}_{2021\ \text{раз}}+\ldots+2021+2021+2022,$$
$$B=\underbrace{2023+\ldots+2023}_{2022\ \text{раз}}+\underbrace{2022+\ldots+2022}_{2021\ \text{раз}}+\ldots+3+3+2.$$

2.2.2. (*Открытая олимпиада, 2017, 10.1*) Что больше: $\frac{1}{50}+\frac{1}{51}+\ldots+\frac{1}{150}$ или $\frac{2}{150}+\frac{2}{151}+\ldots+\frac{2}{250}$?

2.2.3. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.1*) Сравните числа $\left(\frac{2016}{2017}\right)^4$ и $\left(\frac{2015}{2016}\right)^5$.

2.2.4. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.1*) Сравните числа $\left(\frac{2}{3}\right)^{2016}$ и $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1580}$.

2.2.5. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.1*) Сравните числа $99!$ и 50^{99}.

2.2.6. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 10.2*) Даны три числа: x, y, z. Известно, что каждое из чисел $2x-y$, $3y-2z$ и $4z-3x$ отрицательно. Докажите, что каждое из чисел x, y, z тоже отрицательно.

2.2.7. (*«Бельчонок», 2023, 10.3*) Из интервала $[51;100]$ выбрали три различных целых числа a, b, c и составили из них 8 чисел: $a+b+c$, $a+bc$, $b+ac$, $c+ab$, $(a+b)c$, $(b+c)a$, $(c+a)b$, abc. Каково наименьшее возможное число различных среди них?

2.2.8. (*«Бельчонок», 2023, 10.3*) Даны 4 действительных числа $\{a_i\}$: $a_1<a_2<a_3<a_4$. Эти числа в некотором порядке расставляются по окружности, и находится величина A, равная сумме квадратов разностей соседних чисел. При каком расположении чисел $\{a_i\}$ величина A имеет наименьшее значение?

2.2.9. (*«Бельчонок», 2023, 10.3*) Известно, что $abc=1$, $a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Докажите, что максимальное из чисел a, b, c больше 1, а два других числа меньше 1.

2.2.10. (*«Бельчонок», 2023, 10.3*) Прямоугольный параллелепипед $a\times b\times c$ построен из одинаковых единичных кубиков. Назовём внешними кубики, у которых хотя бы одна грань лежит на поверхности параллелепипеда, а остальные будем называть внутренними. Пусть известно, что a четное и $8\leqslant a\leqslant b\leqslant c$. Найдите все такие тройки целых чисел (a,b,c), для которых число внешних кубиков равно числу внутренних кубиков.

2.2.11. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 10.4*) Какое из чисел больше

$$\frac{1}{2016}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}\right)\quad\text{или}\quad\frac{1}{2017}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2017}\right)?$$

2.2.12. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 10.4*) Какое из чисел больше: число 2019 или число

$$a^{a^{a^{\cdots^{a}}}}\Big\}\, 2019 \text{ раз},$$

где $a = \sqrt[2019]{2019}$?

2.2.13. (*«Надежда энергетики», 2019, 10.5*) Верно ли неравенство

$$\sqrt{\underbrace{2019 + \sqrt{2019 + \ldots + \sqrt{2019}}}_{2019 \text{ раз}}} < 2019?$$

2.2.14. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 10.6*) Определите знак числа

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016}.$$

Знаки расставлены так: «+» перед первой дробью, затем идут два «$-$» и два «+» по очереди. Перед последней дробью стоит «+».

2.3 Алгебраические преобразования и вычисления

Дополнительные задачи — в листке Алгебраические преобразования.

2.3.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 10.2*) Известно, что $\frac{a+b}{a-b} = 3$. Найдите значение выражения $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

2.3.2. (*«Ломоносов», 2020, 10.1*) Вычислите

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots + 2017\sqrt{1 + 2018 \cdot 2020}}}}.$$

2.3.3. (*Олимпиада КФУ, 2021, 10.1*) На доске написаны числа a, b и c. Их стёрли, а взамен записали числа $a^2 + 2bc$, $b^2 + 2ca$, $c^2 + 2ab$. После этого оказалось, что на доске написаны те же числа, что и вначале (возможно, в другом порядке). Найдите все возможные значения суммы $a + b + c$.

2.3.4. (*«Бельчонок», 2023, 10.1*) Действительные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz, \\ 2y + 2z = x^2. \end{cases}$$

Найдите возможные значения $x + y + z$.

2.3.5. (*«Шаг в будущее», 2017, 10.1*) Вычислить $x^3 + 3x$, где

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}.$$

2.3.6. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 10.1*) Даны четыре действительных числа a, b, c, d, которые удовлетворяют двум соотношениям: $a+b=c+d$ и $a^3+b^3=c^3+d^3$.

а) Докажите, что $a^5+b^5=c^5+d^5$;

б) Можно ли сделать вывод, что $a^4+b^4=c^4+d^4$?

2.3.7. (*Открытая олимпиада, 2023, 10.1*) Известно, что $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}=8$, $a+b+c=30$. Найдите $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Ответ запишите в виде несократимой дроби.

2.3.8. (*«Бельчонок», 2023, 10.2*) Действительные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=27. \end{cases}$$

Найдите наибольшее и наименьшее возможное значение z.

2.3.9. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.2*) Вычислить

$$\frac{1580\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x},$$

где $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2016}{1580}} - \sqrt{\frac{1580}{2016}}\right)$.

2.3.10. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.2*) Вычислить $\sqrt[3]{\frac{x}{2015+2016}}$, где x — среднее гармоническое чисел

$$a = \frac{2016+2015}{2016^2+2016\cdot 2015+2015^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{2016-2015}{2016^2-2016\cdot 2015+2015^2}.$$

Средним гармоническим двух положительных чисел a и b называется число c такое, что $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

2.3.11. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.2*) Число $x = 2^1+2^0+2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-2021}$. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2x+4\sqrt{2x-4}} + \sqrt{2x-4\sqrt{2x-4}}.$$

2.3.12. (*Всеросс., 2023, МЭ, 10.3*) На доске написаны натуральные числа a, b, c, d. Известно, что среди шести сумм

$$a+b, \quad b+c, \quad c+d, \quad d+a, \quad a+c, \quad b+d$$

три равны 23, а три других равны 34.

1. Чему равно $a+b+c+d$?
2. Чему равно наименьшее из чисел a, b, c, d?

2.3.13. (*Всесиб., 2018, 10.4*) Действительные числа a и b таковы, что $a^3+b^3=1-3ab$. Найти все значения, которые может принимать сумма $a+b$.

2.3.14. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.4*) Для положительных чисел x, y, z заданы значения $xyz+\frac{1}{xyz}=a$, $x+\frac{1}{y}=b$, $y+\frac{1}{z}=c$. Выразите через a, b и c значение $z+\frac{1}{x}$.

2.3.15. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 10.5*) Докажите, что для любых целых чисел a и b существуют целые числа x и y такие, что $x^2+xy+y^2=3a^2+b^2$.

2.3.16. (*Открытая олимпиада, 2018, 10.5*) Пусть p, q и r — нечётные простые числа. Докажите, что $p^3+q^3+3pqr \neq r^3$.

2.3.17. (*САММАТ, 2021, 10.6*) Для любой пары чисел определена некоторая операция «$*$», удовлетворяющая следующим свойствам: $a*(b*c)=(a*b)\cdot c$ и $a*a=1$, где операция «$\cdot$» — операция умножения. Найдите корень x уравнения: $x*3=2020$.

2.3.18. (*«Физтех», 2023, 10.6*) Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc.

2.3.19. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.7*) Числа x, y, z различны и удовлетворяют системе уравнений

$$x^3+y^2+z^2=x^2+y^3+z^2=x^2+y^2+z^3=0{,}9.$$

Какие значения может принимать их произведение?

2.3.20. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.7*) Числа x, y, z различны и удовлетворяют системе уравнений

$$x^2+y^3+z^3=x^3+y^2+z^3=x^3+y^3+z^2=0{,}8$$

Какие значения может принимать их произведение?

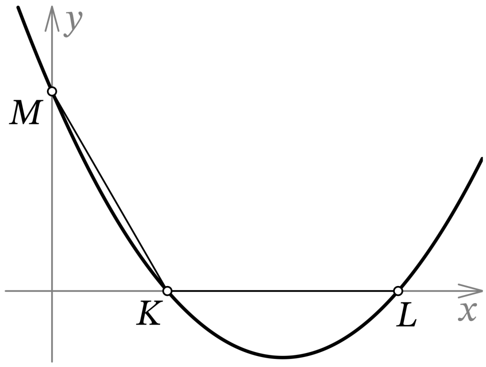
2.3.21. (*Открытая олимпиада, 2018, 10.7*) Найдите, чему может быть равно $x+y$, если известно, что

$$x^3-6x^2+15x=12 \quad \text{и} \quad y^3-6y^2+15y=16.$$

2.4 Квадратный трёхчлен

Дополнительные задачи — в листке Квадратный трёхчлен.

2.4.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 10.6*) График квадратного трёхчлена $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + bx + c$ пересекает оси координат в трёх точках K, L и M, как на рисунке ниже. Оказалось, что $KL = KM$ и $\angle LKM = 120°$. Найдите корни данного трёхчлена.



2.4.2. (*САММАТ, 2023, 10.1*) Найдите квадратный трехчлен $P(x)$, у которого один из корней совпадает с корнем многочлена $Q(x) = P(x) - 6x + 12$, а второй корень в три раза меньше наибольшего из корней многочлена $Q(x)$ и $Q(3) = -3$.

2.4.3. (*САММАТ, 2021, 10.2*) Известно, что приведенный квадратный трехчлен

$$f(x) = x^2 + px + q$$

имеет различные действительные корни. Сколько различных действительных корней может иметь уравнение $f(2021x) + f\left(2021x + \sqrt{p^2 - 4q}\right) = 0$?

2.4.4. (*Олимпиада КФУ, 2022, 10.1*) Квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ принимает целые кратные m значения при любых целых числах x. Найдите все такие натуральные $m > 1$.

2.4.5. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 10.1*) Сколько существует натуральных чисел n, не превосходящих 2017, таких что квадратный трехчлен $x^2 + x - n$ раскладывается на линейные множители с целочисленными коэффициентами?

2.4.6. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 10.1*) Петя говорит Коле: «Если ты задумаешь квадратный трехчлен, имеющий корни, и назовешь мне только старший коэффициент и расстояние между корнями, то я угадаю ординату вершины на его графике». Коля считает, что Петя ошибается: ведь для задания квадратного трехчлена нужно знать три числа. Кто из мальчиков прав?

2.4.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 10.1*) Даны две квадратичные функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = cx^2 + bx + a$. Оказалось, что функция $f(x) + g(x)$ имеет единственный корень. Докажите, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень.

2.4.8. (*«Курчатов», 2021, 10.2*) Числа d и e — корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c. Могло ли так получиться, что a, b, c, d, e — это подряд идущие целые числа в некотором порядке?

2.4.9. (*«Бельчонок», 2022, 10.2*) Квадратные трёхчлены $f = ax^2 + bx + c$ и $g = px^2 + qx + r$ не имеют корней, а их сумма $f + g$ — трёхчлен, имеющий корни. Найдите знак произведения $c \cdot r$.

2.4.10. (*«Бельчонок», 2022, 10.2*) Приведенный квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два корня. Докажите, что если вычесть из p один из этих корней, а q увеличить в два раза, то полученный квадратный трёхчлен будет иметь корень.

2.4.11. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 10.2*) Даны коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Его график пересекает оси координат в трёх точках, и через эти точки провели окружность, которая пересекла ось Oy ещё в одной точке. Найдите ординату этой четвертой точки.

2.4.12. (*Всеросс., 2022, РЭ, 10.2*) Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b+c) = P(a), \quad P(c+a) = P(b), \quad P(a+b) = P(c).$$

2.4.13. (*Открытая олимпиада, 2018, 10.3*) Для любого ли квадратного трёхчлена $f(x)$ существуют различные числа a, b, c и d такие, что $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$ и $f(d) = a$?

2.4.14. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 10.6*) На координатной плоскости нарисованы 2022 параболы, заданные уравнениями

$$f_i(x) = x^2 + b_i x$$

($1 \leqslant i \leqslant 2022$). Существует ли такая точка M и такая прямая l, что сумма расстояний от вершин всех парабол до точки M равна сумме расстояний от вершин всех парабол до прямой l?

2.4.15. (*Открытая олимпиада, 2017, 10.7*) Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 1. Все три коэффициента в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию из трёх элементов с разностью q. Найдите все возможные значения q, если известно, что это рациональное число и разность корней $f(x)$ равна q.

2.5 Неравенство Коши

Дополнительные задачи — в листке Неравенство Коши.

2.5.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 9.3, 10.2*) Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} + \frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right),$$

где x, y, z — ненулевые вещественные числа.

2.5.2. (*«Шаг в будущее», 2021, 10.2*) Число b таково, что неравенство

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_4}+\frac{a_5}{a_6}+\frac{a_7}{a_8}\geqslant b$$

выполняется для всех натуральных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, удовлетворяющих неравенствам $a_n \leqslant a_{n+1}$, $n=1,\ldots,8$, $a_8\leqslant 81$. Найдите наибольшее значение b.

2.5.3. (*«Шаг в будущее», 2021, 10.2*) Число p таково, что неравенство

$$\frac{4a}{3b+4c}+\frac{6b}{4c+2a}+\frac{8c}{2a+3b}\geqslant p$$

выполняется для всех положительных чисел a, b, c. Найдите наибольшее значение p.

2.5.4. (*Олимпиада КФУ, 2020, 10.3*) На каждой грани куба написано по одному положительному числу. Для каждой вершины подсчитали произведение чисел на трёх примыкающих к ней гранях, сумма восьми полученных чисел оказалась равной 1000. Найдите наименьшее возможное значение суммы шести чисел, написанных на гранях куба.

2.5.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 10.3*) Найдите количество натуральных делителей наибольшего целого значения выражения

$$xyz+xy+yz+zx+2023,$$

если сумма неотрицательных чисел x, y и z равна 2022.

2.5.6. (*«Бельчонок», 2018, 10.5*) Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{2}{2-x}+\frac{8}{8-y}$$

при условии, что $0<x<2$, $0<y<8$ и $xy=1$.

2.5.7. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.7*) Решить неравенство:

$$\frac{2}{\sqrt{x}+x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{1+x^2}+\frac{2x^2}{\sqrt{x}+1}\geqslant 3.$$

2.6 Доказательство неравенств

Дополнительные задачи — в листках

- Доказательство неравенств
- Доказательство неравенств (new)

2.6.1. (*САММАТ, 2022, 10.1*) Докажите, что все корни уравнения

$$(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+2022)=2022$$

меньше $\frac{1}{2021!}$, где $2021! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2021$.

2.6.2. (*САММАТ, 2021, 10.4*) Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{2020}{2021!}<1.$$

2.6.3. (*САММАТ, 2022, 10.6*) Докажите, что для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ выполняется неравенство $(a+b)(ab+2025) \geqslant 180ab$.

2.6.4. (*Всесиб., 2021, 10.1*) Докажите, что для любого $x \neq 0$ выполнено неравенство:

$$x^8-x^5-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}>0.$$

2.6.5. (*Открытая олимпиада, 2015, 10.1*) Докажите неравенство для всех $x \geqslant 1$:

$$x^5-\frac{1}{x^4} \geqslant 9(x-1).$$

2.6.6. (*Олимпиада КФУ, 2019, 10.2*) Докажите, что для любых действительных x и y справедливо равенство

$$||x|-|y||+|x|+|y|=|x-y|+|x+y|.$$

2.6.7. (*Всесиб., 2023, 10.3*) Докажите, что для любых действительных чисел x, y из интервала $[0,\pi/2]$, произведение которых не больше 1, выполняется неравенство $\sin xy \geqslant \sin x \cdot \sin y$.

2.6.8. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 10.3*) Докажите неравенство

$$\sqrt{x^3+y}+\sqrt{y^3+x} \geqslant \sqrt{x^3+x}+\sqrt{y^3+y}.$$

2.6.9. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 10.3*) Докажите, что для всех положительных чисел a и b выполняется неравенство

$$\left(a^{2018}+b^{2018}\right)^{2019}>\left(a^{2019}+b^{2019}\right)^{2018}.$$

2.6.10. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 10.3*) Произведение положительных чисел x, y, z, t равно 1. Докажите, что если

$$x+y+z+y>\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}, \quad \text{то} \quad x+y+z+t<\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{t}{z}+\frac{x}{t}.$$

2.6.11. (*«Высшая проба», 2023, 10.3*) Для действительных чисел $x>2$ и $y>2$ докажите, что

$$\frac{x^2-x}{y^2+y}+\frac{y^2-y}{x^2+x}>\frac{2}{3}.$$

2.6.12. (*Всесиб., 2019, 10.4*) Докажите, что для любых положительных чисел a и b и любого натурального n выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

2.6.13. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 10.4*) Даны три различных положительных числа a, b, c, причём $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)>0$. Докажите, что

$$\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}>\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}-\frac{c^2}{2}.$$

2.6.14. (*Всесиб., 2022, 10.4*) Пусть для действительных чисел x, y, z, выполнено неравенство: $x+y+z\geqslant xyz$. Доказать, что для них выполнено и неравенство $x^2+y^2+z^2\geqslant xyz$.

2.6.15. (*Открытая олимпиада, 2020, 10.4*) Числа x, y и z положительны, а их произведение равно 1. Докажите, что

$$\sqrt{x+3y+5z}+\sqrt{y+3z+5z}+\sqrt{z+3x+5y}\geqslant 9.$$

2.6.16. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 10.5*) Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0<a,b,c<1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$.

2.6.17. (*Всеросс., 2020, МЭ, 10.6*) Петя разложил карточки с числами от 1 до 10 в ряд в каком-то порядке, затем для каждой пары соседних карточек записал число $\frac{1}{x+y}$, где x и y — числа на этих карточках. Докажите, что сумма записанных Петей чисел больше, чем 0,75.

2.6.18. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 10.6*) Пусть x_k — положительный корень уравнения $x^k-x-1=0$. Докажите, что

$$x_{25}<\frac{x_{20}+x_{30}}{2}.$$

2.6.19. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.7*) Докажите неравенство

$$\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{4030}\leqslant 2015\sqrt{2016}.$$

2.6.20. (*Открытая олимпиада, 2019, 10.8*) Положительные числа x, y, z таковы, что $xyz=20$, $x+y+z=9$. Докажите, что

$$xy+yz+xz\geqslant 24.$$

2.7 Последовательности

Дополнительные задачи — в листке Последовательности.

2.7.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 10.4*) В ряду чисел

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, 201, 201, \ldots, 201$$

каждое число n встречается ровно n раз для всех $1 \leqslant n \leqslant 201$. Выберем в этом ряду такое число, слева и справа от которого чисел поровну. Определите это число.

2.7.2. (*Открытая олимпиада, 2018, 10.1*) Числовая последовательность задана условием

$$x_{n+1} = 3x_n + 4x_{n-1}.$$

Может ли она быть периодической, но не постоянной?

2.7.3. (*«Росатом», 2018, 10.1*) Может ли соотношение $x_{n+2} \cdot x_{n+1} = x_{n+1} \cdot x_n - 2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 2017$ определять члены последовательности x_n для всех n? Найти n, для которого $x_n = 0$.

2.7.4. (*«Надежда энергетики», 2016, 10.2*) Для числовой последовательности x_0, x_1, $\ldots$, x_n, x_{n+1}, $\ldots$ выполняются соотношения

$$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$$

при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ Найдите каждый член x_n такой последовательности и значения сумм $S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$.

2.7.5. (*Открытая олимпиада, 2015, 10.2*) Последовательность x_n задана следующими условиями: $x_1 = 3$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{4}{3}x_n = 4$. Найдите x_{2015}.

2.7.6. (*«Росатом», 2017, 10.2*) Члены последовательности x_n являются решениями уравнения

$$F_n(x) = \underbrace{f(f(f \ldots (f(x)) \ldots)}_{n} = 0$$

для всех $n \geqslant 1$. Написать формулу общего члена последовательности и найти $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, если $f(x) = 2x - 3$.

2.7.7. (*«Надежда энергетики», 2017, 10.2*) На тепловой электростанции запас газа всегда остается положительным и ежемесячно меняется следующим образом. Если в текущем месяце запас равен x м^3, то в следующем месяце он будет равен $1/(1 - x)$ м^3. Может ли запас газа оказаться одинаковым в какие-то два различных месяца? Если это возможно, то какое значение имеет запас, одинаковый для двух разных месяцев?

2.7.8. (*Олимпиада КФУ, 2022, 10.3*) Последовательность целых чисел такова, что $x_0 = 0$ и $|x_n| = |x_{n-1} + 1|$ для всех натуральных n от 1 до 100. Какое наименьшее положительное значение может принимать выражение $|x_1 + x_2 + \ldots + x_{99}|$?

2.7.9. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 10.3*) Числовая последовательность такова, что $x_n = \frac{x_{n-1}}{5} + 4$ для всех $n \geqslant 2$. Найдите x_{2017}, если $x_1 = 6$.

2.7.10. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 10.3*) Последовательность действительных чисел a_n такова, что $a_{n+1} = a_n(a_n + 4) + 2$ для всех натуральных n. Найдите минимальное возможное значение числа a_{2020}.

2.7.11. (*Открытая олимпиада, 2022, 10.3*) Последовательность задана формулой

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n.$$

Кроме того известно, что $x_0 = 0$, $x_2 = 1$. Найдите x_{100}.

2.7.12. (*«Росатом», 2019, 10.3*) Члены последовательности $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ определяются по правилу: для каждого натурального m $a_{m+1} = a_m \cdot p_m$, где $p_m > 1$ — наименьшее простое число, не делящее a_m. Первый член последовательности $a_1 = 2$. Найти m, для которого $a_{m+2} - a_m = 29820$.

2.7.13. (*«Росатом», 2021, 10.3*) Члены двух числовых последовательностей a_n и b_n связаны между собой соотношениями

$$\begin{cases} 2a_{n+1} = \sqrt{3}a_n - b_n, \\ 2b_{n+1} = a_n + \sqrt{3}b_n, \end{cases} \quad a_1 = b_1 = 1$$

для всех натуральных n. Найти наименьшее натуральное число m, для которого $a_{n+m} = a_n$, $b_{n+m} = b_n$ при любых n. Найти значения a_{2021} и b_{2021}.

2.7.14. (*«Росатом», 2020, 10.4*) При каком натуральном n дробь

$$a_n = \frac{1}{n + \frac{2019}{n + \frac{1}{n}}}$$

принимает наибольшее возможное значение?

2.7.15. (*Открытая олимпиада, 2017, 10.6*) Последовательность задана следующими соотношениями: $x_1 = 5$, $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Докажите, что $x_n > \pi$.

2.7.16. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 10.4*) Последовательность целых чисел a_n задается следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, $a_1 = 100$. Докажите, что любые два различных члена последовательности взаимно просты.

2.7.17. (*Открытая олимпиада, 2023, 10.6*) Последовательность x_n задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = x_n + \{x_n\}$ и начальным условием $x_0 = \frac{1}{31}$. Найдите $[x_{6000}]$.

$[a]$ — целая часть числа a, $\{a\}$ — дробная часть числа a.

2.7.18. (*Открытая олимпиада, 2021, 10.6*) Последовательность задана начальными условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 2$ и соотношением $x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{x_{n-2}}{4} + \frac{x_{n-3}}{4}$. Докажите, что x_{1001} и x_{1000} отличаются менее чем на 10^{-300}.

2.8 Прогрессии

Дополнительные задачи — в листке Последовательности.

2.8.1. (*Открытая олимпиада, 2020, 10.1*) Сумма первых шести членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна сумме следующих четырёх членов. Найдите $\frac{a_{16}}{a_1}$. (Нумерация членов прогрессии начинается с a_1.)

2.8.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 10.1*) Даны первые 2025 членов арифметической прогрессии. Коля посчитал среднее арифметическое для всех пар членов последовательности. Затем он выписал получившиеся результаты, упорядочив их по возрастанию и исключив повторы. Например, из набора чисел 4, 2, 9, 9, 9, 5, 4 Коля бы выписал числа 2, 4, 5, 9.

а) Докажите, что полученная последовательность также является арифметической прогрессией.

б) Сколько чисел выписал Коля?

2.8.3. (*ОММО, 2023.1*) Точка R_1 — середина отрезка ST; точка R_2 — середина отрезка SR_1; для каждого $n \geqslant 3$ точка R_n — середина отрезка $R_{n-2}R_{n-1}$. Пусть R — предельное положение точки R_n при $n \to \infty$. Найдите длину отрезка RT, если длина отрезка ST равна 15.

2.8.4. (*ОММО, 2021.1*) Сумма первых трёх членов арифметической прогрессии, а также сумма первых шести её членов — натуральные числа. Кроме того, её первый член d_1 удовлетворяет неравенству $d_1 \geqslant \frac{1}{2}$. Какое наименьшее значение может принимать d_1?

2.8.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 10.1*) В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_i\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 10$. Найдите b_n с номером $n = b_{b_3}$.

2.8.6. (*«Физтех», 2022, 10.1*) Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2.8.7. (*«Физтех», 2022, 10.1*) Числа a, b, c — соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < b < a$). Больший корень уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

2.8.8. (*САММАТ, 2023, 10.7*) Числа $\frac{5}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{121}{10}$ являются членами некоторой арифметической прогрессии. Найти разность прогрессии, если известно, что первое из указанных чисел является ее шестым членом.

2.8.9. (*«Бельчонок», 2022, 10.2*) Ненулевые числа p, q, r являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Докажите, что уравнение $px^2 + 2\sqrt{2}qx + r = 0$ имеет два решения.

2.8.10. (*Открытая олимпиада, 2019, 10.2*) В положительной непостоянной геометрической прогрессии среднее арифметическое второго, седьмого и девятого членов равно какому-то члену этой прогрессии. Какой минимальный номер у него может быть?

2.8.11. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.2*) Какое максимальное возможное количество идущих подряд членов возрастающей геометрической прогрессии могут быть 3-значными натуральными числами? Приведите пример такой последовательности.

2.8.12. (*«Бельчонок», 2019, 10.3*) Три числа x, y, z являются последовательными членами некоторой возрастающей арифметической прогрессии. Известно, что $x^2 = n + 29$, $y^2 = n + 301$ и $z^2 = n + 605$. Чему равно n?

2.8.13. (*«Росатом», 2016, 10.3*) $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с $a_1 = 3$ и разностью $d = 2$. S_n — сумма первых ее n членов. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ такова, что $f(a_n) = S_n$ для всех натуральных n. Найти a, b и c.

2.8.14. (*Открытая олимпиада, 2016, 10.4*) Докажите, что сумма бесконечной арифметической прогрессии и бесконечной непостоянной геометрической прогрессии никогда не будет арифметической прогрессией.

2.8.15. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 10.6*) Натуральные числа a, b, c, d и e являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите наименьшее возможное значение числа c, если сумма $b + c + d$ является полным квадратом, а сумма $a + b + c + d + e$ является полным кубом.

2.8.16. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.7*) Пьедестал олимпиады «Последняя надежда математики» состоит из трех ступеней. В вертикальном разрезе он представляет собой три состыкованных прямоугольника, длины которых образуют арифметическую прогрессию, а высоты — геометрическую. Площади прямоугольников равны соответственно 15, 60, 180 дм^2, а их общая длина составляет 30 дм. Найдите размеры пьедестала, учитывая, что ступень с самой маленькой длиной имеет и самую маленькую высоту.

2.9 Суммирование

Дополнительные задачи — в листке Суммирование.

2.9.1. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.1*) Найдите $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(13)$, если

$$f(n) = 4n^3 - 6n^2 + 4n + 13.$$

2.9.2. (*САММАТ, 2022, 10.4*) Дана арифметическая прогрессия $a_1 = 1$, a_2, a_3, $\ldots$, $a_{22} = 16$. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{21}} + \sqrt{a_{22}}}.$$

2.10 Многочлены

Дополнительные задачи — в листке Многочлены.

2.10.1. (*САММАТ, 2021, 10.3*) Приведите пример многочлена с целыми коэффициентами, имеющего корень $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$.

2.10.2. (*Открытая олимпиада, 2022, 10.1*) У многочлена $P(x^2)$ 17 различных корней (без учёта кратности). Верно ли, что $P(0) = 0$?

2.10.3. (*Открытая олимпиада, 2016, 10.1*) У Коли в тетради был записан многочлен сотой степени. Коля может взять один из записанных в тетради многочленов, прибавить a к коэффициенту при k-ой степени и вычесть $2a$ из коэффициента при $(k+1)$-й степени, после чего записать полученный многочлен в тетрадь к уже имеющимся. Могут ли у него в тетради после некоторого количества таких действий оказаться два многочлена, один из которых строго больше другого?

Если коэффициент при какой-то степени равен нулю, с ним тоже можно производить эту операцию.

2.10.4. (*«Росатом», 2017, 10.1*) a_n — арифметическая прогрессия,

$$p_n(x) = a_n x^3 - (a_n + 1)x^2 - (6a_n - 1)x + 6$$

— многочлен, для которого $p_n(2) = -16n - 4$ для всех натуральных n. Найти сумму корней уравнения $p_5(x) \cdot p_6(x) \cdot p_7(x) = 0$.

2.10.5. (*«Высшая проба», 2023, 10.1*) Существуют ли многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами такие, что многочлены $P(x) \cdot Q(x)$, $Q(x) \cdot R(x)$ и $P(x) \cdot R(x)$ имеют одинаковую степень, а многочлены $P(x)+Q(x)$, $P(x)+R(x)$ и $Q(x)+R(x)$ имеют попарно различные степени? (Считаем, что нулевой многочлен степени не имеет, то есть указанные многочлены не могут быть ему равны.)

2.10.6. (*Олимпиада КФУ, 2020, 10.2*) Многочлен $f(x) = ax^{100}+bx+c$ принимает целые значения при любых целых x. Какое наименьшее положительное значение может принимать a?

2.10.7. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.2*) Дан многочлен

$$P(x) = \frac{1}{16}\left(4x^5 - x^3 + 1\right)^3\left(x^4 - x + 2\right).$$

Найдите все натуральные решения уравнения $Ax + By = 37$, где A — сумма коэффициентов многочлена $P(x)$, стоящих при четных степенях x, B — сумма коэффициентов многочлена $P(x)$, стоящих при нечетных степенях x.

2.10.8. (*«Надежда энергетики», 2016, 10.4*) Дан квадратный трехчлен $g(x) = x^2 + ax + b$, имеющий ровно один корень. Найдите коэффициенты a и b, если известно, что и многочлен $g(x^5 + 2x - 1) + g(x^5 + 3x + 1)$ имеет ровно один корень.

2.10.9. (*«Росатом», 2020, 10.4*) Найти многочлен $P(x)$ степени 2020, для которого $P(5) = 2019$, $P(6) = 2021$ и $P(4 + x) = = P(8 - x)$ для всех x.

2.10.10. (*Открытая олимпиада, 2020, 10.5*) $P(x)$ — многочлен седьмой степени, имеющий семь различных вещественных корней. Какое наименьшее число вещественных корней может иметь многочлен $P(P(x))$?

2.10.11. (*Открытая олимпиада, 2023, 10.5*) Многочлен нечётной степени принимает некоторые значения больше одного раза, однако, никакое значение он не принимает ровно два или три раза. Докажите, что есть значение, которое этот многочлен принимает хотя бы 7 раз.

2.10.12. (*Открытая олимпиада, 2021, 10.5*) $P(x)$ — многочлен четвёртой степени с целыми коэффициентами, старший из которых положительный. При этом $P(\sqrt{3}) = P(\sqrt{5})$. Найдите x, при котором (или при которых) $P(x)$ принимает наименьшее значение.

2.10.13. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 10.6*) Пусть $p(x)$ — такой многочлен с целыми коэффициентами, что $p(7) = 6$. Может ли число $p(2019)$ быть полным квадратом?

2.11 Целочисленная теорема Безу

Дополнительные задачи — в листке Многочлены.

2.11.1. (*«Росатом», 2021, 10.3*) Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами при $x = 2$ принимает значение 3, а при $x = 4$ — его значение равно 1. Известно, что уравнение $P(n) = n - 1$ имеет целое решение. Найти это решение.

2.12 Целая и дробная части

Дополнительные задачи — в листке Целая и дробная части.

2.12.1. (*«Ломоносов», 2023, 10.1*) Вычислите

$$\left[\sqrt{45 - \sqrt{2023}} - \sqrt{45 + \sqrt{2023}}\right],$$

где $[t]$ — это целая часть числа t (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

2.12.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 10.1*) Какое число окажется на 2022-м месте в бесконечной последовательности 12, 13, 14, 15, 16, 17, ..., если в ней удалить все квадраты и кубы каких-либо натуральных чисел (то есть удалить числа $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, $27 = 3^3$, ...)?

2.12.3. (*«Курчатов», 2021, 10.1*) Маша написала на доске положительное число. Оказалось, что его целая часть на 43% меньше самого числа. Какое число написала Маша? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Целая часть числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данное.

vbox

2.12.4. (*«Надежда энергетики», 2020, 10.2*) Найдите все значения вещественного параметра p, при которых разрешима система уравнений

$$\begin{cases} 2[x] + y = 3/2, \\ 3[x] - 2y = p. \end{cases}$$

Здесь $[a]$ означает целую часть числа a.

2.12.5. (*Олимпиада КФУ, 2023, 10.3*) Найдите все решения уравнения $x^2 - [x] = 1$. Здесь $[x]$ — целая часть x, то есть наибольшее целое, не превосходящее данное число. Например, $[2{,}9] = 2$, $[-2{,}9] = -3$

2.12.6. (*«Надежда энергетики», 2022, 10.3*) Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[\frac{x}{2022}\right] + \left[\frac{x+1}{2022}\right] + \dots + \left[\frac{x+2021}{2022}\right] = x^{2022} - x^{2021}.$$

Через $[a]$ здесь обозначена целая часть числа a.

2.12.7. (*Открытая олимпиада, 2018, 10.4*) На доске было записано 15 различных нецелых чисел. Для каждого числа x из этих пятнадцати Вася выписал себе в тетрадку отдельно $[x]$ и $\frac{1}{\{x\}}$. Какое наименьшее количество различных чисел могло получиться у Васи?

$[x]$ и $\{x\}$ обозначают соответственно целую и дробную часть числа x.

2.12.8. (*«Надежда энергетики», 2018, 10.4*) Найдите количество чисел N из множества

$$\{1, 2, \dots, 2018\},$$

для которых существуют положительные решения x уравнения

$$x^{[x]} = N$$

($[x]$ — это целая часть вещественного числа x, т. е. наибольшее целое, не превосходящее x).

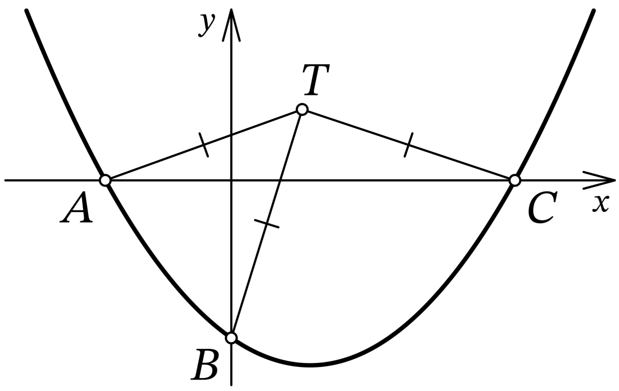
2.12.9. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.6*) Целой частью $[x]$ произвольного числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leqslant x$. Решите неравенство

$$\left[\cos^2(x+2)\right] \geqslant \frac{x}{\pi}.$$

2.13 Исследование функций

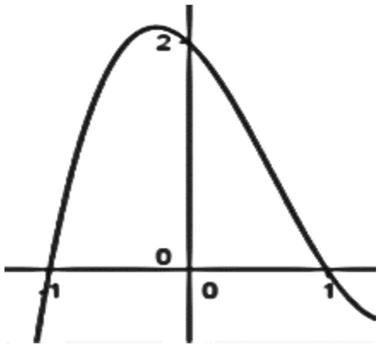
Дополнительные задачи — в листке Исследование функций.

2.13.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 10.7*) График функции $f(x) = \frac{1}{12}x^2 + ax + b$ пересекает ось Ox в точках A и C, а ось Oy — в точке B, как изображено на рисунке. Оказалось, что для точки T с координатами $(3; 3)$ выполнено условие $TA = TB = TC$. Найдите b.



2.13.2. (*САММАТ, 2021, 10.10*) Найдите область значений функции $f(x) = \sin^2 x + \cos x$. Привести точные нижнюю и верхнюю границы области.

2.13.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 10.1*) На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Найдите значение параметра b.



2.13.4. (*Олимпиада КФУ, 2021, 10.2*) Найдите наименьшее возможное значение функции

$$f(x) = |x+1| + |x+2| + \ldots + |x+100|.$$

2.13.5. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 10.3*) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = |x| + |x+1| + \ldots + |x+2022|$.

2.13.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.3*) График функции $y = x - a\sqrt{x} + 1$ пересекает ось Ox в двух точках. Через них проведена окружность, касающаяся оси Oy. Найдите ординату точки касания.

2.13.7. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.3*) График функции $y = x - \sqrt{x} + a$ пересекает ось Ox в двух точках. Через них проведена окружность, касающаяся оси Oy. Найдите ординату точки касания.

2.13.8. (*«Росатом», 2017, 10.3*) Найти координаты точки M, наименее удаленной от начала координат и лежащей на параболе $y = x^2 - 4x + 3{,}5$.

2.13.9. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 10.4*) а) Исследуйте функцию

$$y = \frac{\sqrt{x^2+1} + x - 1}{\sqrt{x^2+1} + x + 1}$$

на четность (нечетность).

б) Найдите область определения и множество значений этой функции.

2.13.10. (*«Ломоносов», 2020, 10.4*) На графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, где $x > 0$, найдите точку, ближайшую к началу координат.

2.13.11. (*«Бельчонок», 2019, 10.5*) Дана функция $f(x) = 2|x-a| + |x-b| + c$, где a, b, c — некоторые действительные числа, причем $a < b$. Известно, что множеством решений неравенства $f(x) \leqslant 3$ является промежуток длины 2. Докажите, что $f(x) > 0$ при всех x.

2.14 Наибольшие и наименьшие значения

Дополнительные задачи — в листке Наибольшее и наименьшее значения.

2.14.1. (*«Росатом», 2020, 10.1*) Петя и Вова хотят переправиться на другой берег реки шириной 200 (м). У них есть маленькая резиновая лодка, в которой может плыть только один человек со скоростью 40 (м/мин). Начали переправу одновременно: Петя на лодке, Вова — вплавь. В какой-то момент времени Петя покинул лодку и поплыл дальше самостоятельно, а Вова, догнав лодку, завершил переправу на ней. Петя плавает со скоростью 20, Вова — 30 (м/мин). Какое расстояние должен проплыть на лодке Петя, чтобы время совместной переправы оказалось минимальным? (Время перехода в лодку и течение реки не учитывать.)

2.14.2. (*«Надежда энергетики», 2022, 10.1*) Энергетические затраты Сиропчика во время еды пропорциональны кубу объема съедаемой порции. Что выгоднее для экономии энергетического запаса: съесть бидончик мороженого как одну порцию или разделить его на две? В какое максимальное количество раз (и в какую сторону) изменятся затраты при разделении на две порции?
vbox

2.14.3. (*САММАТ, 2022, 10.7*) Найти минимальное значение выражения

$$x^4 - 3x^2 + 4 - \frac{5}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

2.14.4. (*Всесиб., 2020, 10.3*) Найти минимальное и максимальное значения выражения

$$3x^2y - 2xy^2,$$

где x, y принимают произвольные значения из интервала $[0,1]$.

2.14.5. (*«Надежда энергетики», 2016, 10.3*) Шесть чисел записаны в ряд. Известно, что среди них есть единица и любые три соседних числа имеют одинаковое среднее арифметическое. Найдите максимальное значение среднего геометрического любых трех соседних в этом ряду чисел, если среднее арифметическое всех шести чисел равно A.

2.15 Функциональные вычисления и уравнения

Дополнительные задачи — в листках

- Функциональные вычисления
- Функциональные уравнения и неравенства

2.15.1. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.1*) Пусть $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Решите уравнение

$$f\left(f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)\right) = 0.$$

2.15.2. (*Всеросс., 2021, МЭ, 10.2*) Сколько корней имеет уравнение

$$\overbrace{f(f(\ldots f}^{10\ \text{раз}\ f}(x)\ldots))+\frac{1}{2}=0,$$

где $f(x)=|x|-1$?

2.15.3. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.3*) Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет ровно один корень. Положим $T(x)=x^2+px+q$. Известно, что уравнение $T(T(T(x)))=0$ имеет ровно три различных корня. Найдите их.

2.15.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 10.4*) Функция f такова, что для любого действительного числа x выполнено равенство

$$9f(f(x))=3f(x)+8x.$$

Решите уравнение $f(x)=0$.

2.15.5. (*Всесиб., 2016, 10.4*) Найти все функции $f(x)$, определённые на всей числовой прямой, удовлетворяющие уравнению $f(y-f(x))=1-x-y$ для произвольных x и y.

2.15.6. (*«Бельчонок», 2021, 10.4*) Функция $f(x)=\frac{3^x(2x-1)}{x(x+1)}$ определена при положительных x. Найдите сумму

$$A=f(1)+f(2)+\ldots+f(100).$$

2.15.7. (*САММАТ, 2022, 10.8*) Функция $f(x)$ определена для всех вещественных x и удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{5f(x)}-\sqrt{5f(x)-f(5+x)}\geqslant 5$$

при всех вещественных x. Верно ли, что $f(x)\geqslant 25$ для каждого вещественного x? Ответ объясните.

2.15.8. (*«Бельчонок», 2021, 10.5*) Дана функция $f(x)=\frac{1}{4^x+2}$. Найдите сумму

$$A=f(0)+f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+\ldots+f\left(\frac{99}{100}\right)+f(1).$$

2.15.9. (*«Надежда энергетики», 2022, 10.5*) Будем говорить, что функции $f(t)$ и $F(x,y)$ образуют «пару рассеянных собеседников», если для всех допустимых чисел x,y выполняется условие

$$f(F(x,y))=F(f(x),f(y)).$$

1. Приведите пример пары рассеянных собеседников.
2. Выясните, существует ли функция $F(x,y)=Ax+By+C$, образующая «пары рассеянных собеседников» со всеми функциями вида $f(x)=cx+d$.

2.15.10. (*«Ломоносов», 2020, 10.7*) Функция f, заданная на множестве целых чисел, удовлетворяет условиям:

1. $f(1) + 1 > 0$;
2. $f(x + y) - xf(y) - yf(x) = f(x)f(y) - x - y + xy$ при любых $x, y \in \mathbb{Z}$;
3. $2f(x) = f(x + 1) - x + 1$ при любых $x \in \mathbb{Z}$.

Найдите $f(10)$.

2.15.11. (*«Физтех», 2022, 10.7*) Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

2.15.12. (*ОММО, 2023.9*) Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$2f(xy + 3) = f(x)f(y) - f(x) - 2y + a.$$

2.15.13. (*ОММО, 2022.9*) Функция F определена на множестве троек целых чисел и принимает действительные значения. Известно, что для любых четырёх целых чисел a, b, c и n выполняются равенства $F(na, nb, nc) = n \cdot F(a, b, c)$, $F(a+n, b+n, c+n) = F(a, b, c)+n$, $F(a, b, c) = F(c, b, a)$. Найдите $F(58, 59, 60)$.

Глава 3

Алгебраические уравнения и неравенства

3.1 Квадратные уравнения

Дополнительные задачи — в листке Квадратные уравнения.

3.1.1. (*Всеросс., 2020, МЭ, 10.1*) Корни уравнения $x^2+px+q=0$ — целые числа, отличные от нуля. Докажите, что число $p^2+(q-1)^2$ составное.

3.1.2. (*Всесиб., 2019, 10.1*) Прямые ℓ и m пересекают ось OX в различных точках, симметричных друг другу относительно начала координат, и параболу $y=x^2$ в точках (a,a^2), (b,b^2) и (c,c^2), (d,d^2) соответственно. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$.

3.1.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 10.1*) Даны три положительных числа, не обязательно различных. Известно, что если из произведения любых двух из них вычесть третье, то получится одно и то же число a. Докажите, что $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

3.1.4. (*«Надежда энергетики», 2021, 10.2*) Выясните, может ли уравнение

$$x^2+px+q=0$$

иметь целые корни, если p и q целые нечетные.

3.1.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 10.2*) а) Дано квадратное уравнение $x^2-9x-10=0$. Пусть a — его наименьший корень. Найдите a^4-909a.

б) Для квадратного уравнения $x^2-9x+10=0$, у которого b — наименьший корень, найдите b^4-549b.

3.1.6. (*«Шаг в будущее», 2017, 10.3*) Найти сумму квадратов корней уравнения:

$$\left(x^2+4x\right)^2-2016\left(x^2+4x\right)+2017=0.$$

3.1.7. (*Всеросс., 2021, МЭ, 10.5*) Целые числа a и b таковы, что у квадратных трёхчленов x^2+ax+b и $x^2+bx+1100$ есть общий корень, являющийся простым числом. Найдите a. Укажите все возможные варианты.

3.1.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 10.5*) Известно, что

$$5a + 3b + 2c = 0.$$

Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня.

3.2 Уравнения высших порядков

Дополнительные задачи — в листке Уравнения высших порядков.

3.2.1. (*«Бельчонок», 2021, 10.1*) Пусть a, b, c, d положительны, $a < c$, $d < b$. Докажите, что уравнения $x^6 + ax + b = 0$ и $x^6 + cx + d = 0$ не имеют общих корней.

3.2.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 10.1*) Решите уравнение

$$\left(x^4 + x + 1\right)\left(\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{0{,}01}\right) = 2\left(\sqrt[3]{5{,}12} + \sqrt[3]{0{,}03375}\right).$$

3.2.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 10.2*) Решите уравнение:

$$2021x^3 + 2022x^2 + 2022x + 674 = 0.$$

3.2.4. (*САММАТ, 2022, 10.3*) Решить уравнение

$$x^8 - 8\sqrt{3}x^6 + 66x^4 - 72\sqrt{3}x^2 + 81 = 0.$$

3.2.5. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.5*) Решите уравнение

$$\left(x^3 + x^2 + x + 1\right)\left(x^{11} + x^{10} + \ldots + x + 1\right) = \left(x^7 + x^6 + \ldots + x + 1\right)^2.$$

3.2.6. (*«Надежда энергетики», 2023, 10.4*) Может ли уравнение

$$x^{2022} - 2x^{2021} - 3x^{2020} - \ldots - 2022x - 2023 = 0$$

иметь два положительных корня?

3.3 Теорема Виета для кубического уравнения

3.3.1. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.1, 11.1*) Числа u, v, w являются корнями уравнения

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Найдите $u^9 + v^9 + w^9$.

3.3.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 10.3, 11.3*) Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 9.$$

При каких значениях a, b, c корнями уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ являются числа $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$ и $x_3 + x_1$?

3.3.3. (*«Росатом», 2021, 10.4*) Известно, что квадрат любого из корней кубического уравнения

$$x^3 - x + 2 = 0$$

является корнем другого, также кубического уравнения. Найдите это уравнение.

3.3.4. (*Открытая олимпиада, 2015, 10.5*) Числа a, b и c — различные корни кубического многочлена $x^3 + ax^2 + bx - c$. Найдите их.

3.3.5. (*«Бельчонок», 2020, 10.5*) Пусть a, b, c — целые числа, такие что многочлен

$$x^3 + ax^2 + bx + c$$

имеет три различных попарно взаимно простых натуральных корня и многочлен $ax^2 + bx + c$ имеет натуральный корень. Докажите, что число $|a|$ — составное.

3.3.6. (*«Бельчонок», 2020, 10.5*) Многочлен $x^3 + ax^2 + 17x + 3b$, где a и b — целые, имеет три целых корня. Докажите, что они различны.

3.3.7. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 10.6*) Найти все значения a, при которых корни x_1, x_2, x_3 многочлена $x^3 + 4x^2 + ax + a$ удовлетворяют равенству $(x_1 + 2)^3 + (x_2 + 2)^3 + (x_3 + 2)^3 = 0$.

3.4 Системы алгебраических уравнений

Дополнительные задачи — в листке Системы алгебраических уравнений.

3.4.1. (*«Бельчонок», 2023, 10.1*) Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -1, \\ x^3 + y^3 = 4. \end{cases} \qquad (x, y \neq 0).$$

3.4.2. (*«Бельчонок», 2023, 10.1*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ 2y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases} \qquad (x, y \neq 0).$$

3.4.3. (*Всесиб., 2017, 10.1*) Решить в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y = 2x, \\ y^3 + x = 2y. \end{cases}$$

3.4.4. (*«Шаг в будущее», 2021, 10.1*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 - 3x = 4x^3y, \\ y^2 + 4x^2y^3 = 4x. \end{cases}$$

3.4.5. (*«Шаг в будущее», 2021, 10.1*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 2 = 2\sqrt{y^3z^5}, \\ 1 - y = 2xz\sqrt{1 - 4y^3z^5} + \sqrt{7 - y}. \end{cases}$$

3.4.6. (*«Бельчонок», 2018, 10.2*) Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x^3 + y^3 = 16. \end{cases}$$

3.4.7. (*САММАТ, 2023, 10.2*) Решите систему

$$\begin{cases} x_1\left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}\right) = 1, \\ x_2\left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}\right) = 3, \\ x_3\left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}\right) = 5, \\ \ldots \\ x_{2023}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}\right) = 4045. \end{cases}$$

3.4.8. (*«Физтех», 2022, 10.2*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = 17, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = -10. \end{cases}$$

3.4.9. (*«Физтех», 2022, 10.3*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

3.4.10. (*«Физтех», 2021, 10.4*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2, \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5. \end{cases}$$

3.4.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 10.4*) Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-997}+\sqrt{y-932}+\sqrt{z-796}=100, \\ \sqrt{x-1237}+\sqrt{y-1121}+\sqrt{3045-z}=90, \\ \sqrt{x-1621}+\sqrt{2805-y}+\sqrt{z-997}=80, \\ \sqrt{2102-x}+\sqrt{y-1237}+\sqrt{z-932}=70. \end{cases}$$

3.4.12. (*ОММО, 2022.5*) Решите в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} a+c=4; \\ ac+b+d=6; \\ ad+bc=5; \\ bd=2. \end{cases}$$

3.4.13. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 10.6*) Про вещественные числа m, n, x, y известно следующее:

$$\begin{cases} mx+ny=4, \\ mx^2+ny^2=2, \\ mx^3+ny^3=6, \\ mx^4+ny^4=38. \end{cases}$$

Чему равно $((m+n)(x+y)+5xy)\,(m+n+x+y)$?

3.5 Иррациональные уравнения

Дополнительные задачи — в листке Иррациональные уравнения и системы.

3.5.1. (*САММАТ, 2021, 10.7*) Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[5]{x^3\cdot\sqrt[5]{x^3\cdot\sqrt[5]{x^3\ldots}}}+x^2=2021.$$

3.5.2. (*САММАТ, 2021, 10.8*) Решить уравнение

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-2}-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-3}-2}=\sqrt{x-2}.$$

3.5.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 10.1*) Найдите сумму всех корней уравнения:

$$\sqrt{2x^2-2024x+1023131}+\sqrt{3x^2-2025x+1023132}+\sqrt{4x^2-2026x+1023133}=$$
$$=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x^2-2x+2}+\sqrt{3x^2-3x+3}.$$

3.5.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 10.2*) Решите уравнение

$$4x=2+\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}.$$

3.5.5. (*«Физтех», 2021, 10.2*) Решите уравнение $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$.

3.5.6. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.3*) Решите уравнение: $\sqrt[4]{514-x}+\sqrt[4]{192+x}=8$.

3.5.7. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.3*) Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2+6x+4}-\sqrt{2x^2+3x+5}=\sqrt{3x^2+4x+1}-\sqrt{2x^2+5x+8}.$$

3.5.8. (*«Физтех», 2023, 10.4*) Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

3.5.9. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.4*) Решите уравнение

$$\sqrt[4]{79+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}}-\sqrt[4]{85-\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}}=0.$$

3.5.10. (*«Росатом», 2023, 10.4*) Решить уравнение

$$\left|2x-\sqrt{1-4x^2}\right|=4\sqrt{2}x\sqrt{1-4x^2}.$$

3.5.11. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.4*) Решите уравнение

$$\sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{71}{16}}-\sqrt{x+\sqrt{x}-\frac{87}{16}}=\frac{1}{2}.$$

3.5.12. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.4*) Решить уравнение:

$$\sqrt{x-15}+\sqrt{x+80}+2\sqrt{x-15}\sqrt{x+80}=315-2x.$$

3.6 Рациональные неравенства

3.6.1. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.2*) Решить неравенство:

$$\frac{15(x+1)^4}{x(x^2+1)} \geqslant 128.$$

3.7 Иррациональные неравенства

Дополнительные задачи — в листке Иррациональные неравенства.

3.7.1. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.3*) Решить неравенство:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{3-x}\right)^2\left(x^2-4\sqrt{x^2-6x+9}\right)}{x62+2\sqrt{x^2-8x+16}} \geqslant 0.$$

3.7.2. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.4*) Решите неравенство

$$x^2+2x+2x\sqrt{3-x^2} > 3-6\sqrt{3-x^2}.$$

3.8 Равносильное упрощение

Дополнительные задачи — в листке Равносильное упрощение.

3.8.1. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.3*) Решите неравенство

$$\frac{(|x+1|-|x-1|)\left(x^3-7x^2+36\right)}{x^8+2x^6-6x^4+2x^2+1} \geqslant 0.$$

3.8.2. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.4*) Решите неравенство

$$\frac{(|5-x^2|-4)\left(9x^2+\sqrt{9x^2-1}-1\right)}{(|x-1|-|7+x|)\sqrt{x^2-2x+1}} \geqslant 0.$$

3.9 Минимаксные задачи в алгебре

Дополнительные задачи — в листке Минимаксные задачи в алгебре.

3.9.1. (*Всесиб., 2018, 10.1*) Найти все решения уравнения: $\sqrt{1-x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{3x+2y-7}$.

3.9.2. (*«Физтех», 2023, 10.1*) Решите неравенство

$$\left|x^3+4\right|+\left|x^2-1\right| \leqslant \left|x^3-x^2+5\right|.$$

3.9.3. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.2*) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y}+|y+8|=1, \\ \sqrt{x^2+y-1}+|x+8|=5. \end{cases}$$

3.9.4. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.2*) Решите неравенство

$$\sqrt{1-x^2}-\sqrt[4]{1-y^2}-\sqrt{\sqrt{1-y^2}-x^2}\geqslant 1.$$

3.9.5. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.2*) Найдите все целочисленные решения неравенства

$$x^2y^2+y^2z^2+x^2+z^2-38(xy+z)-40(yz+x)+4xyz+761\leqslant 0.$$

3.9.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 10.2*) Найдите все такие пары действительных чисел x и y, для которых

$$25^{x^4-y^2}+25^{y^4-x^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3.9.7. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.3*) Решите уравнение

$$\sqrt{(x+1)^2}+2\sqrt{x^2+4x+4}=|10+x|-|5-2x|.$$

3.9.8. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.3*) Решите неравенство

$$\frac{4x^4+1}{4\sqrt{2}}\leqslant x\sqrt{x^4-\frac{1}{4}}.$$

3.9.9. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 10.4*) Решите уравнение

$$x^2+y^2+1=xy+x+y.$$

3.9.10. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2021, 10–11.4*) Решите систему

$$\begin{cases} 2x-3y+\dfrac{1}{xy}=6, \\ 3z-6x+\dfrac{1}{xz}=2, \\ 6y-2z+\dfrac{1}{yz}=3. \end{cases}$$

3.9.11. (*ОММО, 2021.5*) Решите уравнение:

$$4\left(x^4+3x^2+3\right)\left(y^4-7y^2+14\right)=21.$$

3.9.12. (*ОММО, 2023.5*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{10}+x_2^{10}+\ldots+x_{92}^{10}=3^{10} \\ x_1^{33}+x_2^{33}+\ldots+x_{92}^{30}=3^{33}. \end{cases}$$

3.10 Функции в уравнениях и неравенствах

Дополнительные задачи — в листке Функции в уравнениях и неравенствах. 1.

3.10.1. (*«Росатом», 2016, 10.1*) Для функции $f(x)=x^2+2x-3$ решить уравнение

$$f(2f(x))=117.$$

3.10.2. (*«Надежда энергетики», 2018, 10.1*) Имеется три электрогенератора, их мощности x_1, x_2, x_3 не меньше 1 МВт. При анализе энергосистемы с такими генераторами выяснилось, что для осуществления некоторого процесса необходимо условие

$$2(x_1+x_2+x_3)+4x_1x_2x_3=3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+1.$$

Какова при его выполнении максимальная совместная мощность всех трех генераторов?

3.10.3. (*Открытая олимпиада, 2016, 10.2*) Решите уравнение $f^{-1}(g(x))=h(x)$, где $f^{-1}(x)$ — обратная к $f(x)$, если известно, что $f(x)=x^3+2x^2+3x+1$, $g(x)=x^4-x^3+4x^2+8x+8$, $h(x)=x+1$.

3.10.4. (*САММАТ, 2021, 10.5*) Вещественные числа α и β таковы, что $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-17=0$ и $\beta^3-3\beta^2+5\beta+11=0$. Найдите сумму чисел α и β.

3.11 Плоские множества

Дополнительные задачи — в листке Плоские множества.

3.11.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 10.1*) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\left(x^2+3xy+2y^2\right)\left(x^2y^2-1\right)=0.$$

3.11.2. (*«Надежда энергетики», 2021, 10.1*) На координатной плоскости каждая из N прямых l_j параллельна прямой $y=x+2021$ и пересекает кривую $y=1/x$ ровно в двух точках $(x_1(j),y_1(j))$ и $(x_2(j),y_2(j))$ $(j=1,2,\ldots,N)$. Рассмотрим два произведения

$$P_1=y_1(1)y_1(2)\cdots y_1(N) \quad \text{и} \quad P_2=y_2(1)y_2(2)\cdots y_2(N).$$

Решите уравнение $\operatorname{tg} z = P_1 P_2$ и выясните, как это решение зависит от N.

3.11.3. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.3*) Изобразите на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством, и вычислите её площадь: $x^2 + y^2 + 4(x - |y|) \leqslant 0$.

3.11.4. (*«Физтех», 2023, 10.5*) На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

3.11.5. (*«Ломоносов», 2023, 10.5*) Найдите площадь плоской фигуры, границы которой описываются уравнением

$$\Big||x| + \big||y| - 3\big| - 3\Big| = 1.$$

3.11.6. (*«Ломоносов», 2022, 10.6*) Найдите координаты всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от всех точек пересечения парабол, заданных в декартовой системе координат на плоскости уравнениями $y = 2x^2 - 1$ и $x = 4y^2 - 2$.

3.12 Необычные уравнения и системы

Дополнительные задачи — в листке Необычные уравнения и системы.

3.12.1. (*«Надежда энергетики», 2017, 10.1*) Финансовый аналитик энергетической компании после сложных расчетов с применением математических методов вычислил, что прибыль компания за 2016 год, выраженная в миллионах рублей, удовлетворяет уравнению

$$12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 35.$$

Должен ли совет директоров компании поверить этому?

3.12.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 10.7*) Решите уравнение

$$x\sqrt{1 + x} + \sqrt{3 - x} = 2\sqrt{1 + x^2}.$$

Глава 4

Текстовые задачи

4.1 Движение

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.1.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 10.5*) Хулиган Вася любит бегать по эскалатору в метро, причём вниз он бежит в два раза быстрее, чем вверх. Если эскалатор не работает, то, чтобы сбегать вверх и вниз, Васе потребуется 6 минут. Если эскалатор едет вниз, то, чтобы сбегать вверх и вниз, Васе потребуется 13,5 минут. Сколько секунд потребуется Васе, чтобы сбегать вверх и вниз по эскалатору, который будет ехать вверх? (Эскалатор всегда движется с постоянной скоростью.)

4.1.2. (*Всесиб., 2015, 10.1*) Из пунктов A и B не одновременно выехали друг навстречу другу автомобилист и велосипедист. Встретившись в точке C, они тотчас развернулись и поехали обратно с теми же скоростями. Доехав до своих пунктов A и B, они снова развернулись, поехали и встретились второй раз в точке D. Здесь они вновь развернулись и так далее. В какой точке отрезка AB произойдёт их 2015-ая встреча?

4.1.3. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.1*) Автобус с 6 часов утра с постоянной скоростью курсирует между пунктами A и B, причем, доехав до пункта A или B он сразу же поворачивает обратно. Петя на мопеде и Вася на велосипеде одновременно вместе с автобусом в 6 часов утра отправились из пункта A в пункт B, двигаясь при этом с постоянными скоростями. Известно, что автобус во время второго передвижения из пункта A в пункт B в 13 часов 30 минут поравнялся с Васей, и прибыл в пункт B в 15 часов одновременно с Петей. Определите отношение скоростей движения Васи и Пети. Укажите, в котором часу автобус на пути своего первого следования из пункта B в пункт A поравнялся с Васей.

4.1.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 10.1*) Мотоциклист выехал из пункта A с начальной скоростью 90 км/ч, равномерно ее увеличивая (то есть за одинаковые промежутки времени его скорость увеличивается на одинаковую величину). Через три часа мотоциклист прибыл в пункт B, по дороге проехав через C. После этого он развернулся и, по-прежнему равномерно увеличивая скорость, поехал обратно. Еще через два часа он проехал мимо пункта C со скоростью 110 км/ч и продолжил движение в A. Найдите расстояние между пунктами A и C.

4.1.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 10.2*) Из пункта A в пункт B по одной дороге с постоянными скоростями выехали велосипедист и мотоциклист. Один из них выехал в 13:00, а другой на час позже, при этом в пункт B они прибыли одновременно, хотя один из них сделал остановку в пути длительностью 2 часа. В котором часу они прибыли в B, если скорость мотоциклиста в два раза больше скорости велосипедиста?

4.1.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.4*) По дороге из A в B ездят только легковые машины, грузовики и автобусы. Легковые машины выезжают из A в B каждые 2 минуты со скоростью 120 км/ч, грузовики каждые 3 минуты со скоростью 80 км/ч, а автобусы каждые 6 минут со скоростью 60 км/ч. Скорости всех машин постоянны, а расстояние между A и B достаточно большое. Мотоцикл едет из B в A со скоростью 60 км/ч. Какую долю среди встречного транспорта составляют грузовики?

4.1.7. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.4*) По дороге из A в B ездят только легковые машины, грузовики и автобусы. Легковые машины выезжают из A в B каждые 2 минуты со скоростью 120 км/ч, грузовики каждые 3 минуты со скоростью 80 км/ч, а автобусы каждые 6 минут со скоростью 60 км/ч. Скорости всех машин постоянны, а расстояние между A и B достаточно большое. Пассажир едет из A в B на автобусе. Какую долю среди обгоняющих его транспортных средств составляют грузовики?

4.1.8. (*«Ломоносов», 2023, 10.4*) Пловец решил переплыть реку. Сначала он взял направление перпендикулярно течению — и течение снесло его на 12 метров. Оттуда он решил вернуться туда, откуда начал — он взял направление на точку, из которой началось плавание, и теперь течение снесло его на 20 метров от желаемой точки. Найдите ширину реки.

4.1.9. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.4*) Две кольцевые трассы α и β одинакового радиуса касаются друг друга. По трассе α по часовой стрелке едет автомобиль A, по трассе β против часовой стрелки едет автомобиль B. В момент старта автомобили A и B находятся на одной прямой с центром трассы α, причём эта прямая касается трассы β. После старта автомобили начинают приближаться к точке касания трасс. Каждый автомобиль проезжает полный круг по своей трассе за один час (и никогда не переезжает на другую трассу). Сколько времени из этого часа расстояние между автомобилями будет не меньше диаметра каждой трассы?

4.1.10. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.4*) Велосипедист и мотоциклист едут с постоянными скоростями по имеющей форму окружности кольцевой трассе. Если они едут навстречу друг другу, то регулярно встречаются, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) встреч равно 4022 м. Если они едут в одном направлении, то мотоциклист регулярно (хотя и реже) обгоняет велосипедиста, причем расстояние по прямой между точками последовательных (по времени) обгонов также равно 4022 м. Если велосипедист стоит и отдыхает, то мотоциклист проезжает мимо него каждые 32 минуты. Если же, наоборот, отдыхает мотоциклист, то велосипедист проезжает мимо него реже, чем каждые 55 минут, но чаще, чем каждые 64 минуты. Найдите радиус окружности, по которой проходит трасса.

4.1.11. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.5*) Из пункта А в пункт В в 9-00 утра выезжает автобус. В этот же момент из В в А выезжают грузовик и трактор, причём скорость грузовика в два раза больше скорости трактора. Автобус прибывает в В тот же день в 14 часов 50 минут, при этом он встречает грузовик не ранее 11 часов 30 минут утра. Определите время прибытия трактора в пункт А, если между моментами встреч автобуса с грузовиком и автобуса с трактором проходит не менее одного часа.

4.1.12. (*«Шаг в будущее», 2021, 10.6*) Спутник связи движется по круговой орбите вокруг Земли (имеет форму шара) на высоте H, равной радиусу Земли $R = 6372$ км, с периодом обращения $T = 4$ ч и постоянной угловой скоростью $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Для того, чтобы в центре управления полетами (ЦУП) можно было получать сигнал от спутника (иметь окно для связи), он должен находиться выше плоскости горизонта ЦУПа. Определите количество окон для связи ЦУПа со спутником в течение суток и общую продолжительность этих окон, если траектория полета спутника проходит ровно над ЦУПом.

4.2 Работа

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.2.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 10.1*) В цеху работало несколько станков фирмы «Левша». После того как 5 станков были заменены на 5 станков фирмы «Инноватика» общая производительность всех станков цеха выросла на 25%. Если бы изначально 40% станков фирмы «Левша» заменили на такое же количество станков фирмы «Инноватика», то общая производительность выросла бы в 1,5 раза. Найдите количество станков в цеху, если станки одной и той же фирмы имеют одинаковую производительность.

4.2.2. (*«Бельчонок», 2022, 10.1*) Пять членов жюри олимпиады проверяли работы. Первый, второй и четвертый члены жюри вместе могут проверить работы за 20 часов; второй, третьей и пятый вместе — за 15 часов. Если в проверке участвуют все, кроме второго члена жюри, то на проверку работ требуется 10 часов. Во сколько раз быстрее будет выполнена проверка работ всеми членами жюри по сравнению с проверкой работ только вторым членом жюри?

4.2.3. (*«Бельчонок», 2022, 10.1*) Шесть членов жюри олимпиады проверяли работы. Все шестеро, исключая пятого, в состоянии проверить работы за 6 дней. Если бы они проверяли вчетвером без первого и третьего, то все работы были бы проверены за 10 дней. Поскольку второй, четвертый и шестой были заняты, работы были проверены оставшимися за 12 дней. Какой процент всех работ при этом был проверен первым и третьим членами жюри за 4 дня?

4.2.4. (*«Бельчонок», 2022, 10.1*) В бассейн ведут две одинаковые трубы. Одна труба заполняет бассейн за 3 часа. Сначала включили обе трубы, но через час одна из труб засорилась, и через неё вода стала поступать вдвое медленнее. Через какое время после этого бассейн заполнится?

4.2.5. (*ОММО, 2022.3*) Бригада рабочих трудилась на заливке катка на большом и малом полях, причём площадь большого поля в 2 раза больше площади малого поля. В той части бригады, которая работала на большом поле, было на 4 рабочих больше, чем в той части, которая работала на малом поле. Когда заливка большого катка закончилась, часть бригады, которая была на малом поле, ещё работала. Какое наибольшее число рабочих могло быть в порядке?

4.2.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 10.3*) Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 8 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через полтора часа после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны.

4.2.7. (*«Надежда энергетики», 2019, 10.4*) В кладовой Пончика и в кладовой Сиропчика запасено суммарно 100 кг варенья. На поедание своих запасов у каждого коротышки ушло одинаковое время несмотря на то, что они обладают разной прожорливостью. «Если бы мой запас был равен твоему, то я бы съел его за 45 дней» — заявил товарищу Пончик. «А если бы мой запас был равен твоему, я бы съел его всего за 20 дней» — ответил Сиропчик. Какое количество варенья и с какой прожорливостью съел каждый из коротышек?

4.3 Части, доли, проценты

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.3.1. (*«Надежда энергетики», 2019, 10.1*) На факультете ядерного дирижаблестроения подсчитали, что в процентном отношении мальчиков на первом курсе больше, чем мальчиков на всем факультете. Кого (в процентном отношении) больше — первокурсников среди всех мальчиков факультета или всех студентов первого курса среди всех студентов факультета?

4.3.2. (*Олимпиада КФУ, 2023, 10.1*) Классная руководительница подсчитала долю девочек в своем классе. Округлив до целого числа процентов, она получила результат 51%. Докажите, что в классе нечетное число учеников. Каково наименьшее возможное число учеников в классе?

4.3.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 10.2*) В тридесятом государстве 29 февраля одного стародавнего года на ярмарке купец продавал сапоги-самоплясы за 2000 алтын. По правилам торговли, цена на товар корректируется каждое утро перед открытием. Цену можно увеличить на 10%, можно уменьшить на 1% или на 12% относительно цены предыдущего дня, а можно вообще не менять. При этом цена должна быть целым числом алтын, округлять ее нельзя. 1 апреля того же года боярин из торговой инспекции обнаружил, что у того же купца те же сапоги-самоплясы стоят 2017 алтын, и составил акт о нарушении правил торговли. Купец в ответ на это заявил, что никаких нарушений он не допускал. Кто из них прав?

4.3.4. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.6*) Цена на товар повышалась в последний день каждого месяца на 5, $4\frac{1}{6}$, $2\frac{6}{7}$ или $6\frac{2}{3}$ процентов. Сколько прошло месяцев к тому моменту, когда первоначальная цена товара увеличилась ровно на 50%?

4.4 Смеси и концентрации

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.4.1. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.1*) Для химических опытов взяли две одинаковые пробирки, в которых налито жидкое вещество по 200 мл в каждой. Из первой пробирки вылили 1/4 содержимого и добавили такое же количество воды, затем процедуру повторили еще 3 раза, каждый раз выливая четверть содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. Аналогичную процедуру провели дважды для второй пробирки, выливая каждый раз некоторое количество содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. В итоге концентрация полученных смесей в первой и второй пробирках стало относиться друг к другу как 9/16. Определите, какое количество смеси отливали каждый раз из второй пробирки.

4.4.2. (*ОММО, 2023.3*) На заводе имеются в достаточном количестве три сплава титана, алюминия и молибдена. Все сплавы с примесями. Процентное содержание компонентов в этих сплавах приведено в таблице.

	1	2	3
Молибден	8%	3%	8%
Титан	36%	21%	6%
Алюминий	55%	76%	15%

Из этих сплавов необходимо приготовить новый сплав, в котором алюминия должно быть не больше 38%, а молибдена — не меньше 5%. Какое наибольшее и какое наименьшее содержание титана (в процентах) может быть в этом сплаве?

4.5 Часы, время, календарь

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

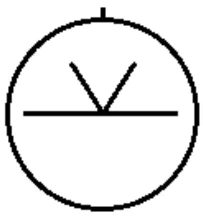
4.5.1. (*«Росатом», 2019, 10.1*) Привокзальные часы имеют три электронных циферблата, которые показывают текущее время в часах, минутах и секундах соответственно. Очередные сутки начинаются, когда на табло часов светятся три нуля, а заканчиваются в 23 часа 59 минут 59 секунд. Сколько раз в течении суток сумма числа часов и минут на них равняется числу секунд?

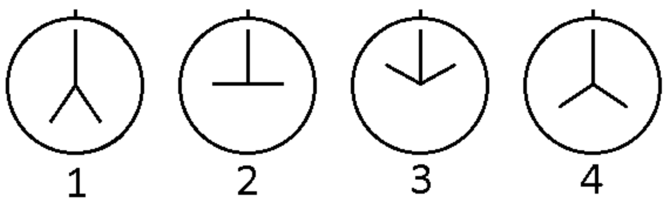
4.5.2. (*Олимпиада КФУ, 2023, 10.2*) Назовем год интересным, если человеку в этом году исполняется столько лет, какова сумма цифр года его рождения. Некий год оказался интересным для Ивана, родившегося в 20 веке и для Вовочки, который родился в 21 веке. Какова разница их возрастов?

Примечание. Для удобства считаем, что они родились в один день, все вычисления производятся в целых годах.

4.5.3. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.4*) После полудня прошло целое число минут, и в этот момент угол между часовой и минутной стрелками составил ровно 2 градуса. Какое время показывают часы, если это событие произошло впервые после полудня?

4.5.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 10.6*) У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).





Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*.

Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).

4.6 Разные текстовые задачи

Дополнительные задачи — в листке Текстовые задачи.

4.6.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 10.1*) Саша уже неделю смотрит все серии интересного сериала подряд. Вчера Саша посмотрел 9 серий, а сегодня всего 6. Оказалось, что сумма номеров всех серий, просмотренных вчера, равна сумме номеров всех серий, просмотренных сегодня. Какой номер имеет последняя просмотренная Сашей серия? (Серии нумеруются последовательными натуральными числами, начиная с 1.)

4.6.2. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 10.2*) В магазине продаются 15 видов шоколада. За неделю Андрей попробовал 6 видов, Борис — 11, а Денис — 13. Оказалось, что ни один вид шоколада не продегустировали все трое. Сколько видов шоколада попробовали и Андрей, и Борис?

4.6.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 10.1*) Пять различных по весу гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Найдите веса этих пяти гирь.

4.6.4. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.1*) В кружке «Неумелые руки» методом тяп-ляп изготовили несбалансированные рычажные весы с плечами разной длины и чашами с разным собственным весом. В результате четырех взвешиваний на этих весах были получены следующие «равновесия»:

[слева 3 кг = справа дыня];	[слева дыня = справа 5,5 кг];
[слева 5 кг = справа арбуз];	[слева арбуз = справа 10 кг].

Каков истинный вес (масса) дыни и арбуза?

4.6.5. (*«Ломоносов», 2020, 10.2*) Деревянный параллелепипед, все стороны которого выражаются целым числом сантиметров, покрасили красной краской, а после этого распилили параллельно граням на кубики со стороной 1 см. Оказалось, что у трети получившихся кубиков хотя бы одна грань красная, а у оставшихся двух третей все грани не окрашены. Найдите длину параллелепипеда, если она на 2 см больше ширины и на 4 см больше высоты.

4.6.6. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2020, 10.4*) Сумма длин двух ребер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите диагональ этого параллелепипеда, если известно, что она на 1 длиннее третьего ребра.

4.6.7. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.5*) В городе работают три банка. Известно, что вклад, размещенный в одном из них (неизвестно в каком), через год удвоится, в другом (тоже неизвестно, в каком) — утроится, а один из банков (неизвестно, какой из трех) разорится, и вкладчик потеряет свои деньги. У Ивана Ивановича есть 600000 рублей. Он хочет рискнуть и разместить свои деньги в банках на год. Как ему разложить деньги по банкам, чтобы при самом плохом ходе событий получить максимально возможный доход (некоторую сумму он может оставить и дома)? Какую сумму в этом случае он получит на руки через год?

4.6.8. (*«Надежда энергетики», 2016, 10.5*) Имеется 4 числа, не все из которых одинаковы. Если взять любые два из них, то отношение суммы этих двух чисел к сумме двух других чисел будет равно одному и тому же значению k. Найдите значение k. Укажите хотя бы одну четверку чисел, удовлетворяющих условию. Опишите все возможные четверки таких чисел и выясните, сколько их.

4.6.9. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 10.8*) Пусть все фирмы страны имеют определенный ранг, который является натуральным числом. При слиянии двух фирм рангов m и n получается новая фирма ранга $(m+n)$. Прибыль полученной фирмы будет на $m \cdot n$ больше суммы прибылей фирм ее образующих. Прибыль фирмы первого ранга равна 1 д. е. Существует ли ранг, при котором прибыль фирмы будет равна 2016 д. е.?

Глава 5

Тригонометрия

5.1 Тригонометрические преобразования и вычисления

Дополнительные задачи — в листке Тригонометрические преобразования и вычисления.

5.1.1. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.1*) Вычислите $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$, если $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -3$.

5.1.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.1*) Пусть α, β, γ — такие острые углы, что $\sin\alpha = \ ctg\beta$, $\sin\beta = \operatorname{ctg}\gamma$, $\sin\gamma = \operatorname{ctg}\alpha$. Вычислите косинусы этих углов.

5.1.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.1*) Пусть α, β, γ — такие острые углы, что $\cos\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta = \operatorname{tg}\gamma$, $\cos\gamma = \operatorname{tg}\alpha$ Вычислите синусы этих углов.

5.1.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 10.1*) В некотором треугольнике сумма тангенсов углов оказалась равна 2016. Оцените (хотя бы с точностью до 1 градуса) величину наибольшего из его углов.

5.1.5. (*САММАТ, 2021, 10.5*) Вычислить $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$, если α, β и γ — углы треугольника.

5.1.6. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.2*) Найдите все значения x, при которых величины $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$ являются целыми числами.

5.1.7. (*Открытая олимпиада, 2022, 10.2*) Известно, что $\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$. Найдите $\cos x \cos 3x$. Если возможных ответов несколько, запишите их через точку с запятой.

5.1.8. (*Открытая олимпиада, 2021, 10.2*) Сумма синусов пяти углов из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ равна 3. Какие наибольшее и наименьшее целые значения может принимать сумма их косинусов?

5.1.9. (*«Росатом», 2015, 10.2*) Вычислить значение $\cos^2 2x$ для всех допустимых значений x, если

$$\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0.$$

5.1.10. (*«Росатом», 2020, 10.2*) Каждое из четырех чисел $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; 2 является результатом одной из четырех арифметических операций $\sin x + \sin y$, $\sin x - \sin y$, $\sin x \cdot \sin y$, $\sin x : \sin y$ над числами $\sin x$, $\sin y$ для некоторых x и y. Найти все допустимые для этого пары $(x; y)$.

5.1.11. (*Открытая олимпиада, 2019, 10.4*) Сколько отрицательных чисел среди чисел вида $\operatorname{tg}((15^n)^\circ)$, где n — натуральное число от 1 до 2019?

5.1.12. (*Открытая олимпиада, 2015, 10.4*) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}3\alpha$ целые. Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$.

5.1.13. (*ОММО, 2021.6*) Вычислите

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{k\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{43}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{2019\pi}{43}\cdot\operatorname{tg}\frac{2020\pi}{43}.$$

5.2 Тригонометрические уравнения

Дополнительные задачи — в листке Преобразования тригонометрических уравнений.

5.2.1. (*САММАТ, 2021, 10.2*) Решите уравнение:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{35}{12}.$$

5.2.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 10.1*) Решите уравнение

$$1-\sqrt{2}\sin x(\cos x+2\sin x)+\sqrt{2}\cos x(2\cos x-\sin x)=2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right).$$

5.2.3. (*«Росатом», 2023, 10.2*) Найти на интервале $(0;2\pi)$ наибольшее решение уравнения

$$(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)^3=\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x.$$

5.2.4. (*«Росатом», 2022, 10.2*) Решить уравнение

$$f(x)=\sqrt{3}\cdot g(x),$$

для $f(x)=\sin x+\sin 3x+\sin 5x+...+\sin 2021x$ и $g(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos 2021x$.

5.2.5. (*«Росатом», 2016, 10.2*) Функция $t(x)$ определена на всей числовой оси так, что $t(x)=0$ для всех $x\leqslant 0$ и $t(x)=1$ для $x>0$. Решить уравнение

$$\sin 2x=0{,}5\cdot t\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1{,}5\cdot t(x-\pi)+t(x-2\pi).$$

5.2.6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 10.3*) Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\left(x^2-2{,}57\right)=\cos(\pi x).$$

5.3 Системы тригонометрических уравнений

Дополнительные задачи — в листке Системы тригонометрических уравнений.

5.3.1. (*Открытая олимпиада, 2017, 10.3*) Один двоечник написал следующие неверные формулы синуса и косинуса суммы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$$

и

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha + \cos\beta.$$

В свое оправдание он сказал, что при некоторых α и β его формулы всё же верны. Найдите все такие пары (α, β).

5.3.2. (*САММАТ, 2023, 10.5*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^3 x = \sin y, \\ \sin^3 x = \cos y. \end{cases}$$

5.4 Обратные тригонометрические функции

Дополнительные задачи — в листке Обратные тригонометрические функции.

5.4.1. (*САММАТ, 2021, 10.1*) Решите уравнение

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2020}{1-2020x}\right) - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(2020).$$

5.4.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 10–11.2*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

при любом значении b имеет хотя бы одно решение.

5.4.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 10.2*) Решите неравенство

$$\left(18x^3 - 9x^2 - 2x + 1\right) \cdot \arccos(-2x-1) \geqslant \arccos\left(\frac{1}{4\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ}\right).$$

5.4.4. (*ОММО, 2022.6*) Решите уравнение $\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} + \arcsin\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} = \arcsin\frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

5.5 Исследование тригонометрических функций

Дополнительные задачи — в листке Исследование тригонометрических функций.

5.5.1. (*«Росатом», 2017, 10.4*) При каких целых n выражение $6\sin\frac{5\pi n}{12}+\sin\frac{5\pi n}{4}$ принимает наибольшее возможное значение?

5.5.2. (*«Ломоносов», 2020, 10.5*) Докажите, что уравнение

$$\sin(2020x)+\cos(2020x)=\frac{x}{5050}+1$$

имеет по крайней мере 8000 корней, принадлежащих отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

5.6 Тригонометрические неравенства

Дополнительные задачи — в листке Тригонометрические неравенства.

5.6.1. (*«Росатом», 2021, 10.2*) Найти целые x, для которых

$$x^2\sin\frac{\pi x}{2}\geqslant 10-6\cos\frac{\pi x}{3}.$$

5.6.2. (*«Росатом», 2020, 10.2*) Решить неравенство:

$$\sin(\sin 2x+\cos 2x-1)\geqslant\sin x(\sin x-\cos x).$$

5.7 Минимаксные задачи в тригонометрии

Дополнительные задачи — в листке Минимаксные задачи в тригонометрии.

5.7.1. (*«Росатом», 2021, 10.2*) Решить неравенство

$$\sqrt{(\cos^2 x+1{,}5\sin x)\left(3\cos^2 x-1{,}5\sin x\right)}\geqslant 2\cos^2 x.$$

5.8 Тригонометрические задачи на экстремум

5.8.1. (*«Росатом», 2018, 10.2*) Найти наибольшее значение выражения $\sin x+\sin y+\sin z$, если x, y и z — неотрицательные числа, для которых $x+y+z=\frac{3\pi}{4}$.

5.8.2. (*САММАТ, 2021, 10.8*) На плоскости заданы точки $A(2,4)$, $B(4,2)$ и прямая $y=kx$ $(k>0)$. Точка M принадлежит прямой $y=kx$. Найти треугольник ABM с минимальным значением его периметра и вычислить значение периметра.

Глава 6

Задачи с параметрами

6.1 Линейные уравнения и неравенства с параметрами

Дополнительные задачи — в листке Параметры. Линейные уравнения и неравенства.

6.1.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 10.1*) При каких значениях числа a три графика $y = ax + a$, $y = x$ и $y = 2 - 2ax$ пересекаются в одной точке?

6.1.2. (*Всесиб., 2015, 10.2*) Найти все значения параметров a, b, c, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ bx + cy = a, \\ cx + ay = b, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение (когда $x, y < 0$).

6.1.3. (*«Росатом», 2020, 10.3*) При каких a решение (x, y, z) системы

$$\begin{cases} x + 2y = a, \\ 2y + 3z = a + 1, \\ x + 3z = 5 \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 19$? Найти эти решения.

6.2 Параметры и квадратный трёхчлен

Дополнительные задачи — в листках

- Параметры и квадратный трёхчлен. 1
- Параметры и квадратный трёхчлен. 2
- Параметры и квадратный трёхчлен. 3

6.2.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 10.2*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 + 2x + 2 + 2|x+1| = a$ имеет ровно два корня.

6.2.2. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.3*) Числа a, b, c таковы, что каждое из двух уравнений $x^2 + bx + a = 0$ и $x^2 + cx + a = 1$ имеет по два целых корня, при этом все эти корни меньше -1. Найдите наименьшее значение a.

6.2.3. (*«Росатом», 2016, 10.4*) При каких натуральных n множество решений неравенства

$$15x^2 - 2(n + 15)x + (n - 6)(20 - n) \leqslant 0$$

содержит ровно 3 целых числа?

6.2.4. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.5*) Найдите все значения параметра b, при котором для любого значения параметра $a \in [-1; 1]$ неравенство $x^2+6x+2(a+b+1)\sqrt{-x^2 - 6x - 5}+8 < a^2+b^2+2a$ не выполняется хотя бы для одного $x \in [-5; -1]$.

6.2.5. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.6*) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(x^2 - a\right)^2 + 2\left(x^2 - a\right) + (x - a) + 2 = 0$$

имеет ровно одно решение? Укажите решение при найденных значениях параметра a.

6.2.6. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.7*) Найти все значения параметра b, при которых неравенство $2b + b^2 - 2b\sin x > \cos^2 x + 2$ выполняется при любом значении x.

6.2.7. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.7*) Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a + 2)x^2 + (|a + 3| - |a + 11|)x + a = 4$$

имеет два различных положительных корня.

6.3 Параметры и уравнения высших порядков

Дополнительные задачи — в листке Параметры. Уравнения высших порядков.

6.3.1. (*«Росатом», 2015, 10.4*) При каких значениях a три корня уравнения

$$4x^3 + 4ax^2 + (a^2 - 2a - 4)x - a^2 - 2a = 0$$

могут быть пятым, седьмым и девятым членами некоторой геометрической прогрессии? Найти квадрат знаменателя этой прогрессии.

6.3.2. (*«Шаг в будущее», 2017, 10.5*) Найти все значения параметров a, b и c, при которых множество действительных корней уравнения $x^5 + 4x^4 + ax^2 = bx + 4c$ состоит ровно из двух чисел 2 и -2.

6.3.3. (*«Ломоносов», 2022, 10.5*) Число a таково, что уравнение $t^3 + 4t^2 + 4t + a = 0$ имеет три действительных корня $x < y < z$. Определите, какие числовые значения может принимать выражение

$$A = x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32.$$

6.4 Равносильные переходы

6.4.1. (*Всеросс., 2023, МЭ, 10.2*) Действительное число a таково, что из двух уравнений

$$5 + |x - 2| = a \quad \text{и} \quad 7 - |2x + 6| = a$$

одно имеет ровно один корень, а другое — ровно два корня. Чему может быть равно a? Укажите все возможные варианты.

6.4.2. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.5*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{2 - 2a(1 - x)}{|x| + x} = \sqrt{1 - a + ax}$$

имеет хотя бы одно решение. Укажите эти решения для всякого найденного значения a.

6.4.3. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.5*) Найдите все значения параметр a, при которых уравнение

$$\frac{8 + 2a(x - 2)}{|x| + x} = \sqrt{4 - 2a + ax}$$

имеет хотя бы одно решение. Укажите эти решения для всякого найденного a.

6.4.4. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.5*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left((1 - x^2)^2 + 2a^2 + a\right)^5 - \left((3a - 1)(1 - x^2) + 6\right)^5 = 2a + 5 + (1 - 3a)x^2 - 2a^2 - (1 - x^2)^2$$

имеет два различных решения на отрезке $\left[-\sqrt{6}/2; \sqrt{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a.

6.4.5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 10.5*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\left|x^3 + 2x^2 + x - a\right| + \left|x^3 - 2x^2 + x + a\right| < 4x^2 - 8x$$

представляет собой на числовой прямой промежуток длиной 2.

6.4.6. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.6*) При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение:

$$\sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} + x = a?$$

6.5 Параметры и графики

Дополнительные задачи — в листке Параметры. Графики.

6.5.1. (*«Физтех», 2021, 10.3*) На плоскости Oxy уравнением

$$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$$

заданы координаты точки A, а уравнением $ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$ — парабола с вершиной в точке B. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $3x - y = 4$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

6.5.2. (*«Шаг в будущее», 2021, 10.4*) Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\frac{3}{(x-1)^3} + \frac{6-a}{(x-1)^2} - \frac{5a}{x-1} + a^2 \leqslant 0$$

не выполняется ни для одного x из интервала $(1;2)$. Укажите решения неравенства при найденных значениях параметра a.

6.5.3. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \left(\dfrac{|x-1|}{x-1} + 3a\right)^2 = 24 - 4x^2 - 4x, \\ 16x^2 - 27a^2 + 6ax + 22x + 12a + 7 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра a.

6.5.4. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.4*) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \left(a|y^3| + a|x^3| - 8\right)\left(x^6 + y^6 - 3a^2\right) = 0, \\ \sqrt{x^6y^6} = a \end{cases}$$

имеет восемь различных решений

6.5.5. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.4*) Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(4y - 3|x-a| - x + 5a) = 0, \\ \sqrt{x^2y^2} = 4a \end{cases}$$

имеет шесть различных решений.

6.5.6. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.4*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$|a - 3|x+0{,}5| + x + 2{,}5| + \left|a - x^2\right| = x^2 + x - 3|x+0{,}5| + 2{,}5$$

имеет ровно два целых решения.

6.5.7. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.4*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$|2 + |x| - a| - |a - |x+1| - |x-1|| = 2 + |x| + |x+1| + |x-1| - 2a$$

имеет ровно два целых решения. Укажите эти решения при каждом из найденных a.

6.5.8. (*«Росатом», 2018, 10.4*) Найти числа x, являющиеся решениями уравнения

$$|x-a|+|x-2a+3|=1$$

хотя бы при одном значении $a \in [3;4]$.

6.5.9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 10.5*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2+a|x-a|=8x-15$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

6.5.10. (*«Физтех», 2023, 10.6*) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

6.5.11. (*«Физтех», 2022, 10.6*) Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

6.5.12. (*«Физтех», 2022, 10.7*) Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$-\frac{10x+10}{5x+6}\leqslant ax+b\leqslant 5x+2+|10x+6|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-1;-\frac{2}{5}\right]$.

6.6 Параметры в тригонометрии

Дополнительные задачи — в листке Параметры и тригонометрия.

6.6.1. (*«Росатом», 2019, 10.2*) При каких a уравнение $2\cos 2x+4a\sin x=3$ имеет решения?

6.6.2. (*«Ломоносов», 2023, 10.2*) При каком наименьшем по модулю значении параметра α уравнение

$$1234\sin^{20}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-789\cos^{23}\left(\alpha x-\frac{\pi}{4}\right)=2023$$

имеет решение на отрезке $[-\pi;\pi]$?

6.6.3. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.5*) Найти, при каких a уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x+\sin x}+\frac{1}{\sin^2 x+3\sin x+2}+\frac{1}{\sin^2 x+5\sin x+6}+\frac{1}{\sin^2 x+7\sin x+12}=a$$

не имеет решений.

6.6.4. (*ОММО, 2023.6*) Укажите все значения параметра a, $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства
$$\frac{|\cos t - a| - \sin t}{\left|\cos t - \frac{3}{4}\right|} > 0$$
для $t \in (0; \pi)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

6.7 Параметры и симметрия

Дополнительные задачи — в листке Симметрия в задачах с параметрами.

6.7.1. (*ОММО, 2023.7*) Дано действительное число t, отличное от 0, 1, -1, $\frac{1}{2}$ и 2. Решите уравнение
$$\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t-1)^2}.$$
Ответ может зависеть от t.

6.8 Параметры и свойства функций

Дополнительные задачи — в листке Параметры. Свойства функций.

6.8.1. (*«Росатом», 2020, 10.1*) При каких a

1. уравнение $f(f(x)) = x$ имеет бесконечное число решений;
2. уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ имеет бесконечное число решений

для функций вида
$$f(x) = \frac{ax - 5}{x + a - 2}?$$

6.8.2. (*Олимпиада КФУ, 2021, 10.3*) Найдите все значения c, при которых для *любых* положительных a, b и $a > b$ выполнено неравенство: $a + \sqrt{b + c} > b + \sqrt{a + c}$.

6.9 Условный экстремум

Дополнительные задачи — в листке Условный экстремум.

6.9.1. (*«Надежда энергетики», 2021, 10.4*) Найдите наименьшее значение функции
$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$
если переменные удовлетворяют неравенствам
$$|2x + y| \leqslant b, \quad |2x - y| \geqslant b$$
(где b — фиксированное вещественное число).

6.9.2. (*«Надежда энергетики», 2023, 10.5*) Найдите максимальное значение величины x^2+y^2, если известно, что

$$x^2+y^2=3x+8y.$$

6.9.3. (*«Курчатов», 2022, 10.5*) Действительные числа x, y, z таковы, что $x+y+z=2$ и $xy+yz+zx=1$. Найдите наибольшее возможное значение величины $x-y$.

6.9.4. (*Всеросс., 2022, МЭ, 10.8*) Неотрицательные числа a, b, c в сумме дают 1. Найдите наибольшее возможное значение величины

$$(a+3b+5c)\cdot\left(a+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}\right).$$

6.10 Разные задачи с параметрами

6.10.1. (*«Надежда энергетики», 2020, 10.4*) При проектировании некоторого технического устройства возникла необходимость решать уравнения

$$a\circ x=b,$$

где операция $\circ$ над двумя числами определена условием

$$y\circ z=\frac{y+z+|y-z|}{2}.$$

Найдите все числовые множества X такие, что для любых a,b из X указанное уравнение имеет единственный корень x и этот корень принадлежит множеству X.

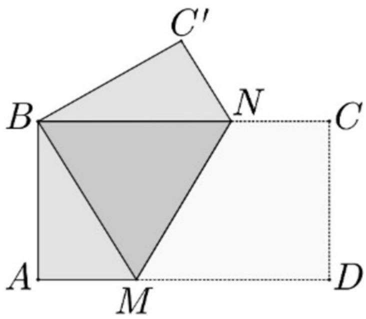
Глава 7

Планиметрия

7.1 Прямоугольники и квадраты

7.1.1. (*«Надежда энергетики», 2022, 10.2*) На каждой из сторон прямоугольника выбрано по произвольной точке. Точки на соседних сторонах прямоугольника соединены отрезками прямых. В результате от прямоугольника оказываются отсеченными четыре треугольника. Вокруг каждого из этих треугольников описана окружность. Докажите, что центры этих окружностей являются вершинами некоторого параллелограмма.

7.1.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 10.2*) Прямоугольник $ABCD$ сложили вдоль линии MN так, что точки B и D совпали. Оказалось, что $AD = AC'$. Найдите соотношение сторон прямоугольника.



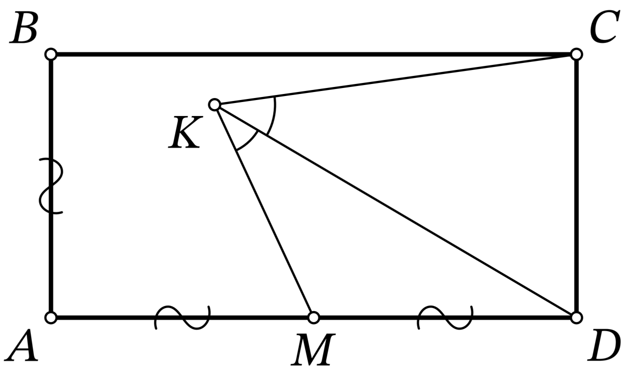
7.1.3. (*САММАТ, 2021, 10.6*) Два квадрата $ABCD$ и $BEFG$ имеют общую сторону $BC = BG$. Квадрат $ABCD$ повернули на некоторый угол относительно общей вершины B как центра окружности так, что продолжение диагонали AC проходит через точку F квадрата $BEFG$. Найти угол AJG, где J — точка пересечения стороны BG неподвижного квадрата $BEFG$ с диагональю AC квадрата $ABCD$ после поворота.

7.1.4. (*«Надежда энергетики», 2021, 10.3*) На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отмечены две точки, соответственно, X и Y так, что периметр треугольника AXY равен удвоенной стороне квадрата. Найдите сумму косинуса и синуса угла XAY.

7.1.5. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 10.3*) Два прямоугольника $ABCD$ и $AEFG$ имеют общую вершину A и расположены на плоскости так, что точки B, E, D и G лежат на одной прямой (в указанном порядке). Пусть прямые BC и GF пересекаются в точке T, а прямые CD и EF — в точке H. Докажите, что точки A, H и T лежат на одной прямой.

7.1.6. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.5*) На вертикальной плоскости, изображающей стену, нарисована горизонтальная прямая, изображающая пол. На полу стоит свежеокрашенный квадрат со стороной 1. Его кантуют (поворачивают на 90°, опираясь на одну из вершин). И так — четыре раза, пока он не будет стоять на той же стороне, что и вначале. При этом квадрат всё время касался стены, так что часть ее оказалась окрашенной (или испачканной). Аналогичную процедуру проделали на другой стене, но квадрат был с диагональю длины 1, а прокантовали его 7 раз. На сколько меньшую площадь удалось окрасить (испачкать) во втором случае?

7.1.7. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 10.8*) Прямоугольник $ABCD$ таков, что $AD = 2AB$. Точка M — середина стороны AD. Внутри прямоугольника нашлась точка K такая, что $\angle AMK = 80°$ и луч KD является биссектрисой угла MKC. Сколько градусов составляет угол KDA?



7.2 Прямоугольный треугольник

Дополнительные задачи — в листке Прямоугольный треугольник.

7.2.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 10.6*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. Окружность, проходящая через точки A и H, пересекает катеты AB и AC в точках X и Y соответственно. Найдите длину отрезка AC, если известно, что $AX = 5$, $AY = 6$, $AB = 9$.

7.2.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 10.2*) В прямоугольном треугольнике ABC (угол C — прямой) проведены медианы AM и BN, длины которых равны 19 и 22 соответственно. Найдите длину гипотенузы данного треугольника.

7.2.3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 10.2*) Высота, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 16. Найдите длину второго отрезка, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен 5.

7.2.4. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.3*) Точка M принадлежит катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, причем $AM = 2$, $MC = 16$. Отрезок MH — высота треугольника AMB. Точка D расположена на прямой MH так, что угол ADB равен $90°$, и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину отрезка BL, если L — точка пересечения BD и AC, а тангенс угла ACH равен $1/18$.

7.2.5. (*«Физтех», 2022, 10.4*) а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

7.2.6. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.5*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C длина биссектрисы угла A равна 4, угол $A = 60°$. На серединном перпендикуляре к катету CB в точке Q лежит центр окружности, которая касается прямых AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите площадь треугольника OQM, где точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

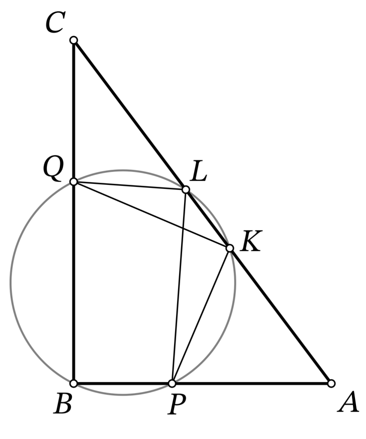
7.2.7. (*«Росатом», 2019, 10.5*) На гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого один катет в три раза больше другого, во внешнюю сторону построен правильный треугольник. В каком отношении биссектриса прямого угла делит его площадь?

7.2.8. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.6*) Господин Сыр Жуй, большой поклонник Фэн-шуй, владеет парком, представляющим собой прямоугольный треугольник с острым углом $\alpha = \frac{11}{24}\pi$ и гипотенузой длины 640 м и желает устроить в нем лабиринт аллей. Для этого прокладываются аллеи, идущие вдоль медианы и высоты, опущенных из прямого угла. Эти аллеи вместе с отсекаемой частью гипотенузы образуют новый прямоугольный треугольник. В нем из прямого угла снова прокладываются аллея-высота и аллея-медиана и т. д.

1. Найдите длину аллеи-гипотенузы 5-го треугольника.

2. Найдите площадь 5-го треугольника.

7.2.9. (*Всеросс., 2021, МЭ, 10.7*) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 42$ и $BC = 56$. Окружность, проходящая через точку B, пересекает сторону AB в точке P, сторону BC — в точке Q, а сторону AC — в точках K и L. Известно, что $PK = KQ$ и$QL : PL = 3 : 4$. Найдите PQ^2.



7.3 Биссектрисы, медианы, высоты

Дополнительные задачи — в листке Медианы, высоты, биссектрисы.

7.3.1. (*«Бельчонок», 2021, 10.2*) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN. Угол ABC равен $60°$. На стороне AC выбрана точка K так, что $AK = KC$. Найдите углы треугольника MNK.

7.3.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 10.2*) В треугольнике ABC медиана BM вдвое меньше биссектрисы AN. Известно, что угол CBM в три раза больше угла CAN. Найдите углы треугольника ABC.

7.3.3. (*САММАТ, 2021, 10.7*) В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена медиана, из другой — биссектриса, из третьей — высота. Могут ли проведенные биссектриса и медиана разделить высоту на три равные части? Ответ объясните.

7.3.4. (*САММАТ, 2021, 10.9*) Известно, что в разностороннем треугольнике $\triangle ABC$ длины медиан пропорциональны длинам сторон, к которым они проведены. Найти коэффициент пропорциональности.

7.3.5. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.3*) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, L — точка пересечения отрезков B_1C_1 и AA_1, K — точка пересечения отрезков B_1A_1 и CC_1. Найдите отношение $LM : MK$, если M — точка пересечения биссектрисы BB_1 с отрезком LK, и AB: $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$.

7.3.6. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.3*) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, L — точка пересечения отрезков B_1C_1 и AA_1, K — точка пересечения отрезков B_1A_1 и CC_1, M — точка пересечения BK и AA_1, N — точка пересечения BL и CC_1. Найдите отношение $MS : SN$, если S — точка пересечения биссектрисы BB_1 с отрезком MN, и $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$.

7.3.7. (*«Бельчонок», 2019, 10.4*) В треугольнике ABC с углом $C = 120°$ и площадью $12\sqrt{3}$ проведена высота CD. В треугольниках ACD и BCD проведены высоты DE и DF соответственно. Найдите периметр треугольника EFC, если известно, что он равнобедренный.

7.3.8. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 10.4*) Петя говорит Васе: «Я построил неравнобедренный треугольник ABC и провел биссектрисы AM и CN. Оказалось, что $OM = ON$, где O — точка пересечения биссектрис. Сможешь ли ты определить, чему равен угол B?» Вася отвечает: «Да такого не может быть, чтобы в неравнобедренном треугольнике отрезки OM и ON оказались равными!». Кто из мальчиков прав?

7.3.9. (*Олимпиада КФУ, 2021, 10.4*) В треугольнике ABC сторона AC больше AB, прямая l — биссектриса внешнего угла C. Прямая, проходящая через середину AB и параллельная l, пересекает AC в точке E. Найдите CE, если $AC = 7$ и $CB = 4$. (Внешний угол треугольника — это угол, смежный с внутренним углом при данной вершине.)

7.3.10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 10.4*) В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD равны и перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{13}$.

7.3.11. (*Олимпиада КФУ, 2019, 10.4*) В треугольнике ABC проведены две высоты AA' и CC'. Найдите величину угла B, если известно, что $AC = 2 \cdot A'C'$.

7.3.12. (*Олимпиада КФУ, 2022, 10.4*) В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC взяли точку D, H — точка пересечения высот. Прямая, проходящая через H перпендикулярно отрезку DH, пересекает его стороны AB и BC в точках E и F, причём $EH = HF$. Найдите отношение $AD : DC$.

7.3.13. (*«Росатом», 2020, 10.5*) Точки M, N, P — основания высот, опущенных из вершин треугольника ABC с углами $45°$, $60°$, $75°$ на его стороны. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

7.3.14. (*«Курчатов», 2020, 10.5*) Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Точка G такова, что четырёхугольник $ABGH$ — параллелограмм. Пусть I — такая точка на прямой GH, что AC делит HI пополам. Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника GCI в точках C и J. Докажите, что $IJ = AH$.

7.3.15. (*Всесиб., 2021, 10.5*) На отрезке AB отмечена произвольная точка M, отличная от A и B. С одной стороны от прямой AB выбрана точка C, а с другой — точки D и E такие, что треугольники ABC, AMD и MBE являются равносторонними. Обозначим через P, Q, R точки пересечения медиан треугольников ABC, AMD и MBE соответственно. Доказать, что: а) треугольник PQR — равносторонний, б) точка пересечения медиан треугольника PQR лежит на отрезке AB.

7.3.16. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 10.6*) Пусть AM и BN — высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle C = 45°$. На отрезках AM и BN отмечены соответственно точки K и T так, что $MK = MB$ и $NT = NA$. Докажите, что прямые MN и KT параллельны.

7.3.17. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.6*) В треугольнике ABC с углом A, равным $60°$, проведена биссектриса AD. Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $2\sqrt{3}/3$. Найдите длину отрезка BM, где M — точка пересечения отрезков AD и BO, если $AB = 1$.

7.3.18. (*«Высшая проба», 2023, 10.6*) Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $AH^2 = = BH^2 + CH^2$. На описанной окружности треугольника ABC нашлись точки D и E такие, что $CE \parallel AB$ и $BD \parallel AC$. Докажите, что точка H лежит на прямой DE.

7.3.19. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.8*) В остроугольном треугольнике ABC $\angle B = 75°$, длина $AC = 2$ см, H — точка пересечения его высот. Площадь треугольника AHC равна $\sqrt{12} - 3$ см^2. Найти площадь треугольника ABC.

7.3.20. (*«Ломоносов», 2020, 10.6*) На биссектрисе угла BAC треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AB за точку A — точка N так, что $AC = AM = 1$ и $\angle ANM = \angle CNM$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CNM.

7.3.21. (*ОММО, 2022.8*) В треугольнике ABC сторона $AC = 42$. Биссектриса CL делится точкой пересечения биссектрис треугольника в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Найдите длину стороны AB, если радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 14.

7.4 Параллелограмм

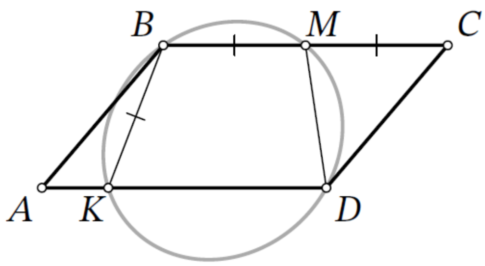
Дополнительные задачи — в листке Параллелограмм.

7.4.1. (*«Физтех», 2022, 10.4*) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм с тупым углом C. Пусть E — точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC, проходящим через C, а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что $CN = 6$, $AN = 12$, а $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{4}{5}$.

1. Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

2. Найдите площадь треугольника ENA.

7.4.2. (*Всеросс., 2023, МЭ, 10.4*) Дан параллелограмм $ABCD$, точка M — середина стороны BC. На стороне AD нашлась точка K такая, что $BK = BM$ и четырёхугольник $KBMD$ является вписанным.



1. Чему равна длина отрезка MD, если $AD = 17$?

2. Сколько градусов составляет угол KMD, если $\angle BAD = 46°$?

7.4.3. (*Открытая олимпиада, 2019, 10.5*) Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба в отношении $1 : 3$, считая от вершины его острого угла. Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

7.4.4. (*«Росатом», 2018, 10.5*) Длины сторон параллелограмма равны 3 и 2. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.

7.4.5. (*«Росатом», 2022, 10.5*) Основание AD параллелограмма $ABCD$ разбито точками M_1, $M_2, \ldots, M_9$ на десять равных частей. Прямые $BM_1, BM_2, \ldots, BM_9$ пересекают диагональ AC в точках $N_1, N_2, \ldots, N_9$ соответственно. Найти длину седьмого по счету от вершины A отрезка разбиения диагонали этими точками, если длина диагонали равна 136.

7.5 Трапеция

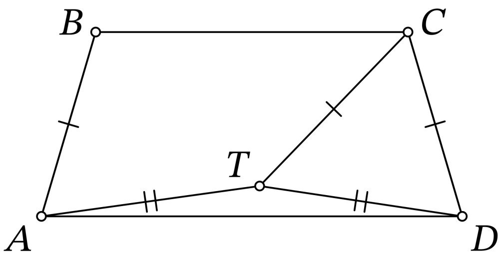
Дополнительные задачи — в листке Трапеция.

7.5.1. (*Открытая олимпиада, 2020, 10.2*) $ABCD$ — равнобедренная (равнобокая) трапеция с основаниями AD и BC, а $BCDE$ — равнобедренная трапеция с основаниями CD и BE. Докажите, что $\angle BCA = \angle CED$.

7.5.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 10.3*) Дана трапеция $ABCD$ и точка M на боковой стороне AB, такая, что $DM \perp AB$. Оказалось, что $MC = CD$. Найдите длину верхнего основания BC, если $AD = d$.

7.5.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 10.3*) На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки M и N соответственно, такие, что $AN = BN$ и $\angle ABN = \angle CDM$. Докажите, что $CM = MD$.

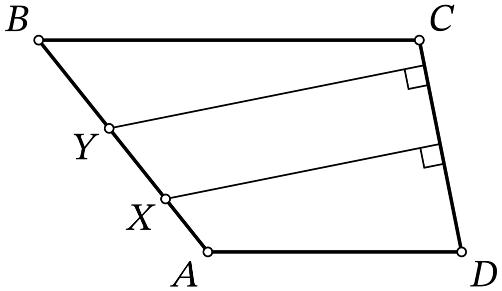
7.5.4. (*Всеросс., 2021, МЭ, 10.4*) Равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такова, что $\angle ADC = 2\angle CAD = 82°$. Внутри трапеции выбрана точка T так, что $CT = CD$, $AT = TD$. Найдите $\angle TCD$. Ответ дайте в градусах.



7.5.5. (*Открытая олимпиада, 2023, 10.4*) Дана трапеция $ABCD$ с прямым углом $\angle A$ и основаниями $BC = 144$ и $AD = 225$. На боковой стороне AB, как на диаметре, построена окружность с центром в точке O, касающаяся стороны CD в точке K. Прямые OK и BC пересекаются в точке L. Найдите длину отрезка CL.

7.5.6. (*«Бельчонок», 2022, 10.4*) Внутри трапеции $KLMN$ ($LM \parallel KN$) выбрана точка P так, что $\angle KPL = \angle MPN = 90°$, $\angle LKP + \angle MNP = \angle LPM$. Докажите, что в трапецию $KLMN$ можно вписать окружность.

7.5.7. (*Всеросс., 2022, МЭ, 10.6*) Дана трапеция $ABCD$. Отрезки AB и CD — её боковые стороны — равны 24 и 10 соответственно. На стороне AB отмечены точки X и Y так, что $AX = 6$, $XY = 8$, $YB = 10$. Известно, что расстояния от точек X и Y до прямой CD равны 23 и 27 соответственно.

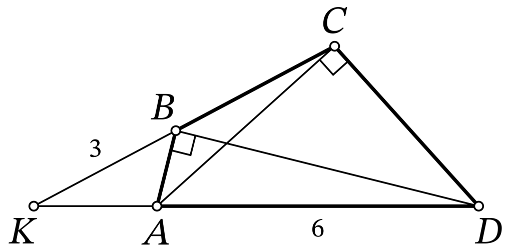


1. Найдите площадь треугольника ACD.

2. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

7.6 Общие четырёхугольники

7.6.1. (*Всеросс., 2022, МЭ, 10.3*) Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle ABD = \angle ACD = 90°$, $\angle CAD = 42°$. Лучи CB и DA пересекаются в точке K. Известно, что $BK = 3$, $AD = 6$.



1. Сколько градусов составляет угол BKA?
2. Сколько градусов составляет угол BAC?

7.6.2. (*Всесиб., 2017, 10.3*) В четырёхугольнике $ABCD$ равные диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а точки P и Q — середины сторон AB и CD соответственно. Докажите, что биссектриса угла AOD перпендикулярна отрезку PQ.

7.6.3. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.3*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB — биссектриса угла ADC, $AD : DC = 4 : 3$. Найдите косинус угла AKB, если K — точка пересечения диагоналей AC и BD, и $BK : KD = 1 : 3$.

7.6.4. (*«Курчатов», 2023, 10.3*) Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB = BC = 13$, $CD = 7$, $AD = 17$, $\angle D = 90°$. Из вершины B на сторону AD опустили высоту BH. Найдите длину отрезка HD.

7.6.5. (*«Будущие исследователи – будущее науки», 2020, 10.4*) На стороне AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка O. Оказалось, что $AO = BO$, $CO = OD$ и $\angle BOA = \angle COD$. Пусть E — точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите, что EO — биссектриса угла AED.

7.6.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 10.4*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E, причём $\angle BAE = \angle BEA = 80°$, $\angle CAD = \angle CDA = 80°$, $\angle EAD = \angle EDA = 50°$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.

7.6.7. (*«Росатом», 2023, 10.5*) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность и его диагонали пересекаются в точке P. Точки K, L и M — середины сторон AB, BC и CD соответственно. Радиус окружности, описанной около треугольника KLP, равен 1. Найти радиус окружности, описанной около треугольника LMP.

7.6.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!», 2023, 10.6*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = 70°$, $\angle ADC = 145°$, $BC = BD = 1$. Найдите длину стороны AB.

7.6.9. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание – финансист!», 2023, 10.6*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = 102°$, $\angle ADC = 129°$, $AB = BC = 1$. Найдите длину диагонали BD.

7.6.10. (*«Физтех», 2021, 10.6*) Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и при этом треугольники BOC и AOD — правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD.

а) Докажите, что ABT — правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 3$, $AD = 7$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

7.6.11. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 10.7*) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $CD = 6$, $BC = 4$, $\angle BAD = 90°$, $\angle BCD = 60°$, $AB = AD$. Найдите длину диагонали AC.

7.7 Многоугольники

7.7.1. (*Открытая олимпиада, 2018, 10.2*) Точка M лежит на стороне правильного шестиугольника со стороной 10. Найдите сумму расстояний от точки M до прямых, содержащих остальные стороны шестиугольника.

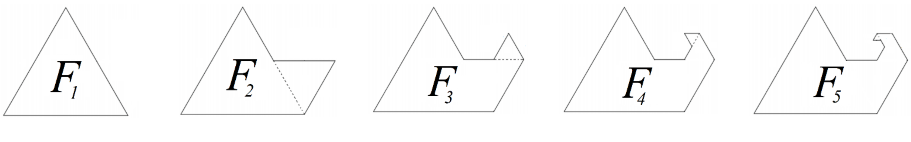
7.7.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 10.2*) В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle A = 60°$, а остальные углы равны между собой. Известно, что $AB = 6$, $CD = 4$, $EA = 7$. Найдите расстояние от точки A до прямой CD.

7.7.3. (*Открытая олимпиада, 2023, 10.3*) Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$. Оказалось, что $AD \parallel BC$, $BE \parallel CD$, $AB = 5$, $DE = 6$. $BD = 10$. Найдите AE.

7.7.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 10.3*) Все углы выпуклого восьмиугольника равны, а все стороны имеют рациональную длину. Докажите, что у него есть центр симметрии.

7.7.5. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 10.5*) Для каких положительных целых $n > 2$ существует многоугольник с n вершинами (не обязательно выпуклый) такой, что каждая его сторона параллельна какой-либо другой его стороне?

7.7.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 10.6*) Дана бесконечная последовательность многоугольников F_1, F_2, F_3, F_4, … Фигура F_1 — это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $1/2$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $1/2$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.



Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 4.

7.8 Касательные, секущие, хорды

7.8.1. (*«Физтех», 2021, 10.1*) Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность с диаметром BD пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно. Точки M и N — середины отрезков AD и CD соответственно. Известно, что $PM \parallel TN$.

а) Найдите угол ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$. Найдите площадь треугольника.

7.8.2. (*Всесиб., 2022, 10.3*) Треугольник ABC равнобедренный, с равными сторонами AC и BC. На дуге BC его описанной окружности, не содержащей вершину A, отметим произвольную точку D, отличную от B и C. Обозначим за E точку пересечения прямых CD и AB. Доказать, что прямая BC касается описанной окружности треугольника BDE.

7.8.3. (*«Надежда энергетики», 2020, 10.3*) Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через Q проведена прямая, перпендикулярная PQ, которая повторно пересекает окружности в точках A и B, а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C. Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

7.8.4. (*«Бельчонок», 2020, 10.3*) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и BE, пересекающиеся в точке H. Около треугольника ABH описана окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках F и G, отличных от концов. Докажите, что $FG = 2DE$.

7.8.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 10.3*) Дан треугольник ABC, вписанный в окружность ω. Точка M — основание перпендикуляра из точки B на прямую AC, точка N — основание перпендикуляра из точки A на касательную к ω, проведенную через точку B. Докажите, что $MN \parallel BC$.

7.8.6. (*«Физтех», 2023, 10.3*) Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

7.8.7. (*Всесиб., 2016, 10.3*) Две окружности пересекаются в точках P и M. На первой окружности выбрана произвольная точка A, отличная от P и M и лежащая внутри второй окружности, лучи PA и MA вторично пересекают вторую окружность в точках B и C соответственно. Доказать, что прямая, проходящая через A и центр первой окружности, перпендикулярна BC.

7.8.8. (*«Курчатов», 2021, 10.3*) Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с прямым углом A ($BC \parallel AD$). Известно, что $BC = 1$, $AD = 4$. На стороне AB отмечена точка X, а на стороне CD — точка Y так, что $XY = 2$, $XY \perp CD$. Докажите, что описанная окружность треугольника XCD касается AB.

7.8.9. (*Всеросс., 2020, МЭ, 10.4*) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D. Вторая окружность проходит через точку D, касается луча BA в точке A и, кроме того, касается продолжения стороны BC за точку C. Найдите отношение $AD : DC$.

7.8.10. (*«Бельчонок», 2022, 10.4*) Окружность, построенная на стороне KM остроугольного треугольника KLM как на диаметре, пересекает стороны треугольника KL и LM в точках P и Q соответственно. Касательные к этой окружности, проведенные в точках P и Q, пересекаются в точке R. Докажите, что прямая LR перпендикулярна KM.

7.8.11. (*«Бельчонок», 2022, 10.4*) В треугольнике KLM угол LKM тупой. На стороне LM как на диаметре построена окружность, которая пересекает продолжения сторон LK и MK в точках P и Q соответственно. Через точки P и Q проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке R. Докажите, что прямая LR перпендикулярна M.

7.8.12. (*«Бельчонок», 2023, 10.4*) Даны две концентрические окружности ω_3 и ω_7 с центром O. Радиусы окружностей ω_3 и ω_7 равны соответственно 3 и 7. В окружности ω_3 проведена хорда AB. Через точку b проведена перпендикулярно AB прямая, пересекающая окружность ω_7 в точках C и D. Какие значения может принимать сумма квадратов трёх сторон треугольника ACD?

7.8.13. (*«Бельчонок», 2023, 10.4*) Даны две концентрические окружности ω_5 и ω_8 с центром O. Радиусы окружностей ω_5 и ω_8 равны соответственно 5 и 8. В окружности ω_5 проведена хорда AB. Через точку B проведена перпендикулярно AB прямая, пересекающая окружность ω_8 в точках C и D. Точка G — середина отрезка AC, точка M — середина OB. Найдите длину отрезка GM.

7.8.14. (*«Бельчонок», 2023, 10.4*) Даны две концентрические окружности ω_6 и ω_{10} с центром O. Радиусы окружностей ω_6 и ω_{10} равны соответственно 6 и 10. В окружности ω_6 проведена хорда AB. Через точку B проведена перпендикулярно AB прямая, пересекающая окружность ω_{10} в точках C и D. Точка G — середина отрезка AC, точка H — середина отрезка AD, точка M — середина OB. Докажите, что точки G и H лежат на окружности с центром M, и найдите радиус этой окружности.

7.8.15. (*Открытая олимпиада, 2017, 10.4*) На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 10 см. Эта окружность пересекает стороны AB и BC в точках X и Y соответственно. Найдите величину $AX \cdot AB + CY \cdot BC$.

7.8.16. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 10.5*) Две окружности $C_1(O_1)$ и $C_2(O_2)$ с различными радиусами пересекаются в точках A и B. Касательная из точки A к C_1 пересекает касательную из точки B к C_2 в точке M. Докажите, что окружности из точки M видны под одинаковыми углами. (Говорят, что окружность видна из точки вне ее под углом α, если касательные, проведенные из этой точки к окружности, образуют угол α.)

7.9 Вписанные и описанные окружности

Дополнительные задачи — в листке Вписанные и описанные окружности.

7.9.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 10.2*) Дан треугольник ABC. O_1 — центр его вписанной окружности; O_2 — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника ABC. На дуге BO_2 описанной окружности треугольника O_1O_2B отмечена такая точка D, что угол BO_2D вдвое меньше угла BAC. M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки D, M, C лежат на одной прямой.

7.9.2. (*«Курчатов», 2022, 10.2*) Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, точка O — центр его описанной окружности. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке N. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y соответственно такие, что $OX \parallel AN$ и $OY \parallel CN$. Описанная окружность треугольника XBY пересекает отрезок BH в точке Z. Докажите, что $XY \parallel OZ$.

7.9.3. (*«Высшая проба», 2023, 10.2*) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$. На стороне CD нашлась точка N такая, что $\angle DNB = 90°$. Докажите, что

$$AD + NC = DN.$$

7.9.4. (*«Бельчонок», 2020, 10.3*) На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Описанная окружность треугольника ABD проходит через центр вписанной окружности треугольника BCD. Найдите $\angle ACB$, если известно, что $\angle ABC = 40°$.

7.9.5. (*Открытая олимпиада, 2016, 10.3*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность S. Окружности S_1 и S_2 равного радиуса касаются окружности S изнутри в точках A и C соответственно. Окружность S_1 пересекается со сторонами AB и AD в точках K и N соответственно, окружность S_2 пересекается со сторонами BC и CD в точках L и M соответственно. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

7.9.6. (*«Шаг в будущее», 2021, 10.3*) Дан треугольник ABC с углом B, равным $60°$. На продолжениях сторон AB, CB за точку B взяты точки K, L соответственно так, что $BK : AB = 2 : 1$, $BL : CB = 3 : 1$. На продолжении медианы BM за точку M взята точка N, причем $BN : BM = 6 : 1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если площадь треугольника KLN равна $126\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC равно 1.

7.9.7. (*«Шаг в будущее», 2021, 10.3*) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $BK = 5$, $KC = 4$. Около треугольника ABK описана окружность с центром в точке O, причем площадь треугольника AOC равна $2\sqrt{15}$. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP > CD$. Найдите CD, если $\angle APB = \angle BAC$.

7.9.8. (*«Ломоносов», 2023, 10.3*) В треугольнике ABC длины сторон $AB = 84$, $AC = 98$. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.

7.9.9. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 10.4*) Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 50°$, $\angle A_1C_1B_1 = 70°$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$.

7.9.10. (*«Физтех», 2023, 10.4*) Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E — середины сторон AB и AC соответственно, CF — биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF.

7.9.11. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 10.4*) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$ с прямым углом ADB. Через точку C проведена прямая $l \parallel AD$, на которой отмечена такая точка F, что угол BAF равен острому углу между диагоналями AC и BD, причём F и C по разные стороны от AB. Точка X такова, что $FXCA$ — параллелограмм. Докажите, что точка X лежит на BD.

7.9.12. (*Олимпиада КФУ, 2020, 10.4*) В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке M, а прямые BC и AD — в точке N. Пусть B_1 — точка пересечения данной окружности с окружностью, проходящей через точки B, M и N, отличная от B. В каком отношении прямая B_1D делит отрезок MN?

7.9.13. (*«Физтех», 2022, 10.5*) Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырёхугольника $ANKM$, если известно, что $AB = 3\sqrt{3}$, $BM = \sqrt{6}$.

7.9.14. (*Открытая олимпиада, 2017, 10.5*) Вписанная окружность четырёхугольника $ABCD$ касается сторон AB, BC, CD и AD в точках E, G, G и H соответственно. Прямые EH и GH пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Оказалось, что $BK = BF$. Докажите, что $CL = CF$.

7.9.15. (*Всесиб., 2019, 10.5*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность и длины сторон BC и DC равны, а длина стороны AB равна длине диагонали AC. Пусть точка P — середина дуги CD, не содержащей точку A, и Q — точка пересечения диагоналей AC и BD. Доказать, что прямые PQ и AB перпендикулярны.

7.9.16. (*«Росатом», 2021, 10.5*) Точки O и Q — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Прямая AB пересекает отрезок OQ в точке M так, что $OM : MQ = 2$. Найти углы треугольника ABC, если известно, что Q равноудалена от точек A и B.

7.9.17. (*«Шаг в будущее», 2020, 10.6*) Первая окружность с центром в точке O вписана в треугольник ABC. Точки A и B лежат на второй окружности с центром в той же точке O. Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D ($D \neq A$), а прямая BC пересекает вторую окружность в точке E ($B \neq E$). Известно, что угол ABC равен углу CAE. Найдите косинус угла BAC. Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним.

7.9.18. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.6*) Окружность с центром O_1 радиуса 2 вписана в треугольник ABC. Вторая окружность с центром O_2 радиуса 4 касается продолжения сторон AB и AC, а также стороны BC. Найдите площадь треугольника O_1BO_2, если величина угла ACB равна $120°$.

7.9.19. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.6*) Окружность радиуса 2, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон AB и AC, а также стороны BC в точке E. Найдите площадь треугольника ADE, если величина угла ACB равна $120°$.

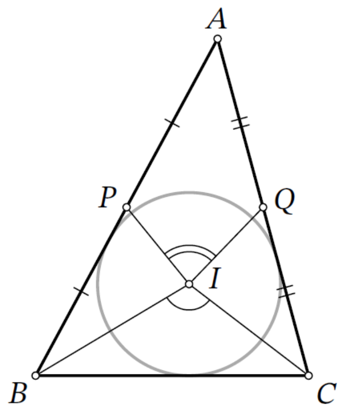
7.9.20. (*«Физтех», 2023, 10.7*) Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M — середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N — середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

7.9.21. (*«Физтех», 2023, 10.7*) Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

7.9.22. (*Открытая олимпиада, 2021, 10.7*) Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка O — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, отрезки AC и OI пересекаются в точке K.

Оказалось, что $OI = 50$, $IK = 18$, $AK = 24$. Найдите длину биссектрисы угла B в треугольнике ABC.

7.9.23. (*Всеросс., 2023, МЭ, 10.8*) Дан треугольник ABC. Пусть точка I — центр его вписанной окружности, а точки P и Q — середины сторон AB и AC соответственно. Оказалось, что $\angle PIQ + \angle BIC = 180°$. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 20$ и $AC = 14$.



7.9.24. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.8*) В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 75°. На стороне AC выбирается точка K. Около треугольников ABK и CBK описываются окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если наименьшая из возможных длина отрезка O_1O_2 равна 2 см.

7.9.25. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.8*) Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная AC, которая пересекает его боковые стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Вторая окружность вписана в треугольник MBK и касается его боковой стороны MK в точке E, а первая окружность касается стороны AB в точке F. Найдите длину отрезка EF, если периметр треугольника MBK равен 6, а $AC = 3$.

7.9.26. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.8*) В треугольнике ABC с основанием $AC = 14$ и боковыми сторонами $AB = 13$ и $BC = 15$ из центра вписанной окружности строится ломаная линия из трех звеньев так, что конечная ее точка — центр описанной около ABC окружности, а еще две точки M и K лежат на боковых сторонах треугольника ABC. Найдите площадь треугольника MBK, если длина этой ломаной линии наименьшая.

7.9.27. (*ОММО, 2023.8*) В треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а A_1, B_1, C_1 — точки касания этих сторон со вписанной окружностью соответственно. Прямые A_1C_1, B_1C_1 пересекают A_0B_0 в точках X и Y. Докажите, что прямая CC_1 делит отрезок XY пополам.

7.9.28. (*Открытая олимпиада, 2022, 10.8*) На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взятые точки C_1, A_1 и B_1 соответственно такие, что

1. ни одна из них не является серединой стороны;
2. прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке;
3. перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в точках C_1, A_1 и B_1, также пересекаются в одной точке;
4. сумма отрезков AB_1, BC_1 и CA_1 равна полупериметру треугольника ABC.

Докажите, что A_1, B_1 и C_1 либо точки касания вписанной окружности треугольника ABC, либо точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC с его сторонами.

7.10 Касающиеся окружности

Дополнительные задачи — в листке Касающиеся окружности.

7.10.1. (*«Надежда энергетики», 2023, 10.2*) Две окружности касаются друг друга внешним образом и каждая из них касается внутренним образом большей окружности. Радиус одной в два раза, а другой — в три раза меньше радиуса наибольшей окружности. Найдите отношение длины отрезка общей внутренней касательной к малым окружностям, заключенного внутри наибольшей, к ее диаметру.

7.10.2. (*САММАТ, 2023, 10.9*) Три равных окружности радиуса r расположены внутри окружности радиуса R, попарно касаются между собой и внешней окружности. Зная величину отрезка r, при помощи циркуля и линейки (без единицы измерения) построить отрезок R.

7.10.3. (*САММАТ, 2022, 10.10*) Три окружности с радиусами $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются внешним образом четвертой окружности с радиусом r. Найти r.

7.10.4. (*Открытая олимпиада, 2022, 10.5*) Окружности O_1, O_2 и O_3 находятся внутри окружности O_4 радиуса 6, касаясь её внутренним образом, а друг друга внешним. При этом окружности O_1 и O_2 проходят через центр окружности O_4. Найдите радиус окружности O_3.

7.10.5. (*«Физтех», 2022, 10.5*) Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB — диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

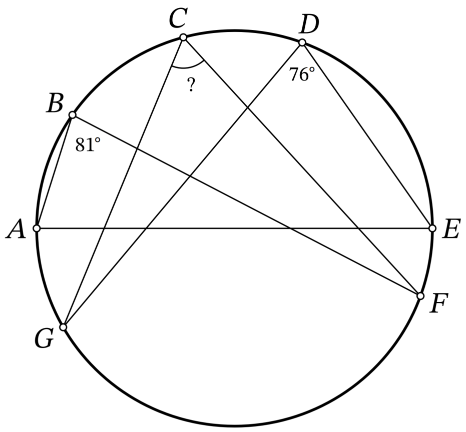
7.10.6. (*«Росатом», 2016, 10.5*) Математической моделью шарикового подшипника является кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями K_1 и K_2 радиусов r (внутреннее) и R (внешнее), а также n окружностей (шариков) радиуса ρ, расположенных внутри кольца, касающихся между собой и окружностей K_1 и K_2. Напишите формулу зависимости радиуса внешней окружности R от ρ и n.

7.10.7. (*Открытая олимпиада, 2018, 10.6*) Даны три окружности радиусов 2, 3 и 5, попарно касающиеся друг друга в точках A, B и C внешним образом. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

7.11 Четыре точки на окружности

Дополнительные задачи — в листке Четыре точки на окружности.

7.11.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 10.2*) На окружности по часовой стрелке расположены точки A, B, C, D, E, F, G, как изображено на рисунке. Известно, что AE — диаметр окружности. Также известно, что $\angle ABF = 81°$, $\angle EDG = 76°$. Сколько градусов составляет угол FCG?



7.11.2. (*САММАТ, 2023, 10.10*) Дан треугольник ABC с острым углом A такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Найти угол A треугольника ABC.

7.11.3. (*«Бельчонок», 2022, 10.4*) Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника KLM с углом $\angle L = = 30°$. Луч LO пересекает отрезок KM в точке Q. Точка P — середина дуги OM описанной окружности треугольника QOM, не содержащей точку Q. Докажите, что точки K, L, P, Q лежат на одной окружности.

7.11.4. (*«Бельчонок», 2023, 10.5*) В треугольнике ABC из вершины A проведены биссектриса AD и высота AH. На сторонах AB и AC как на диаметрах построены полуокружности, расположенные вне треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к AD пересекает полуокружность с диаметром AB в точке X, а полуокружность с диаметром AC в точке Y. Докажите, что точки X, Y, H, D лежат на одной окружности.

7.11.5. (*«Росатом», 2020, 10.5*) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE пересекающиеся в точке O. Угол DOC равен 58°. Найти углы треугольника ABC, если известно, что точки D, O, E и C лежат на одной окружности.

7.11.6. (*Открытая олимпиада, 2020, 10.7*) Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке X. Прямая AX пересекает окружность S_1 в точке A, а окружность S_2 в точке C. Прямая BX пересекает окружность S_1 в точке B, а окружность S_2 в точке D. Окружность S_3 касается прямой BD в точке B и пересекает луч XA в точках A и P. Докажите, что точки P, B, C и D лежат на одной окружности.

7.12 Конкуррентность

Дополнительные задачи — в листке Конкуррентность.

7.12.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 10.5*) Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через A, параллельна их линии центров и пересекает ω_1 и ω_2 вторично в точках C и D соответственно. Окружность ω_3 построена на CD как на диаметре и пересекает ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CP, DQ и AB пересекаются в одной точке.

7.13 Неравенство треугольника

Дополнительные задачи — в листке Неравенство треугольника.

7.13.1. (*САММАТ, 2023, 10.3*) На плоскости Oxy заданы две точки: $A(6,1)$ и $B(2,5)$. Найти наименьшую длину ломаной $AMNB$, если точка M лежит на оси Ox, а точка N — на оси Oy.

7.13.2. (*«Надежда энергетики», 2019, 10.3*) Два пловца проводят тренировки на карьере прямоугольной формы. Первому удобнее выходить на угол карьера, поэтому он проплывает по диагонали до противоположного угла и обратно. Второму пловцу удобнее начинать из точки, которая делит один из берегов карьера в отношении $2018 : 2019$. Он проплывает по четырехугольнику, посещая по одной точке на каждом берегу, и возвращается к месту старта. Может ли второй пловец так выбрать точки на трех других берегах, чтобы его путь был короче, чем у первого? Какое минимальное значение может иметь отношение длины большего пути к меньшему?

7.13.3. (*«Шаг в будущее», 2017, 10.6*) В прямоугольном треугольнике ABC: $\angle ACB = 90°$, $AC = 6$, $BC = 4$. На прямой BC отмечается такая точка D ($CD > BD$), что $\angle ADC = 45°$. На прямой AD отмечается такая точка E, что периметр треугольника CBE — наименьший из возможных. Затем, на прямой DC отмечается такая точка F, что периметр треугольника AFE — наименьший из возможных. Найти CF.

7.14 Геометрические задачи на экстремум

Дополнительные задачи — в листке Геометрические задачи на экстремум.

7.14.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 10.2*) Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Для каждого из углов каждого из треугольников MAB, MBC, MCD, MDA найдено его отличие от прямого угла (неотрицательное; например, для угла $70°$ отличие составляет $20°$, а для угла $130°$ оно равно $40°$). Какое максимальное значение может принимать минимальное из этих отличий?

7.14.2. (*«Надежда энергетики», 2023, 10.3*) Дан прямоугольный параллелепипед. Периметры каждой из его трех взаимно перпендикулярных граней равны сторонам нового прямоугольного параллелепипеда. Каким может быть минимальное отношение объема нового параллелепипеда к объему исходного?

7.14.3. (*ОММО, 2023.4*) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 9$, $BC = 2$ и боковыми сторонами $AB = 5$, $CD = 3\sqrt{2}$. Точка P на прямой BC такова, что периметр треугольника APD наименьший из возможных. Найдите этот периметр.

7.14.4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 10.4*) Среди всех вписанных четырёхугольников найдите четырёхугольник $ABCD$ с наименьшим периметром, в котором $BC = CD = AD$ и все попарные расстояния между точками A, B, C и D выражаются целыми числами. Чему равна площадь этого четырёхугольника?

7.14.5. (*«Надежда энергетики», 2017, 10.4*) Господин Бур Жуй, большой поклонник фэн-шуй, получил в наследство дом, представляющий собой в плане прямоугольный треугольник с катетами a и b. К каждой стороне треугольника он пристроил квадратные веранды. Те 6 вершин этих трех квадратов, которые не совпадают с вершинами треугольника, образуют шестиугольник. В этот шестиугольник и был в итоге превращен дом, который построил господин Бур Жуй. Найдите его площадь. При каком соотношении катетов a и b отношение площади нового дома к площади исходного будет минимальным.

7.14.6. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 10.5*) У Пети и Васи есть равные бумажные прямоугольные треугольники с катетами a и b. Мальчики хотят вырезать по квадрату наибольшей площади так, чтобы у Петиного квадрата одна вершина совпадала с вершиной прямого угла треугольника, а Васин квадрат имел бы сторону, лежащую на гипотенузе.

а) Найдите размеры обоих квадратов;

б) Всегда ли (т. е. при любых ли катетах) Петин квадрат будет больше Васиного?

7.14.7. (*«Росатом», 2015, 10.5*) Острый угол треугольника ABC равен $30°$. Найти максимальное возможное значение отношения $r : R$, где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей.

7.14.8. (*«Росатом», 2017, 10.5*) Точки M, N, P и Q расположены на сторонах квадрата со стороной $a > 5$ так, что отрезки MN и PQ не пересекаются и имеют длины 3 и 5 соответственно. Найти наименьшее возможное значение расстояния между серединами этих отрезков.

7.14.9. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.5*) Из равнобедренного треугольника с углом α при вершине и площадью 1 вырезают максимальный по площади круг, а из него — максимальный по площади треугольник, подобный исходному. Какое наибольшее и наименьшее значение принимает площадь $S(\alpha)$ полученного в итоге треугольника при $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$?

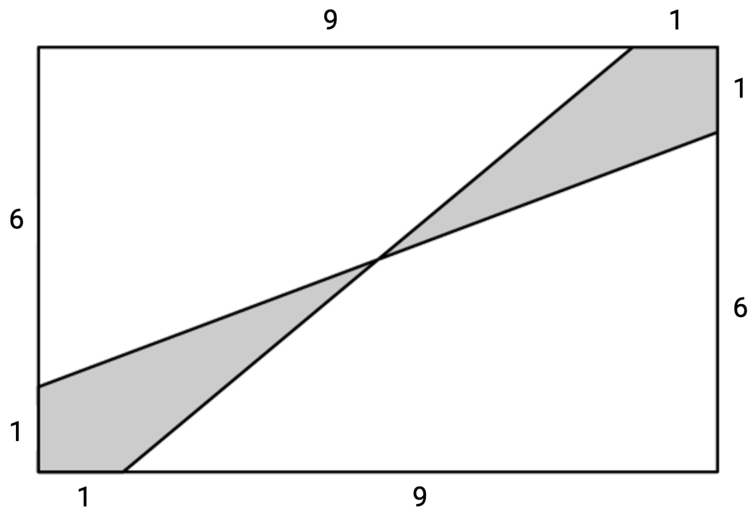
7.14.10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 10–11.5*) Бумажный квадрат площади 17 согнули по прямой, проходящей через его центр, после чего соприкасающиеся части склеили. Найдите максимально возможную площадь получившейся бумажной фигуры.

7.14.11. (*«Росатом», 2021, 10.5*) Муравейник, в котором проживает муравей Гоша, имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром 50 см и плоским углом при вершине $\pi/6$. Гоша совершил прогулку по поверхности муравейника, выйдя из вершины основания, возвратившись в нее же и побывав на всех боковых гранях муравейника. Во время своей прогулки Гоша никогда не приближался к вершине муравейника ближе, чем на 30 см. Какое наименьшее возможное расстояние мог преодолеть Гоша за время прогулки?

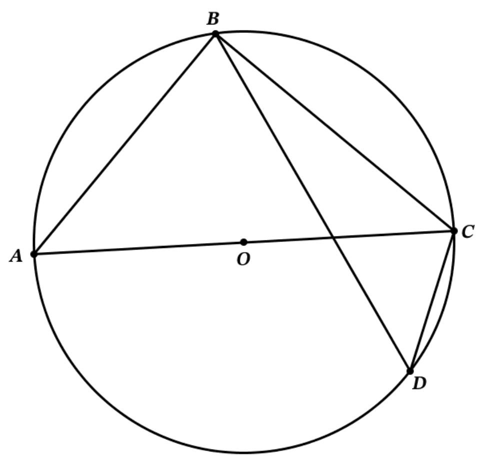
7.14.12. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 10.7*) Даны два подобных треугольника, стороны первого из которых соответственно в два раза больше высот второго. Найдите наибольшее возможное значение коэффициента подобия первого треугольника ко второму.

7.15 Площадь

7.15.1. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 10.3*) Дан прямоугольник 7×10. Чему равна площадь закрашенной фигуры?



7.15.2. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 10.7*) На окружности ω по разные стороны от диаметра AC расположены точки B и D. Известно, что $AB = 3\sqrt{6}$, $CD = 3$, а площадь треугольника ABC в три раза больше площади треугольника BCD. Найдите радиус окружности ω.



7.15.3. (*«Бельчонок», 2018, 10.3*) Выпуклый 77-угольник имеет периметр 108. Докажите, что найдутся три вершины, образующие треугольник с площадью меньше 1.

7.15.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 10.3*) Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), в которую вписана окружность с центром O. Прямая BO пересекает нижнее основание AD в точке M. Докажите соотношение для площадей

$$S_{AOM} + S_{COD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

7.15.5. (*Олимпиада КФУ, 2023, 10.4*) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 5$; $BC = 8$. Биссектриса угла B пересекает описанную вокруг треугольника окружность в точке D. а) Известно, что площадь треугольника ABD равна 10. Найти площадь треугольника BCD. б) Может ли оказаться, что S_{ABD} равна 100?

7.15.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 10.4*) На плоскости отмечены пять точек, любые три из которых образуют треугольник площади не меньше 2. Докажите, что найдутся 3 точки, образующие треугольник площади не меньше 3.

7.15.7. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2016, 10.5*) В квадрате со стороной 1 отметили 53 точки, из которых четыре являются вершинами квадрата, а остальные (произвольные) 49 точек лежат внутри. Докажите, что найдется треугольник с отмеченными вершинами, имеющий площадь не более 0,01.

7.15.8. (*Открытая олимпиада, 2015, 10.6*) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 21$. На стороне AB отмечена точка K, на стороне AC — точка L, на стороне BC — точка N. Известно, что $AK = 4$, $CN = 1$, $CL = \frac{20}{21}$. Через точку K провели прямую, параллельную NL, она пересекла сторону AC в точке M. Найдите площадь четырёхугольника $NLMK$.

7.15.9. (*Открытая олимпиада, 2016, 10.7*) Дан треугольник ABC, точка I — центр его вписанной окружности. На лучах BI и CI соответственно отмечены такие (отличные от I) точки E и F, что $AI = AE = AF$. Докажите, что площади треугольников BIF и CIE равны.

7.16 Векторы в планиметрии

Дополнительные задачи — в листке Векторы в планиметрии.

7.16.1. (*«Шаг в будущее», 2017, 10.4*) На окружности с равными интервалами расположены 5 точек A, B, C, D и E. Даны два вектора $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$. Выразите вектор $\overrightarrow{EC}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

7.16.2. (*ОММО, 2022.4*) Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $BC = 8$ и $AC = 4$. Найдите длину стороны AB, если длина вектора $4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$ равна 10.

7.16.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2022, 10.5*) На координатной плоскости дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин, отличный от квадрата. Докажите, что можно провести несколько прямых, параллельных сторонам прямоугольника, так, что прямоугольник разобьется на квадраты с целочисленными координатами вершин.

7.17 Геометрические неравенства

Дополнительные задачи — в листке Неравенства в геометрии.

7.17.1. (*«Бельчонок», 2021, 10.3*) Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 30. Докажите, что радиус вписанной окружности r больше 12.

7.17.2. (*ОММО, 2021.4*) В треугольнике ABC длины сторон равны 4, 5 и $\sqrt{17}$. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех и только тех точек X внутри треугольника ABC, для которых выполняется условие $XA^2 + XB^2 + XC^2 \leqslant 21$.

7.17.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 10.5*) Угол между диагоналями трапеции равен $60°$. Докажите, что сумма длин боковых сторон не меньше, чем длина большего основания.

7.17.4. (*Открытая олимпиада, 2019, 10.6*) Окружность пересекает все стороны остроугольного треугольника ABC, периметр которого 2. a, b, c — отрезки касательных к этой окружности из вершин A, B и C. Докажите, что $a + b + c \leqslant 1$.

7.17.5. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.7*) В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD перпендикулярны. Сравните величины $BC + AD$ и $AB + CD$.

7.17.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 10.8*) Дана трапеция $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$. Докажите, что для любой точки X внутри трапеции справедливо неравенство $XD - XA - XB \leqslant CD$.

7.18 Построения

7.18.1. (*«Бельчонок», 2018, 10.4*) В плоскости даны треугольник ABC и прямая α. С помощью циркуля и линейки разделите треугольник на 7 равновеликих частей прямыми, параллельными прямой α в случаях а) прямая α параллельна основанию BC треугольника; б) прямая α не параллельна ни одной из сторон треугольника.

7.18.2. (*«Росатом», 2019, 10.4*) Даны два отрезка длины 1 и $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ соответственно. С помощью циркуля и линейки без делений построить отрезок длины $\sqrt{5}$.

7.19 Теоремы Менелая и Чевы

7.19.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 10.3*) Точки H, K и M лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, в котором AH является высотой. Докажите, что AH служит биссектрисой угла KHM тогда и только тогда, когда AH, BK и CM пересекаются в одной точке.

7.19.2. (*Открытая олимпиада, 2021, 10.4*) На стороне BC треугольника ABC отмечены точки A_1 и A_2 такие, что $BA_1 = 6$, $A_1A_2 = 8$, $CA_2 = 4$. На стороне AC отмечены точки B_1 и B_2 такие, что $AB_1 = 9$, $CB_2 = 6$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке K, а AA_2 и BB_2 — в точке L. Точки K, L и C лежат на одной прямой. Найдите B_1B_2.

7.19.3. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 10.5*) Пусть все углы треугольника ABC меньше $120°$ и $AB \neq AC$. Рассмотрим точку T внутри треугольника, для которой $\angle BTC = \angle CTA = \angle ATB = 120°$. Пусть прямая BT пересекает сторону AC в точке E, а прямая CT пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC пересекаются в некоторой точке M, причём $MB : MC = TB : TC$.

7.20 Геометрическое место точек

7.20.1. (*Всесиб., 2018, 10.3*) Различные прямые a и b пересекаются в точке O. Рассмотрим всевозможные отрезки AB длины l, концы A и B которых лежат на a и b соответственно, и обозначим за P точку пересечения перпендикуляров к прямым a и b, восстановленным из A и B соответственно. Найти геометрическое место точек P.

7.20.2. (*«Надежда энергетики», 2018, 10.3*) В Царстве Колдовской Энергии на плоской равнине стоит заколдованная трасформаторная будка: наблюдателю, смотрящему параллельно земле, она видна только под углом $45°$. В поперечном сечении будка квадратная со стороной L локтей. Опишите геометрическое место точек на равнине, из которых будка видна, и определите минимальное и максимальное расстояние, с которого видна заколдованная будка. Углом, под которым фигура F видна из точки P, называется наименьший угол с вершиной P, содержащий фигуру F. В данном случае этот угол расположен в плоскости поперечного сечения будки.

7.21 Разные планиметрические задачи

7.21.1. (*Всесиб., 2020, 10.2*) На сторонах AB, BC, AC равностороннего треугольника ABC отмечены точки P и Q, R, S соответственно, такие, что $AP = CS$, $BQ = CR$. Доказать, что угол между отрезками PR и QS равен 60 градусов.

7.21.2. (*Всесиб., 2015, 10.3*) В равностороннем треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки P и Q соответственно такие, что $AP : PB = CQ : QA = 2$. Пусть O — точка пересечения отрезков CP и BQ, доказать, что угол AOC — прямой.

7.21.3. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 10.3*) На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle BAM = \angle BCA$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной AM.

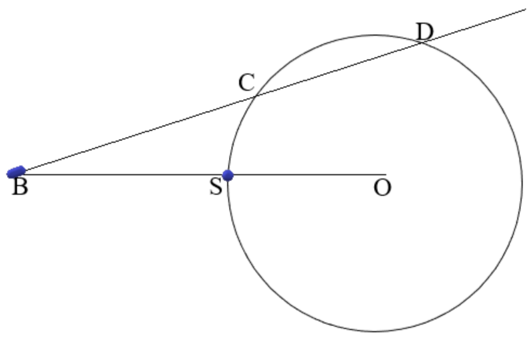
7.21.4. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 10.3*) Дана прямая на плоскости и на ней отмечено несколько (больше двух) точек. Докажите, что можно отметить еще одну точку на плоскости (вне данной прямой) так, чтобы среди всех треугольников с отмеченными вершинами было больше половины остроугольных.

7.21.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 10.4*) Докажите, что при любом натуральном $n \leqslant 2017$ прямоугольник $1 \times n$ можно разрезать на 50 частей и составить из них квадрат.

7.21.6. (*Всесиб., 2023, 10.4*) Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка P такая, что углы PAC и PBC равны. Пусть M — середина стороны AB, а точки K и L — основания перпендикуляров, опущенных из P на стороны AC и BC соответственно. Докажите, что длины отрезков MK и ML равны.

7.21.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 10.5*) В плоском мире есть два острова, которые имеют форму выпуклых многоугольников. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.

7.21.8. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.6*) Для получения фотоснимков небесных тел используются космические зонды — автономные роботы, оснащенные ракетными двигателями, собственными энергетическими установками, системами радиосвязи и навигации, научными приборами. И все это управляется бортовыми компьютерами. Например, благодаря таким зондам успешно выполнена программа исследования Сатурна и его крупнейшего спутника Титана, удивительно похожего на Землю. При изучении одного из спутников Сатурна с радиусом орбиты $R \approx 1{,}2 \cdot 10^5$ км возникла нештатная ситуация: при пролете зонда сквозь плоскость колец Сатурна бортовая поворотная платформа с телекамерами была заклинена частицами этих колец. В результате смогли получить четкие снимки только одной стороны спутника. Для получения снимков обратной стороны спутника было принято решение продолжить полет зонда и встретить спутник в другой точке пространства, для чего пришлось скорректировать скорость движения зонда.



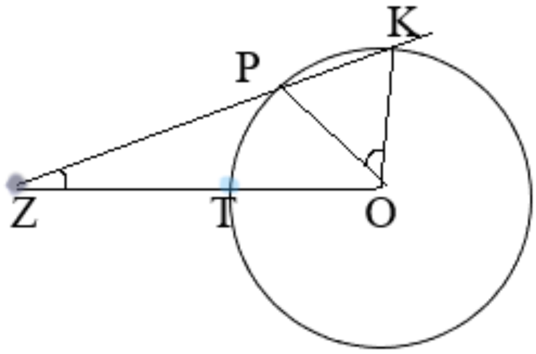
Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Траекторию движения спутника (орбиту) вокруг Сатурна (точка O) считаем круговой с радиусом $R = 1{,}2 \cdot 10^5$ км, скорость движения спутника постоянна и равна $V_T = 3{,}27$ км/с. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна$V_1 = 6$ км/с, а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках C и D. Согласно заложенной программе, съемка поверхности спутника зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой спутника (точки C и D). Когда спутник (точка S) оказывается строго на прямой между центром Сатурна (точка O) и подзондовой точкой (точка B), запускается таймер ($t_0 = 0$). При этом спутник и подзондовая точка встречаются в точке C через время $t = 2 \cdot 10^4$ с. После съемки над точкой C скорость зонда меняется так, чтобы над точко D оказаться одновременно со спутником для фотографирования его обратной стороны. Скорость подзондовой точки на участке CD постоянна.

Определите расстояние между подзондовой точкой и спутником (считая его материальной точкой) в начальный момент времени t_0, а также скорость подзондовой точки V_2 на участке CD.

В расчетах используйте приближенные значения скорости спутника и числа π — округлите их до целых значений.

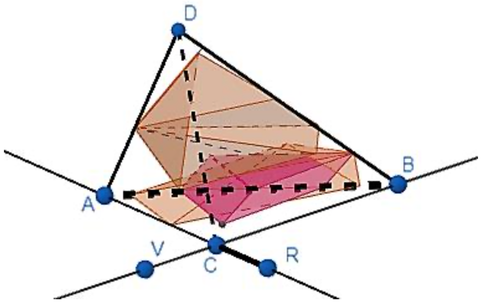
7.21.9. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.6*) Астрономы обнаружили за планетой Сатурн новое небесное тело, движущееся по круговой орбите, для изучения которого был направлен научно-исследовательский зонд — автономный робот, оснащенный ракетными двигателями, собственной энергетической установкой, системами радиосвязи и навигации, научными приборами, фото- и видеотехникой. И все это управляется бортовыми компьютерами. Для изучения найденного объекта было принято решение произвести фотосъемку в двух точках его орбиты. После съемок в первой точке, потребовалось скорректировать скорость движения зонда, чтобы иметь возможность сделать еще один фотоснимок небесного тела в другой точке его орбиты.

Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Считаем изучаемый объект (небесное тело) и исследовательский зонд материальными точками, небесное тело движется по круговой орбите с центром в точке O и радиусом $R = 1{,}2 \cdot 10^6$ км с постоянной угловой скоростью $\omega = 0{,}25 \cdot 10^{-5}$ рад/с. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна V_1, а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках P и K. Согласно заложенной программе, съемка небесного тела зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой тела (точки P и K). Когда небесное тело (точка T) оказывается строго на прямой между точкой O и подзондовой точкой (точка Z), запускается таймер ($t_0 = 0$). В точке P небесное тело и подзондовая точка находятся в одно и тоже время, и осуществляется съемка, после чего скорость зонда меняется так, чтобы над точкой K вновь оказаться одновременно с телом для его повторного фотографирования. Скорость подзондовой точки на участке PK постоянна.



Определите расстояние между подзондовой точкой и изучаемым телом в начальный момент времени t_0, а также скорость подзондовой точки V_2 на участке PK, если центральный угол POK равен углу PZO и в полтора раза меньше центрального угла POT. В расчетах используйте приближенное значение числа π — округлите его до целого значения.

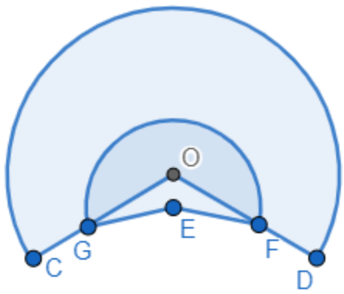
7.21.10. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.6*) По программе реновации было решено разобрать старый дом и на его месте построить новый. При разборе старого дома возникло две проблемы. 1) Скопление строительного лома перекрыло подход к некоторым точкам строительной площадки, между которыми необходимо было промерить расстояние. Прораб промерил расстояние от точки C до точки A и от точки C до точки B (см. рис.). Оказалось, что $AC = 4$ м, $BC = 10$ м. Кроме того, ему удалось определить расстояния $CR = 1$ м, $VR = 3$ м, $CV = 2{,}5$ м для точек R и V, расположенных на продолжениях прямых дорожек, соединяющих объекты A, C и C, B соответственно.



Определите расстояние между точками A и B (промерить это расстояние на площадке не представлялось возможным из-за завала) и площадь части строительной площадки $CADB$ при условии, что расстояния CD и BD вдвое больше расстояния CB.

2) Из земли торчал негнущийся кусок арматуры — штырь, высота которого над землей 0,5 м. Попытки выдернуть его из земли не привели к успеху. Тогда рабочие сдвинули его бульдозером так, что конец штыря сравнялся с поверхностью земли и оказался на расстоянии 1,5 м от первоначальной точки входа штыря в землю. Найдите длину части штыря, скрытую в земле, предполагая, что его нижний конец не сместился.

7.21.11. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.6*) Для улучшения жилищных условий горожан в некоторых городах реализуется программа реновации — замена не подлежащего сохранению жилищного фонда путем его сноса и капитального строительства на высвобождаемой территории. Как правило, разбор старых домов и расчистка площадки под новое строительство происходит на ограниченной территории. Поэтому нужна техника (вращающиеся экскаваторы), которая могла бы расчистить наибольшую площадь с наименьшим количеством перемещений.



На рисунке изображена схема рабочей зоны и схема перемещений экскаватора. Встав в начальную точку E, экскаватор первым делом очищает ближнюю к себе площадку (на ней в основном находится металлический лом). Эта площадка представляет из себя сектор окружности, ограниченный большой дугой FG окружности с центром в точке E и радиусом $2\sqrt{2}$ м, а также отрезками ее радиусов EF и EG. Затем экскаватор перемещается в точку O и очищает дальнюю от себя площадку (на ней в основном находится кирпичный лом). Эта площадка с внешней стороны ограничена большой дугой CD окружности с центром в точке O и радиусом 6 м, отрезками CG и FD (точки F и G находятся на соответствующих радиусах OC и OD), а с внутренней стороны — большой дугой FG первой окружности с центром в точке E.

Определите площадь под кирпичным ломом (без металлических остатков), если точка O находится в 2 метрах от точки E по направлению к центру металлического завала, угол EOD равен 45°.

7.21.12. (*ОММО, 2021.8*) Дан равнобедренный треугольник KLM ($KL = LM$) с углом при вершине, равным 114°. Точка O расположена внутри треугольника KLM так, что $\angle OMK = 30°$, а $\angle OKM = 27°$. Найдите величину угла $\angle LOM$.

7.22 Метод координат

Дополнительные задачи — в листке Формула расстояния между точками.

7.22.1. (*«Надежда энергетики», 2020, 10.1*) Необходимо построить дорогу, вымощенную бетонными плитами. Она пройдет в местности, где есть прямолинейный участок линии электропередач (ЛЭП) и завод по производству плит, находящийся на расстоянии d от ЛЭП ($d \neq 0$). Для ритмичной работы требуется, чтобы каждая точка строящейся дороги была одинаково удалена от завода и от ЛЭП. Какой линией на плоскости описывается строящаяся дорога? Введите подходящую систему координат и найдите уравнение линии, описывающей дорогу, в этой системе координат; определите тип линии.

7.22.2. (*«Шаг в будущее», 2021, 10.6*) Для производственного процесса необходимо изготовить лекало из металлической пластины-заготовки, которая имеет форму прямоугольной трапеции. В заготовке имеется технологическое отверстие, которое можно принять за точку, расположенную в 2 см от меньшей боковой стороны, имеющей длину 4,5 см, и в 0,5 см от большего основания трапеции. Длины оснований трапеции равны 1,5 см и 6 см. Требуется провести на пластине кривую линию разреза так, чтобы расстояние от любой точки этой линии до большего основания трапеции было бы равно расстоянию от этой точки до технологического отверстия. Определите, в каком отношении линия разреза делит каждую из боковых сторон пластины.

Глава 8

Стереометрия

8.1 Сечения

Дополнительные задачи — в листке Сечения.

8.1.1. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.5*) Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCD$-EF образовано плоскостью, проходящей через центр основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF, сторона основания пирамиды равна 8, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно $3\sqrt{13/7}$. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

8.1.2. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.5*) Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCD$-EF образовано плоскостью, проходящей через вершину C основания $ABCDEF$ и параллельной медиане BM боковой грани SAB и апофеме SN боковой грани SAF, сторона основания пирамиды равна 2, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 1. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

8.2 Пирамида

Дополнительные задачи — в листке Пирамида.

8.2.1. (*«Ломоносов», 2022, 10.2*) Треугольная пирамидка, все рёбра которой имеют длину 6 см, стоит на плоском столе. Пирамидку перекатывают по столу через рёбра 6 раз таким образом, что одна из её вершин всё время остаётся неподвижной, при этом два раза подряд через одно и то же ребро пирамидку не перекатывают. Найдите длину траектории, по которой за время этих перекатываний перемещается подвижная вершина пирамиды.

8.2.2. (*САММАТ, 2023, 10.8*) Существует ли четырехугольная пирамида, две противоположные боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания пирамиды? Ответ обосновать.

8.2.3. (*«Шаг в будущее», 2021, 10.5*) Боковые ребра TA, TB, и TC тетраэдра $TABC$ попарно перпендикулярны, ребро TA наклонено к плоскости основания ABC под углом $30°$. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, косинус угла AHB равен $-1/3$. Найдите угол между ребром TC и плоскостью ABC.

8.2.4. (*«Шаг в будущее», 2021, 10.5*) Боковые ребра TA, TB, и TC тетраэдра $TABC$ попарно перпендикулярны, TH — высота тетраэдра, $\angle TAH = 30°$, $\angle TBH = 45°$, $BC = \sqrt{6}$. Точка K, лежащая в плоскости основания ABC, равноудалена от боковых граней тетраэдра $TABC$. Найдите HK.

8.2.5. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.5*) В тетраэдре $ABCD$ суммы трёх плоских углов при каждой вершине равны $180°$. Найдите объём тетраэдра, если $BC = 4$, $\cos\angle BAC = 3/4$, $\sin\angle CBD = 5\sqrt{7}/16$.

8.2.6. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.6*) В неправильной пирамиде $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна $180°$. Найдите площадь поверхности этой пирамиды, если площадь грани BCD равна S и $AB = CD$, $AD = BC$.

8.2.7. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.6*) В неправильной пирамиде $ABCD$ суммы плоских углов при вершинах A и B одинаковы, суммы плоских углов при вершинах C и D тоже одинаковы, а сумма площадей граней ABD и ACD равна S. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

8.3 Призма

Дополнительные задачи — в листке Призма.

8.3.1. (*ОММО, 2021.10*) Вася смастерил из стеклянных стержней призму. Призма имеет 171 боковое ребро и столько же рёбер в каждом из оснований. Вася задумался: «Можно ли параллельно перенести каждое из 513 рёбер призмы так, чтобы они образовали замкнутую ломаную в пространстве?» Возможна ли реализация Васиной задумки?

8.4 Комбинации фигур

Дополнительные задачи — в листке Комбинации фигур.

8.4.1. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.5*) Внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ расположена правильная четырехугольная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$, основание $KLMN$ которой лежит в плоскости ABC. Центр основания $KLMN$ призмы расположен на отрезке AC, $KL \parallel AC$, $KN \parallel BD$ (точки K и B лежат по одну сторону от AC), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро KK_1 призмы равно 3. Вершины L_1 и M_1 верхнего основания призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ принадлежат боковым граням SBC и SCD пирамиды $SABCD$ соответственно. Плоскость γ проходит через прямую BD и точку L_1. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью γ, если сторона пирамиды равна $8\sqrt{2}$, а её высота равна 12.

Глава 9

Комбинаторика и вероятность

9.1 Перебор вариантов

Дополнительные задачи — в листке Перебор вариантов.

9.1.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 10.4*) Сколько решений в целых числах x, y имеет уравнение

$$|3x + 2y| + |2x + y| = 100?$$

9.1.2. (*«Бельчонок», 2022, 10.5*) Печенье макаруны трёх сортов (фисташковые, ванильные, карамельные) упаковывают в стандартные коробки по 20 изделий в каждой. Каждая коробка содержит макаруны всех видов, причем порядок их расположения в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов макарунов при условии, что в коробке фисташковых макарунов не менее 2 и не более 12, ванильных тоже не менее 2 и не более 12, а карамельных не менее 3 и не более 14?

9.1.3. (*«Бельчонок», 2022, 10.5*) Печенье макаруны трёх сортов (шоколадные, малиновые, апельсиновые) упаковывают в стандартные коробки по 20 изделий в каждой. Каждая коробка содержит макаруны всех видов, причем порядок их расположения в коробке не существенен. Сколько можно составить различных наборов макарунов при условии, что в коробке шоколадных макарунов не менее 3 и не более 14, малиновых тоже не менее 3 и не более 14, а апельсиновых не менее 2 и не более 12?

9.1.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 10.5*) Натуральное число n назовём *кубоватым*, если $n^3 + 13n - 273$ является кубом натурального числа. Найдите сумму всех кубоватых чисел.

9.1.5. (*«Ломоносов», 2022, 10.7*) Есть некоторое количество одинаковых целлофановых пакетов, которые можно вкладывать друг в друга. Если внутри одного из пакетов оказались все остальные пакеты, назовём такую ситуацию «пакетом пакетов». Посчитайте, сколькими способами можно сложить «пакет пакетов» из 10 пакетов.

Пояснение. *Обозначим скобочками пакет.*
Если у нас был один пакет, то способ сложить «пакет пакетов» всего один: ().
Два пакета тоже можно сложить всего одним способом: (()).
Три пакета можно сложить двумя разными способами: (()()) и ((())), и т. д.
Порядок пакетов внутри не важен. Например, вариант ((())()) не отличается от (()(())).

9.2 Правила суммы и произведения

Дополнительные задачи — в листке Правила суммы и произведения.

9.2.1. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.2*) Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

9.2.2. (*«Бельчонок», 2022, 10.2*) На 8 шарах написано по числу: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Сколькими способами можно разложить шары в три коробки так, чтобы ни в одной коробке не было числа и его делителя?

9.2.3. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.2*) Имеется куб, зафиксированный на ножках, и шесть различных красок. Сколькими способами можно покрасить все грани куба (каждую в один цвет, все краски использовать не обязательно) так, чтобы соседние грани (имеющие общее ребро) были разного цвета?

9.2.4. (*«Физтех», 2023, 10.2*) Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

9.2.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 10.2*) Сколько пятизначных чисел делятся на свою последнюю цифру?

9.2.6. (*САММАТ, 2023, 10.4*) Сколько существует различных восьмизначных чисел, делящихся на 11, в десятичной записи которых ровно по одному разу встречаются цифры $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а оставшиеся две цифры — нули?

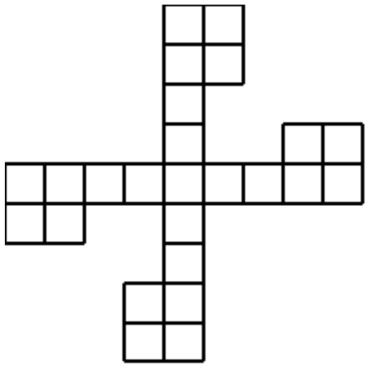
9.2.7. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.5*) Дан куб $ABCDA'B'$-$C'D'$. На отрезках AB', AC, AD', $B'C$, CD', $B'D'$ расставляют стрелки и затем находят сумму $\vec{S}$ всех 6 полученных векторов. Сколько различных векторов $\vec{S}$ можно получить, по-разному расставляя стрелки на указанных отрезках?

9.2.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.5*) Дан куб, на ребрах которого расставляют стрелки и затем находят сумму $\vec{S}$ всех 12 полученных векторов. Сколько различных векторов $\vec{S}$ можно получить, по-разному расставляя стрелки на ребрах?

9.2.9. (*Всесиб., 2018, 10.5*) Найти число всевозможных расстановок фишек по одной в некоторых клетках шахматной доски 8 на 8 таких, что количество фишек, стоящих в каждой строке различно и количество фишек, стоящих в каждом столбце различно.

9.2.10. (*«Надежда энергетики», 2017, 10.5*) Прямоугольный параллелепипед $a \times b \times c$ составлен из кубиков со стороной 1. Сколько в нем можно выделить различных меньших параллелепипедов из таких кубиков?

9.2.11. (*Открытая олимпиада, 2016, 10.5*) Сколькими способами фигуру, изображённую на рисунке, можно раскрасить по клеткам в синий, красный и белый цвета так, чтобы соседние (т. е. имеющие общие стороны) клетки были раскрашены в разные цвета?



9.2.12. (*«Физтех», 2021, 10.5*) На плоскости с заданной прямоугольной декартовой системой координат нарисован квадрат с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 59)$, $(59; 59)$ и $(59; 0)$. Найдите количество способов выбрать два узла сетки внутри этого квадрата (не включая его границу) так, чтобы хотя бы один из этих узлов лежал на одной из прямых $y = x$ или $y = 59 - x$, но оба выбранных узла не лежали ни на какой прямой параллельной любой из координатных осей.

9.2.13. (*«Бельчонок», 2023, 10.5*) 10 девушек встали в хоровод. Из всех компаний этих девушек численностью не менее 6 человек сколько таких, в которые входят хотя бы 3 девушки, стоящие в хороводе подряд?

9.2.14. (*«Бельчонок», 2023, 10.5*) 10 девушек встали в хоровод. Из всех компаний этих девушек численностью от 5 до 7 человек включительно сколько таких, в которые входят хотя бы 3 девушки, стоящие в хороводе подряд?

9.2.15. (*«Бельчонок», 2023, 10.5*) 10 девушек встали в хоровод. Из всех компаний этих девушек численностью не более 6 человек сколько таких, в которые входят хотя бы 3 девушки, стоящие в хороводе подряд?

9.3 Количество делителей числа

Дополнительные задачи — в листке Функции делителей.

9.3.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 10.2*) Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение $x + y + 2xy = 2023$?

9.3.2. (*«Ломоносов», 2020, 9.6, 10.3*) Найдите разложение на простые множители наименьшего натурального числа, имеющего ровно 2020 различных натуральных делителей.

9.3.3. (*«Росатом», 2022, 10.3*) Сколько существует различных троек натуральных чисел a, b, c, для которых

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}\,?$$

(Тройки, отличающиеся порядком следования элементов, считаются различными.)

9.4 Функции делителей

Дополнительные задачи — в листке Функции делителей.

9.4.1. (*Открытая олимпиада, 2020, 10.3*) Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $x(y+z)=1000$.

9.4.2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 10.5*) Для натурального числа N выписали все его натуральные делители p_l в порядке возрастания: $1=p_1<p_2<\ldots<p_k=N$. Обозначим количество натуральных делителей числа N через $\sigma(N)$. Найдите все возможные значения $\sigma(N^3)$, если известно, что

$$p_3\cdot p_4\cdot p_{1876}\cdot p_{1877}\geqslant N^2.$$

9.4.3. (*Открытая олимпиада, 2022, 10.6*) Обозначим за $\sigma(n)$ сумму всех делителей числа n (включая само число). Для каких n выполняется неравенство $\sigma(8n)>\sigma(9n)$?

9.5 Сочетания

Дополнительные задачи — в листке Размещения, перестановки и сочетания.

9.5.1. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.1*) Девочки мелом нарисовали на асфальте 7 прямых, параллельных бордюру. Мальчики пририсовали 5 параллельных между собой прямых, каждая из которых пересекает все прямые, нарисованные девочками. Сколько всего параллелограммов получилось при пересечении этих прямых?

9.5.2. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.3*) Сколько существует различных многочленов вида

$$P(x)=x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E,$$

где A, B, C, D, E — целые положительные числа, для которых $P(-1)=11$, $P(1)=21$?

9.5.3. (*«Надежда энергетики», 2017, 10.3*) Найдите все решения уравнения

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0.$$

9.5.4. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.5*) Назовем число «новогодним», если в нем все цифры различные, оно не начинается с цифры 2 и при вычеркивании некоторого числа его цифр можно получить 2018. Сколько существует различных семизначных «новогодних» чисел?

9.5.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 10.5*) В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.

Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.

Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры); числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трёх разрядах цифры совпадают, и только в четвёртом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).

Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?

9.5.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 10.6*) Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m-угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m. Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k-угольника. Их оказалось 2015. Найдите m.

9.5.7. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 10.8*) Сколько существует троек натуральных чисел (a, b, c), удовлетворяющих равенству

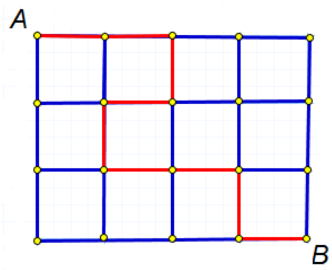
$$\max(a, b) \cdot \max(c, 12) = \min(a, c) \cdot \min(b, 24)?$$

Здесь $\min(x, y)$ — это наименьшее из чисел x и y, а $\max(x, y)$ — наибольшее из чисел x и y.

9.6 Количество маршрутов

Дополнительные задачи — в листке Размещения, перестановки и сочетания.

9.6.1. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.1*) В детской игре шарик может двигаться по желобкам, которые являются ребрами квадратов со стороной 1 дм, и которые вместе составляют прямоугольную сеть размера 3 дм на 4 дм (см. рис.). Какова длина кратчайшего пути шарика из точки A в точку B? Сколько существует различных путей этой минимальной длины?



9.7 Перестановки с повторениями. Полиномиальная формула

Дополнительные задачи — в листке Размещения, перестановки и сочетания.

9.7.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 10.3*) Пусть $a_1 + \ldots + a_m = n$, где $a_1, \ldots, a_m$ — натуральные числа. Докажите, что $n!$ делится на произведение $a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_m!$.

9.7.2. (*Открытая олимпиада, 2021, 10.3*) У Миши есть 10 карточек, на каждой написана одна буква. Он может составить из них $7! = 5040$ различных десятибуквенных слов. Сколько у него может быть различных букв на карточках? (Приведите все варианты и докажите, что других нет).

9.7.3. (*«Бельчонок», 2023, 10.4*) Семеро бельчат (Рыжий, Серый, Белый, Чёрный, Полосатый, Усатый, Хвостатый) должны встать в ряд. Рыжий хочет стоять слева от Серого. Белый хочет стоять слева от Чёрного. Чёрный хочет стоять слева от Полосатого. Сколькими способами бельчата могли встать в ряд, чтобы выполнилось **хотя бы** одно пожелание?

9.7.4. (*Открытая олимпиада, 2022, 10.4*) Петя написал на доске число 11234567, а затем все числа, получающиеся из него перестановкой цифр, в порядке возрастания. Каким по счёту оказалось написано число 46753211?

9.7.5. (*ОММО, 2021.7*) При каком наибольшем значении параметра a коэффициент при x^4 в разложении многочлена $(1-2x+ax^2)^8$ будет равен -1540?

9.8 Геометрическая комбинаторика

Дополнительные задачи — в листке Геометрическая комбинаторика.

9.8.1. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 10.2*) Сколько существует прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021?

9.8.2. (*«Физтех», 2022, 10.2*) Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

9.8.3. (*Всесиб., 2017, 10.4*) Назовём *змейкой* в выпуклом n-угольнике незамкнутую, не самопересекающуюся ломаную из $n-1$ звеньев, множество вершин которой совпадает с множеством всех вершин n-угольника. Найти число различных змеек в n-угольнике. (Змейки равны, если совпадают, как геометрические места точек. Например, число змеек в треугольнике равно 3.)

9.8.4. (*«Физтех», 2023, 10.5*) На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

9.8.5. (*«Росатом», 2022, 10.4*) Сколько существует треугольников с периметром 200, длины сторон которых целые числа?

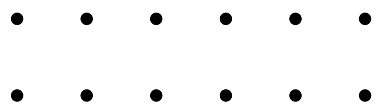
9.8.6. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 10.5*) Сколько существует

а) прямоугольников;

б) прямоугольных треугольников

с целочисленными сторонами, у которых площадь численно равна периметру? (Равные фигуры считаются за одну).

9.8.7. (*«Ломоносов», 2023, 10.8*) Есть два ряда — верхний и нижний, каждый из 6 точек (см. рисунок). Проводят отрезки с концами в противоположных рядах так, чтобы из каждой точки выходил ровно один отрезок. Сколько существует способов провести отрезки, чтобы среди всех пар отрезков было ровно 7 пар пересекающихся отрезков?



9.9 Комбинаторика на клетчатой бумаге

Дополнительные задачи — в листке Комбинаторика на клетчатой бумаге.

9.9.1. (*Всеросс., 2022, МЭ, 10.4*) Дана клетчатая прямоугольная таблица. Известно, что существует:

- ровно 940 способов вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×2;
- ровно 894 способа вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×3.

Сколько существует способов вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×5? При подсчёте количества способов вырезания прямоугольника учитываются и вертикальные, и горизонтальные расположения.

9.9.2. (*Открытая олимпиада, 2020, 10.6*) Сколькими способами можно раскрасить клетки таблицы 10×10 в пять цветов так, чтобы в каждом кресте из пяти клеток и любой фигуре, которая может быть его частью, все цвета были различными?

9.10 Рекуррентные соотношения в комбинаторике

Дополнительные задачи — в листке Рекуррентные соотношения в комбинаторике.

9.10.1. (*САММАТ, 2022, 10.9*) В школе математики и программирования лестница с первого этажа на второй этаж состоит из двух пролетов, состоящих из 8 и 9 ступенек. Сколькими способами десятиклассник Вася может спуститься по ней, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки?

9.11 Формула включений и исключений

Дополнительные задачи — в листке Формула включений и исключений.

9.11.1. (*«Бельчонок», 2022, 10.5*) Вася хочет покрасить клетки прямоугольника 3×4 так, чтобы незакрашенной оставалась или первая строка, или последняя строка, или два средних столбца. Сколькими способами он может это сделать?

9.12 Принцип Дирихле

Дополнительные задачи — в листке Принцип Дирихле.

9.12.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 10.7*) В конференции принял участие 281 сотрудник из 7 различных филиалов фирмы. В каждой группе из шести участников конференции по меньшей мере двое были одного возраста. Докажите, что среди всех участников можно найти пятерых одного возраста, одного пола и из одного филиала фирмы.

9.13 Знакомства

9.13.1. (*Открытая олимпиада, 2019, 10.1*) В классе у каждого либо 5, либо 6 друзей (дружба взаимна), причём у любых двух друзей разное количество друзей в классе. Какое наименьшее количество учеников, большее 0 может быть в классе?

9.13.2. (*«Курчатов», 2023, 10.4*) В компании 50 детей, некоторые из них дружат (дружба взаимна). Известно, что любую группу из 10 детей можно разбить на 5 пар так, чтобы в каждой паре дети дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей в этой компании.

9.13.3. (*Открытая олимпиада, 2023, 10.7*) На конференцию приехали 100 учёных. Оказалось, что у любых двоих как минимум двое общих знакомых. Докажите, что у кого-то из них хотя бы 15 знакомых.

9.13.4. (*Открытая олимпиада, 2015, 10.8*) На площади собралось огромное количество юношей и девушек, некоторые из которых знакомы друг с другом. Всегда ли возможно раздать им галстуки 99 цветов (каждый человек получает один галстук) таким образом, что если какой-то юноша знаком хотя бы с 2015 девушками, то среди этих девушек есть две в галстуках разного цвета и наоборот, если какая-то девушка знакома хотя бы с 2015 юношами, среди них есть юноши в галстуках разных цветов?

9.13.5. (*ОММО, 2023.10*) В группе из 80 человек некоторые знакомы друг с другом (знакомства взаимны). Известно, что в группе есть человек, который знает ровно 1 из оставшихся, человек, который знает ровно 2 из оставшихся, $\ldots$, человек, который знает ровно 54 из оставшихся. Докажите, что в группе есть три человека, каждые два из которых знакомы.

9.14 Графы

Дополнительные задачи — в листке Графы.

9.14.1. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.2*) Можно ли из 37 ниток сплести сетку так, чтобы каждая нитка была связана ровно с пятью другими?

9.14.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 10.5*) а) Докажите, что первые 11 натуральных чисел $1, 2, \ldots, 11$ нельзя переставить так, чтобы соседние числа отличались либо на 3, либо на 5.

б) Можно ли сделать это для чисел $1, 2, \ldots, 12$?

9.14.3. (*Открытая олимпиада, 2021, 10.8*) В некоторой стране 100 городов. Каждый из них связан двусторонним авиасообщением с тремя другими городами. При этом из любого города можно добраться в любой другой, возможно, с пересадками. Вася хочется добраться из города А в город Б. Какого наименьшего числа перелётов ему гарантированно хватит?

9.15 Классическая вероятность

Дополнительные задачи — в листке Вероятность.

9.15.1. (*«Бельчонок», 2023, 10.1*) У Вани 6 монет, у Маши 5 монет. Каждый бросает все свои монеты. Какова вероятность, что у Вани выпадет больше решек, чем у Маши?

9.15.2. (*«Шаг в будущее», 2023, 10.1*) Игральный кубик подбрасывают дважды, при этом вычисляют и записывают сумму выпавших очков. Такую процедуру повторяют три раза (всего совершают шесть подбрасываний). Найдите вероятность того, что только одна из трех записанных сумм кратна трем.

9.15.3. (*«Бельчонок», 2023, 10.2*) Света выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, а Костя выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Каждый из них записывает свои цифры в порядке убывания. Какова вероятность, что трёхзначное число Кости больше трёхзначного числа Светы?

9.15.4. (*«Бельчонок», 2023, 10.2*) Лена выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а Федя выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Каждый из них записывает свои цифры в порядке убывания. Какова вероятность, что трёхзначное число Феди больше трёхзначного числа Лены?

9.15.5. (*«Бельчонок», 2023, 10.2*) Ира выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а Артём выбирает три разных цифры из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Каждый из них записывает свои цифры в порядке убывания. Какова вероятность, что трёхзначное число Артёма больше трёхзначного числа Иры?

9.15.6. (*«Шаг в будущее», 2017, 10.2*) На автобазе имеется в наличии 5 красных, 6 синих и 5 желтых автобусов. Случайным образом составляется колонна из 7 автобусов. Какова вероятность, что первым в колонне будет красный автобус, а среди остальных нет красных, но зато ровно 4 синих?

9.15.7. (*«Шаг в будущее», 2022, 10.2*) В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/3$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее 2. Лаборант поочередно случайно выбирает две колбы, и первую из них полностью заполняет 70-процентным раствором соли, а вторую полностью заполняет 40-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих двух колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 50% до 60% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать.

9.15.8. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 10.3*) Двое бросают монету. Первый бросил ее 2018 раз, а второй 2019 раз. Предполагается, что монета симметричная, т. е. выпадение орла и решки при бросании равновероятно. Какова вероятность, что у второго монета упала орлом вверх большее число раз, чем у первого?

9.15.9. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.3*) На новогодний корпоратив четверо сотрудников привели по одному ребенку. Для них в течение вечера разыгрывали шесть подарков. Какова вероятность, что ни один ребенок не ушел с праздника без подарка?

9.15.10. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 10.4*) Двое по очереди бросают симметричную монету (вероятности выпадения орла и решки одинаковы). Тот, у кого первым выпадает орёл, выигрывает партию. Каковы вероятности выигрыша каждого из них?

9.15.11. (*«Бельчонок», 2021, 10.4*) Какова вероятность, что произведение 15 случайно выбранных однозначных натуральных чисел кратно 14?

9.15.12. (*«Бельчонок», 2021, 10.5*) Из вершин правильного $(2n+1)$-угольника случайным образом выбирают 3 вершины. При каких n вероятность того, что центр $(2n+1)$-угольника лежит внутри треугольника, образованного выбранными вершинами, меньше 0,3?

9.15.13. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 10.7*) В комнате стоят два ящика. В первом лежат n белых и m черных шаров, во втором — достаточно много черных. Из первого ящика наугад вынимают два шара. Если они одного цвета, то черный шар из второго ящика перекладывают в первый, если шары разного цвета, то белый шар возвращают в первый ящик. Так поступают до тех пор, пока в первом ящике не останется один шар. С какой вероятностью он будет белым?

9.15.14. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2020, 10.8*) В классе 25 учащихся. Для них были куплены билеты на один ряд в кинотеатре, состоящий из 25 мест, пронумерованных от 1 до 25. Несмотря на то, что каждый школьник получил индивидуальный билет, они сели на места своего ряда случайным образом. Какова вероятность того, что у каждого школьника для номера места N, на которое он сел, и номера места M, указанного в билете, выполнено неравенство $M \geqslant N - 3$?

9.16 Геометрическая вероятность

Дополнительные задачи — в листке Вероятность.

9.16.1. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 10.5*) Соревнование *по бегу на непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке длиной 1 километр случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B, после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Найдите *медианное значение* длины этой дуги, то есть такое m, что длина дуги будет превышать m с вероятностью ровно 50%.

Глава 10

Алгоритмы, процессы, игры

10.1 Алгоритмы и операции

Дополнительные задачи — в листке Процессы и операции.

10.1.1. (*Всеросс., 2020, РЭ, 10.6*) На доске написано выражение $\cos x$. Разрешается сложить или перемножить несколько написанных на доске выражений (одно выражение может использоваться несколько раз) и дописать полученное новое выражение на доску. Можно ли за несколько действий получить выражение, которое при $x = \pi$ принимает значение 0?

10.1.2. (*«Бельчонок», 2022, 10.1*) Известно, что $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Докажите, что для любого нечётного натурального n существуют n различных чисел, сумма кубов которых равна кубу натурального числа.

10.1.3. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 10.4*) В центральной клетке доски 21×21 находится фишка. За один ход можно передвинуть фишку в соседнюю по стороне клетку. Алина сделала 10 ходов. Сколько существует клеток, где может оказаться фишка?

10.1.4. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.3*) Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет — номер 1, красный — 5, оранжевый — 13, желтый — 19, зеленый — 23, голубой — 53, синий — 55, фиолетовый — 83, черный — 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n \leqslant 17$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $3n - 2$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n \geqslant 18$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129 - 2n|$. Изначально пиксель имел красный цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель?

10.1.5. (*ОММО, 2021.3*) В хирургическом отделении 4 операционных: I, II, III и IV. Утром они все были пусты. В какой-то момент началась операция в операционной I, через некоторое время — в операционной II, ещё через некоторое время — в III, а потом и в IV.

Закончились все четыре операции одновременно, и суммарная их продолжительность составила 2 часа 32 минуты. За 30 минут до момента завершения всех операций суммарная продолжительность уже идущих составляла 52 минуты, а ещё за 10 минут до этого — 30 минут. Продолжительности операций в каких операционных можно определить по этим данным, а в каких — нельзя?

10.1.6. (*«Курчатов», 2020, 10.4*) У Поликарпа есть 2 коробки, в первой из которых лежит n монет, а вторая пустая. За один ход он может либо переложить одну монету из первой коробки во вторую, либо убрать из первой коробки ровно k монет, где k — количество монет во второй коробке. При каких n Поликарп может сделать первую коробку пустой не более чем за 10 ходов?

10.1.7. (*«Шаг в будущее», 2016, 10.4*) На шахматной доске 8×8 расставили 64 шашки с номерами от 1 до 64. 64 ученика по очереди подходят к ней и переворачивают только те шашки, номера которых делятся нацело на порядковый номер очередного ученика. «Дамка» — это шашка, которая перевернута нечетное количество раз. Сколько «дамок» будет на доске, после того как последний ученик отойдет от нее?

10.1.8. (*«Шаг в будущее», 2018, 10.4*) По кругу, на котором расположены точки с номерами от 1 до 2018, начиная с первой точки, движется аппарат и стирает каждую вторую точку по ходу пока не останется одна. Какой на ней будет номер? (Сначала стирается точка с номером 2, затем с номером 4 и т. д.).

10.1.9. (*«Курчатов», 2022, 10.4*) Покупатель пришел в антикварный магазин. Торговец выложил на стол 2022 монеты, среди которых есть настоящие и фальшивые, и предупредил покупателя, что настоящих монет среди них больше половины. Для покупателя все монеты внешне неотличимы, а торговец знает, какие именно монеты настоящие, а какие — фальшивые.

За один ход происходит следующее:

- покупатель указывает на любые две монеты,
- торговец говорит, одного ли они типа,
- покупатель убирает одну из этих двух монет со стола.

Может ли покупатель добиться того, чтобы спустя 2021 ход на столе гарантированно осталась настоящая монета?

10.1.10. (*Всеросс., 2023, МЭ, 10.5*) Однажды зимой 43 ребёнка бросались снежками. Каждый из них бросил ровно один снежок в кого-то другого. Известно, что:

- первый бросил снежок в того, кто бросил снежок во второго,
- второй бросил снежок в того, кто бросил снежок в третьего,
- ...
- сорок третий бросил снежок в того, кто бросил снежок в первого.

Какой номер у того, кто бросил снежок в третьего?

10.1.11. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 10.5*) Квадратный лист бумаги со стороной $5\sqrt{2}-5$ сложили, как показано на рисунке 1, получив новый квадрат. Полученный квадрат снова таким же образом сложили (рис. 2) и получили третий квадрат.

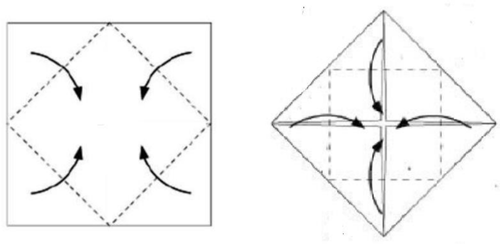


Рис. 1 Рис. 2

Подобную операцию проделали еще четыре раза. Полученный седьмой квадрат полностью развернули до первоначального квадрата. Чему равна длина линий изгибов на развернутом квадрате?

10.1.12. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2021, 10.5*) Дано 10 чисел: 10, 20, 30, …, 100. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые три и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 10 числами проделывается та же операция и т. д. Можно ли в результате нескольких операций получить:

а) все одинаковые числа?

б) все числа, равные 200?

10.1.13. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2019, 10.5*) Дан неравносторонний треугольник со сторонами a, b, c. Если существует треугольник со сторонами $a+b-c$, $b+c-a$, $a+c-b$, то с новым треугольником проделывают ту же процедуру, и т. д., в противном случае процесс заканчивается.

а) Может ли в этом процессе встретиться треугольник, подобный исходному?

б) Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

10.1.14. (*Всесиб., 2015, 10.5*) Окружность разбита на 21 равную дугу двадцатью одной точкой, являющимися вершинами правильного 21-угольника, каждая вершина окрашена в один из трёх цветов, все три цвета присутствуют. Доказать, что всегда можно выбрать по одной вершине каждого цвета так, что образованный этими вершинами треугольник содержит центр окружности.

10.1.15. (*«Надежда энергетики», 2020, 10.5*) Юный хакер желает изменить оценки в электронном журнале. Но при изменении одних оценок изменяются и другие, а именно:

а) если он увеличивает на 2 количество пятерок, то при этом количество двоек уменьшается на 1;

б) если он увеличивает на 1 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 2;

в) если он уменьшает на 2 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 1;

г) если он уменьшает на 1 количество пятерок, то количество двоек уменьшается на 2.

Может ли он, совершая такие операции, превратить свои 3 пятерки и 30 двоек в 30 пятерок и 3 двойки?

10.1.16. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 10.6*) На столе лежат 28 конфет. Петя считает некоторые из них вкусными. Вася за один ход может указать любой набор конфет и спросить Петю, сколько из них вкусных. Как Васе гарантированно найти все вкусные конфеты… (а) за 21 ход; (б) за 20 ходов?

10.1.17. (*«Ломоносов», 2023, 10.7*) На подвешенном в воздухе кубике Рубика, на одном из его 54 квадратиков, сидит жучок. В какой-то момент он начинает движение по поверхности куба, передвигаясь за каждую секунду на соседний квадратик, т. е. на квадратик, имеющий общую сторону с текущим. Соседний квадратик для первого перемещения был выбран произвольно, а затем жучок следовал таким правилам:

1. при 2-м, 4-м и других четных перемещениях жучок не менял направления своего движения, т. е. покидал квадратик через сторону, противоположную той, через которую он на этот квадратик попал;

2. при 3-м, 5-м и других нечетных перемещениях жучок поворачивал направо (относительно своего движения).

Через 2023 с после начала движения жучок обратил внимание на то, что уже был на этом же квадратике 5 с назад. Через какое наименьшее число секунд после 2023-й жучок опять окажется на этом квадратике?

10.1.18. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2019, 10.8*) В фойе банка по кругу расставлены n стульев. На эти стулья хотят сесть n посетителей. Первый посетитель выбирает свой стул произвольно. Затем $(k+1)$-й посетитель садится на k-ое место справа от k-го посетителя (для $1 \leqslant k \leqslant n-1$). Никакой стул не может быть занят более, чем одним посетителем. Чему может быть равно n, если известно, что на каждом стуле в итоге оказался ровно один человек? Найдите все варианты.

10.1.19. (*Открытая олимпиада, 2023, 10.8*) В клубе «Безумный шляпник» помимо председателя состоят ещё 222 джентльмена. Как-то раз председатель решил подарить каждому из остальных членов клуба новую шляпу с нанесённым на неё именем хозяина. Однако, произошла путаница и шляпы оказались перепутаны. Председатель придумал план по устранению этого беспорядка. Каждый день будет вызывать к себе пятерых джентльменов, усаживать их за круглый стол и просить каждого передать шляпу своему левому соседу. Оказалось, что с помощью такого плана действительно можно передать все шляпы их законным владельцам. Докажите, что председатель может гарантированно справиться с этим за 55 дней.

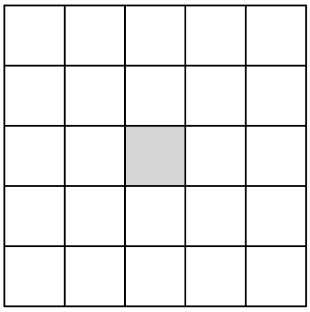
10.1.20. (*Открытая олимпиада, 2018, 10.8*) На клетчатой доске 9×9 расположены 324 фишки. Соседними будем называть во-первых клетки, имеющие общую сторону, а во-вторых, две крайние клетки одной вертикали или горизонтали. Таким образом, у каждой клетки будет ровно 4 соседних.

За один ход разрешается взять 4 фишки, лежащие на одной клетке, и переложить их на 4 соседние клетки. При любой ли начальной расстановке фишек можно добиться того, чтобы на всех клетках оказалось поровну фишек?

10.2 Таблицы

Дополнительные задачи — в листке Числовые таблицы.

10.2.1. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 10.1*) В каждую клетку таблицы 5×5 невидимыми чернилами вписано натуральное число. Известно, что сумма всех чисел равна 200, а сумма трёх чисел, находящихся внутри любого прямоугольника 1×3, равна 23. Чему равно центральное число в таблице?



10.2.2. (*Всеросс., 2023, РЭ, 10.1*) В таблице 6×6 изначально записаны нули. За одну операцию можно выбрать одну клетку и заменить число, стоящее в ней, на любое целое число. Можно ли за 8 операций получить таблицу, в которой все 12 сумм чисел в строках и столбцах будут различными положительными числами?

10.2.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.2*) Таблица 4×4, составленная из 16 чисел, такова, что каждое число равно в ней сумме всех своих соседей по горизонтали и по вертикали. Каким наибольшим может быть количество положительных чисел в таблице?

10.2.4. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2023, 10.2*) Таблица 4×4, составленная из 16 чисел, такова, что каждое число в ней равно произведению всех своих соседей по горизонтали и по вертикали. Каким наибольшим может быть количество отрицательных чисел в таблице?

10.2.5. (*«Курчатов», 2020, 10.2*) В таблице 3×3 расставили натуральные числа (не обязательно различные) так, что суммы во всех строках и столбцах получились различными. Какое минимальное значение может принимать сумма чисел в таблице?

10.2.6. (*Всесиб., 2019, 10.3*) Пусть в каждой клетке квадратной таблицы n на n, где n — нечётно, стоит 1 или -1. Обозначим произведения всех чисел в первой, второй, ..., n-ой строках таблицы через a_1, a_2, ..., a_n, а в первом, втором, ..., n-ом столбцах — через b_1, b_2, ..., b_n. Доказать, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n \neq 0.$$

10.2.7. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.3*) Карта города разделена вертикальными и горизонтальными прямыми на n^2 областей, условно называемых «квадратами» и расположенных в n горизонтальных рядов и n колонок. В каждом «квадрате» располагают или не располагают одну трансформаторную подстанцию. Во всех рядах число подстанций различно. Может ли при этом число подстанций в каждой колонке не совпадать ни с одним числом подстанций в ряду? Если это возможно не всегда, то при каких условиях?

10.2.8. (*«Бельчонок», 2022, 10.3*) В таблице 10×10 расставлены различные натуральные числа от 1 до 100. Оказалось, что в каждой строке (слева направо) и в каждом столбце (снизу верх) числа идут в порядке возрастания. Найдите наибольшее возможное значение суммы чисел шестого столбца.

10.2.9. (*«Бельчонок», 2022, 10.3*) В клетках таблицы 7×7 расставлены числа -1, 0 и 1 так, что в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна 0. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел таблицы?

10.2.10. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 10.4*) Дана квадратная таблица, в некоторых клетках которой стоят крестики. Назовем строку таблицы нечетной, если в ней нечетное количество крестиков. Аналогично, в нечетном столбце — нечетное количество крестиков.

а) Может ли оказаться так, что в таблице ровно 20 нечетных строк и 15 нечетных столбцов?

б) Можно ли в таблице 16×16 расставить 126 крестиков так, чтобы все строки и столбцы оказались нечетными?

10.2.11. (*Всеросс., 2021, РЭ, 10.7*) Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

10.2.12. (*Открытая олимпиада, 2022, 10.7*) В таблице 7×7 какие-то клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали или вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

10.2.13. (*Открытая олимпиада, 2019, 10.7*) Можно ли расставить в квадратной таблице 100×100 числа от 0 до 9999 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма чисел была бы одинаковой?

10.2.14. (*Открытая олимпиада, 2017, 10.8*) Таблица 10×10 заполнена нулями. За одну операцию в таблице находится минимальное число (если таких несколько — выбирается любое) и к нему, а также ко всем числам, стоящим в соседних с ним по стороне или углу клетках, добавляется единица. Какое наибольшее число может оказаться в одной из клеток таблицы через 80 операций?

10.3 Игры и стратегии

Дополнительные задачи — в листке Игры и стратегии.

10.3.1. (*«Бельчонок», 2021, 10.1*) В прямоугольнике 27×72, разбитом на клетки 1×1, двое игроков ходят по очереди, закрашивая квадраты любого размера, в которых ещё нет закрашенных клеток. Можно закрашивать и квадрат 1×1, то есть 1 клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто всегда может выиграть, первый или второй?

10.3.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 10.1*) На доске написано число 2. Двое играют в игру, делая ходы по очереди: каждый из игроков своим ходом может написать на доске любую степень двойки (то есть число вида 2^k, $k \geqslant 1$). Игрок, после хода которого на доске появятся две одинаковые цифры, проигрывает. У кого из игроков (у того, кто начинает, или у его соперника) есть способ выиграть при любой игре другого? Как он должен действовать?

10.3.3. (*Всесиб., 2023, 10.2*) Вася и Петя играют в «Бери или дели». В этой игре сначала есть одна большая куча камней. Каждым ходом очередной игрок либо делит одну из уже имеющихся к моменту его хода куч любым способом на две меньших, либо забирает одну из уже имеющихся куч. Выигрывает игрок, после хода которого камней на поле вообще не останется. Игроки делают ходы по очереди, первым ход делает Вася, но этим и только этим ходом он не имеет права забрать всю кучу сразу. Кто из них победит в этой игре? Замечание: куча может содержать всего один камень.

10.3.4. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 10.2*) Есть 8 белых кубиков одинакового размера. Марине нужно покрасить 24 грани кубиков в синий цвет, а остальные 24 грани — в красный. После этого Катя склеивает из них куб $2\times2\times2$. Если на поверхности куба столько же синих квадратов, сколько и красных, то Катя побеждает. Если нет, то побеждает Марина. Сможет ли Марина покрасить кубики так, чтобы Катя не смогла достичь цели?

10.3.5. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 10.4*) Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска из 10 клеток. Каждым ходом игрок вписывает любую цифру в любую свободную клетку. Однако ходят они не по очереди. Сначала Петя делает столько ходов, сколько захочет (но меньше 10); потом он просит Васю сделать один ход; после этого Петя делает все оставшиеся ходы. Петя выиграет, если результирующее число окажется точным квадратом; в противном случае выигрывает Вася. При этом они считают, что число может начинаться с одного или нескольких нулей. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

10.3.6. (*«Ломоносов», 2022, 10.4*) По окружности выписаны 2022 единицы. Два игрока ходят по очереди: за один ход игрок стирает два соседних числа из написанных и пишет вместо них их сумму (один раз). Выигрывает тот, кто получит число 4. Если в конце игры остаётся одно число, не равное 4, игра оканчивается вничью. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу, и если да, то каким образом?

10.3.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2022, 10.5*) Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.

Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право выбрать одну из трёх колод:

а) такую же, как у первого;

б) состоящую только из синих карт;

в) состоящую из 15 синих и 15 зелёных карт.

Какая из этих колод даст второму игроку бóльшую вероятность выигрыша?

10.3.8. (*«Курчатов», 2021, 10.5*) Петя и Вася играют в следующую игру. У них есть клетчатый прямоугольник 1000×2020, первым ходит Петя. Своим ходом первый игрок делит прямоугольник на два меньших одним разрезом вдоль линии сетки. Затем второй игрок выбирает один из двух получившихся прямоугольников, на котором будет продолжаться игра (второй прямоугольник отбрасывается), и делит его на два меньших. Потом опять первый выбирает прямоугольник, на котором будет продолжаться игра, и т. д. Проигрывает тот, кто не может в свой ход разрезать прямоугольник. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

10.3.9. (*Открытая олимпиада, 2015, 10.7*) Петя и Вася играют в игру. У каждого есть по одному ходу: Петя рисует на плоскости два квадрата 3×3, а Вася меняет положение одного из квадратов при помощи параллельного переноса. Вася выигрывает, если после его хода площадь пересечения квадратов составляет хотя бы 7. Кто выигрывает при правильной игре?

10.3.10. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2018, 10.7*) Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

10.3.11. (*«Ломоносов», 2021, 10–11.7*) На столе лежат 2021 красных и 2022 зелёных камня. Аня и Петя делают ходы по очереди. Аня ходит первой. При каждом ходе игрок выбирает цвет и удаляет n камней этого цвета, где число n должно быть делителем текущего числа камней другого цвета. Кто возьмёт последний камень, тот выиграет. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

10.3.12. (*«Ломоносов», 2020, 10.8*) Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа $0, 1, 2, \ldots, 7, 8, 7, 6, \ldots, 2, 1$. За столом сидят 16 игроеов, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 13 вращений стола игрок номер 5 набрал в сумме 72 очка, а игрок номер 9 набрал в сумме 84 очка. Сколько очков набрал игрок номер 1?

10.4 Турниры

Дополнительные задачи — в листке Турниры.

10.4.1. (*Всесиб., 2017, 10.2*) Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 21 партию, а второй — 10. Сколько партий сыграл третий игрок?

10.4.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 10.8*) (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 10.3*) 14 теннисистов сыграли в однокруговом турнире (каждый игрок сыграл с каждым одну партию). Докажите, что найдутся такие три игрока, что каждый из остальных 11 игроков проиграл хотя бы одному из этой тройки. (Ничьих в теннисе не бывает).

10.5 Шахматные доски и фигуры

10.5.1. (*Всесиб., 2022, 10.1*) На шахматной доске 8 на 8 отмечены две произвольные клетки. Верно ли, что доску всегда можно разрезать по линиям сетки на две одинаковых части, каждая из которых содержит по одной отмеченной клетке?

10.5.2. (*Всесиб., 2021, 10.3*) Найти все натуральные n, для которых на клетчатой доске размера n на n клеток можно отметить n клеток, стоящих в разных горизонталях и разных вертикалях, которые можно последовательно обойти ходом шахматного коня, начиная с некоторой, не вставая на одну клетку дважды, и вернуться на исходную клетку. Конь при этом может вставать только на отмеченные клетки.

10.5.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2022, 10.8*) Клетки шахматной доски 12×12 раскрашены в 72 цвета так, что в каждый цвет покрашены ровно две клетки. Докажите, что на этой доске можно расставить 12 ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и никакие две из них не били друг друга. Две ладьи бьют друг друга, если они стоят в одной горизонтали или в одной вертикали доски.

Глава 11

Рассуждения и методы

11.1 Примеры и конструкции

Дополнительные задачи — в листке Примеры и конструкции.

11.1.1. (*Всеросс., 2022, МЭ, 10.1*) Найдите любое натуральное x такое, что значение выражения $2^x + 2^8 + 2^{11}$ является квадратом натурального числа.

11.1.2. (*Всеросс., 2020, РЭ, 10.1*) Найдите хотя бы одно четырёхзначное число, обладающее следующим свойством: если сумму всех цифр этого числа умножить на произведение всех его цифр, то в результате получится 3990.

11.1.3. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 10.1*) Какую клетку доски размера 9×9 можно вырезать так, чтобы оставшуюся часть доски можно было бы замостить прямоугольными плитками размера 1×5?

11.1.4. (*Всесиб., 2021, 10.2*) Разрезать правильный пятиугольник на несколько треугольников так, чтобы каждый из них граничил ровно с тремя другими. Граничить — значит иметь общий отрезок границы.

11.1.5. (*«Росатом», 2021, 10.4*) Найти шесть ненулевых целых чисел, произведение которых не меняется, если из каждого них вычесть двойку.

11.1.6. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 10.5*) У каждой из двух сестёр в кармане от 1 до 1000 конфет. Папа по очереди задаёт сёстрам (то одной, то другой) вопросы, на которые можно ответить «да» или «нет». Он хочет, задав не более чем по 6 вопросов каждой из сестёр, выяснить, верно ли, что вместе у них больше 1000 конфет. При этом ни одна из девочек не знает, сколько конфет в кармане у другой, поэтому каждую сестру можно спрашивать только об её конфетах. Придумайте, как папе добиться цели.

11.2 Да или нет?

Дополнительные задачи — в листке Да или нет?.

11.2.1. (*Олимпиада КФУ, 2020, 10.1*) Провод длиной d метров разрезали на два куска. Можно ли из образовавшихся двух частей провода вырезать куски длиной 1, 2, 3, 6 и 12 метров, если

а) $d = 25$;

б) $d = 24{,}99$?

11.2.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2015, 10.1*) Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?

11.2.3. (*«Надежда энергетики», 2015, 10.1*) Станция связана линиями с несколькими предприятиями, при этом

1. среди любых 3 линий есть ведущая на предприятие города М;

2. среди любых 4 линий есть ведущая на предприятие поселка П.

Может ли число линий быть меньше 5? Если оно не меньше 5, то найдутся ли среди любых 5 линии, не ведущие ни в М, ни в П?

11.2.4. (*Всеросс., 2022, РЭ, 10.1*) Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

11.2.5. (*Всеросс., 2021, РЭ, 10.1*) Первоклассник составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и разбил шесть палочек на две группы по три палочки: в первой группе оказались три самых длинных палочки, а во второй — три самых коротких. Обязательно ли можно составить треугольник из трех палочек первой группы? А из трех палочек второй группы?

11.2.6. (*Всеросс., 2020, МЭ, 10.2*) Можно ли квадрат со стороной 8 полностью покрыть двумя кругами диаметра 9?

11.2.7. (*Всеросс., 2021, РЭ, 10.2*) Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам

$$x^4 - y^4 > x \quad \text{и} \quad y^4 - x^4 > y.$$

Может ли произведение xy равняться отрицательному числу?

11.2.8. (*Всеросс., 2023, РЭ, 10.2*) Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

11.2.9. (*Всесиб., 2016, 10.2*) По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один сантиметр направлен вдоль оси OX, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после 31-ого прыжка оказаться в начале координат?

11.2.10. (*Открытая олимпиада, 2017, 10.2*) На доске записали дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$, а также все остальные дроби, получающиеся из неё перестановкой чисел a, b, c, d, кроме имеющих тождественно нулевой знаменатель. Могло ли так получится, что среди выписанных дробей ровно 7 различных?

11.2.11. (*Олимпиада КФУ, 2019, 10.3*) Существует ли треугольник с углами A, B и C, для которых $\operatorname{tg} A = 1$, $\operatorname{tg} B = 2$, $\operatorname{tg} C = 3$?

11.2.12. (*САММАТ, 2022, 10.5*) В строку выписали 2022 натуральных чисел: a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{2022}. Верно ли, что-либо одно из них делится на 2022, либо сумма нескольких рядом стоящих делится на 2022? Вывод строго обосновать.

11.2.13. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2017, 10.4*) Имеется n гирек, каждая весит целое число граммов, а суммарный их вес равен 100 гр. Верно ли, что все гирьки всегда можно разложить на две чаши весов так, чтобы они уравновесились, если

а) $n = 50$;

б) $n = 51$?

11.2.14. (*Всеросс., 2022, ЗЭ, 10.5*) На доске написаны 11 целых чисел (не обязательно различных). Может ли оказаться, что произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести?

11.2.15. (*Всесиб., 2016, 10.5*) Найдутся ли пять последовательных натуральных чисел таких, что если обозначить их буквами a, b, c, d, e в некотором порядке, то выполнится равенство

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a) = (a+c)(c+e)(e+b)(b+d)(d+a)?$$

11.2.16. (*Олимпиада КФУ, 2023, 10.5*) На карточках написаны числа от 1 до 100. Людочке нужно выбрать 4 карточки так, чтобы сумма чисел на них была равна 50. а) Вовочка потерял какие-то 11 карточек. Может ли Людочка быть уверена, что сможет выполнить задание? б) Тот же вопрос, если Вовочка потерял 10 карточек.

11.2.17. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 10.7*) Обнаружилось, что на закрытии торгов курс акций некоторой компании в течении года каждый раз увеличивался или уменьшался ровно на $n\%$ по отношению к предыдущему закрытию. Существует ли такое натуральное значение n, при котором цена акций на закрытии торгов в течении года дважды принимала одно и то же значение?

11.2.18. (*ОММО, 2021.9*) Функция g определена на целых числах и принимает целые значения, причём $g(x) \neq x$ для каждого целого x. Назовём число a *красивым*, если для любого целого числа x выполнено $g(x) = g(a-x)$. Может ли каждое из чисел 739 и 741 быть красивым?

11.2.19. (*ОММО, 2022.10*) Пусть B — множество действительных чисел, не содержащее 0 и 1. Известно, что если $b \in B$, то $\frac{1}{b} \in B$ и $1 - \frac{1}{b} \in B$. Может ли в B быть ровно 1000 элементов?

11.3 Логические задачи

Дополнительные задачи — в листке Логические задачи.

11.3.1. (*Всеросс., 2022, МЭ, 10.2*) По кругу лежат 36 шариков, каждый из которых либо красный, либо синий (шарики каждого из этих цветов присутствуют). Известно, что:

- для любого красного шарика найдётся ровно один красный шарик такой, что между ними лежит ровно один шарик;
- для любого красного шарика найдётся ровно один красный шарик такой, что между ними лежат ровно три шарика.

1. Пусть нет двух рядом лежащих красных шариков. Сколько всего красных шариков может лежать по кругу? Укажите все возможные варианты.
2. Пусть есть два рядом лежащих красных шарика. Сколько всего красных шариков может лежать по кругу? Укажите все возможные варианты.

11.3.2. (*Всесиб., 2022, 10.2*) Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять натуральные числа x, y, z , такие, что можно записать по кругу в некотором порядке $x \geqslant 1$ раз букву A, $y \geqslant 1$ раз букву B и $z \geqslant 1$ раз букву C так, чтобы никакие две одинаковые буквы не были написаны рядом (не были соседними).

11.3.3. (*«Надежда энергетики», 2022, 10.4*) Охотник Пулька для своей собаки Бульки заказал на АлиЭкспресс три куля собачьего корма. Наутро после доставки один куль оказался съеден. Под подозрение попали четверо, и Незнайке удалось установить следующее.

1. Если алиби Пончика истинно, то Сиропчик также имеет алиби.
2. Если Пончик ел корм, то либо Сиропчик, либо Авоська тоже ел корм (либо оба вместе).
3. Из двух показаний: «Авоська ел корм», «Пончик не ел, но при этом ел Небоська» — хотя бы одно истинное.
4. Если Небоська ел корм, то также ел либо Авоська, либо Сиропчик (либо оба вместе).

Кого из подозреваемых Незнайка может гарантированно обвинить в поедании за ночь целого куля собачьего корма?

11.4 Рыцари и лжецы

Дополнительные задачи — в листках

- Рыцари и лжецы. Рассуждения
- Рыцари и лжецы. Уравнения

11.4.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 10.4*) В классе учатся N школьников: несколько отличников и 8 хулиганов. Отличники всегда говорят правду, а хулиганы всегда врут.

Однажды все ученики этого класса сели за круглый стол, и каждый из них заявил всем остальным: «Как минимум треть из вас — хулиганы!»

Чему может быть равно N? Укажите все возможные варианты.

11.4.2. (*«Бельчонок», 2020, 10.1*) На поляне в лесу за круглым столом собрались 450 бельчат. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый за столом сказал: «Из сидящего справа от меня и сидящего сразу за ним ровно один лжец». Сколько лжецов могло быть на поляне?

11.4.3. (*«Бельчонок», 2020, 10.1*) На поляне в лесу собрались бельчата. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Им задали вопрос: «Сколько лжецов находится на поляне?». От всех бельчат были получены все возможные ответы от 1 до 100 (некоторые, возможно, несколько раз). Сколько лжецов могло быть на поляне?

11.4.4. (*«Курчатов», 2022, 10.1*) За круглым столом сидят 60 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый из сидящих за столом произнес фразу: «Среди следующих 3 человек, сидящих справа от меня, не более одного рыцаря». Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других.

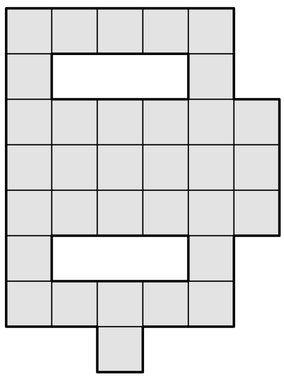
11.4.5. (*Всеросс., 2021, МЭ, 10.6*) На острове живут два племени: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды 80 человек сели за круглый стол, и каждый из них заявил: «Среди 11 человек, сидящих следом за мной по часовой стрелке, есть хотя бы 9 лжецов». Сколько рыцарей сидит за круглым столом? Укажите все возможные варианты.

11.4.6. (*Всеросс., 2022, МЭ, 10.7*) На острове живёт 23 рыцаря и 200 лжецов; имена всех жителей различны. Знающий об этом приехавший турист попросил каждого из 223 жителей написать на листке 200 имён лжецов. Каждый рыцарь написал верно 200 имён лжецов, а каждый лжец написал произвольный список из 200 имён, в котором точно нет его собственного имени. Какое наибольшее количество лжецов турист сможет гарантированно определить по этим данным?

11.5 Оценка плюс пример

Дополнительные задачи — в листке Оценка плюс пример.

11.5.1. (*Всеросс., 2021, МЭ, 10.1*) На какое наименьшее число клетчатых прямоугольников можно разрезать фигуру на рисунке ниже? (Каждый прямоугольник должен состоять из одной или нескольких клеток фигуры.)



11.5.2. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2018, 10.1*) В нескольких пакетах лежат 20 конфет, причём нет двух пакетов с одинаковым числом конфет и нет пустых пакетов. При этом некоторые пакеты могут лежать в других пакетах (тогда считается, что конфета, лежащая во внутреннем пакете, лежит и во внешнем). Но запрещено делать так, чтобы в каком-то пакете лежал пакет с пакетом внутри. Каково максимально возможное количество пакетов?

11.5.3. (*Открытая олимпиада, 2021, 10.1*) Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_7$ — простые числа (не обязательно различные). Какое наибольшее целое значение может принимать выражение

$$\sum_{i=1}^{97} \frac{p_i}{p_i^2+1} = \frac{p+1}{p_1^2+1} + \frac{p_2}{p_2^2+1} + \ldots + \frac{p_{97}}{p_{97}^2+1}?$$

11.5.4. (*«Надежда энергетики», 2016, 10.1*) В стране «Энергетика» 150 заводов и некоторые из них соединены автобусными маршрутами, которые не останавливаются нигде, кроме этих заводов. Оказалось, что любые четыре завода можно разбить на две пары так, что между заводами каждой пары ходит автобус. Найдите наименьшее число пар заводов, которые могут быть соединены автобусными маршрутами.

11.5.5. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 10.2*) На финансовом рынке начали работать тридцать мелких банков. Каждый из них может укрупняться, купив любой другой банк. Банк считается крупным, если он сумел купить не менее трех других (мелких или крупных) банков. Считается, что если крупный банк был куплен другим банком, то он по-прежнему остается крупным. Купленный банк повторно не продается. Какое наибольшее количество банков смогут стать крупными?

11.5.6. (*«Бельчонок», 2019, 10.2*) Каждый день со вторника по субботу бельчонок искал орехи в лесу. При этом каждый день он находил не больше орехов, чем в предыдущий день. Всего за 5 дней бельчонок нашёл 100 орехов. Какое наименьшее общее число орехов он мог найти за три дня — вторник, четверг и субботу?

11.5.7. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 10.2*) Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.

11.5.8. (*ОММО, 2023.2*) При каком наименьшем n можно покрасить каждое натуральное число в один из n цветов так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 5, на 8, на 10, на 13 и на 18, были покрашены в разные цвета?

11.5.9. (*ОММО, 2022.2*) Группа авантюристов показывает свою добычу. Известно, что ровно у 13 авантюристов есть рубины; ровно у 9 — изумруды; ровно у 15 — сапфиры; ровно у 6 — бриллианты. Кроме того, известно, что

- если у авантюриста есть сапфиры, то у него есть или изумруды, или бриллианты (но не то и другое одновременно);
- если у авантюриста есть изумруды, то у него есть или рубины, или сапфиры (но не то и другое одновременно).

Какое наименьшее количество авантюристов может быть в такой группе?

11.5.10. (*ОММО, 2021.2*) Даша написала на доске числа 9, 10, 11, ..., 22, а потом стёрла одно или несколько из них. Оказалось, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп так, чтобы суммы чисел в группах были равны. Какое наибольшее значение может иметь сумма оставшихся на доске чисел?

11.5.11. (*«Бельчонок», 2022, 10.3*) Клетчатый прямоугольник из 1000 клеток разбит по линиям сетки на прямоугольники одинаковой площади. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей?

11.5.12. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2023, 10.3*) Любимая телеигра Пети называется «Лотерея на диване». В течение игры телезрители могут присылать СМС-сообщения с трёхзначными числами, содержащими только цифры 1, 2, 3 и 4. В конце игры ведущий называет трёхзначное число, также состоящее только из этих цифр. СМС считается выигрышной, если число в ней отличается от числа ведущего не более чем в одном разряде (например, если ведущий назвал число 423, то сообщения 443 и 123 выигрышные, а 243 и 224 — нет).

Петя хочет отправить как можно меньше сообщений таким образом, чтобы хотя бы одно точно было выигрышным. Сколько СМС ему придётся отправить?

11.5.13. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2017, 10.3*) У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.

11.5.14. (*«Бельчонок», 2020, 10.4*) Катя записала на доске 2020 ненулевых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2020}$, а Лена дописала к ним на доску произведение всех пар соседних чисел x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, ..., $x_{2019}x_{2020}$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться на доске?

11.5.15. (*«Бельчонок», 2020, 10.4*) Катя выписывает на доску нечётные числа из отрезка $[16; 2020]$ так, что ни одно из выписанных чисел не делится ни на одно другое. Какое наибольшее количество чисел могло оказаться на доске?

11.5.16. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 10.4*) При каком наибольшем n множество $\{3, 4, 5, \ldots, n\}$ можно так покрасить в синий и красный цвета, чтобы произведение двух любых (в том числе одинаковых) чисел одного цвета имело другой цвет?

11.5.17. (*«Высшая проба», 2023, 10.4*) Однажды 45 друзей, живущих в разных уголках земного шара, захотели обменяться друг с другом новостями. Для этого они собираются устроить k видеовстреч, на каждой из которых каждый человек расскажет всем свои новости, а также все новости других людей, которые он узнал ранее.

Для видеовстреч было предложено 10 дней, но оказалось, что каждый из друзей может присутствовать только в какие-то 8 из них. При каком наименьшем натуральном k можно гарантированно выбрать k дней для видеовстреч из предложенных 10 так, чтобы каждый узнал новости каждого?

(Между предложенными днями у людей новых новостей не возникает, и никак иначе они друг с другом не общаются. В каждый из предложенных дней проходит одна видеовстреча, на которой собираются все, кто может в этот день присутствовать.)

11.5.18. (*Всеросс., 2020, МЭ, 10.5*) У царя восемь сыновей, и все дураки. Каждую ночь царь отправляет троих из них стеречь золотые яблоки от жар-птицы. Поймать жар-птицу царевичи не могут, винят в этом друг друга, и поэтому никакие двое не соглашаются пойти вместе в караул второй раз. Какое наибольшее количество ночей это может продолжаться?

11.5.19. (*«Бельчонок», 2022, 10.5*) Какое наибольшее число клеток квадрата 8×8 можно закрасить так, чтобы центры любых четырёх закрашенных клеток не являлись вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны краям квадрата?

11.5.20. (*«Надежда энергетики», 2018, 10.5*) Электрокабель длиной 21 м разрезают на 21 кусок. Для любых двух кусков их длины отличаются друг от друга не более, чем втрое. При каком наименьшем m обязательно найдутся два куска, длина которых отличаются друг от друга не более, чем в m раз?

11.5.21. (*Всесиб., 2023, 10.5*) Какое максимальное количество подмножеств из 4 элементов можно выбрать во множестве из 8 элементов так, чтобы пересечение любых трёх из выбранных подмножеств содержало не более одного элемента?

11.5.22. (*Всесиб., 2017, 10.5*) На доске написаны 10 натуральных чисел, среди которых могут быть равные, причём квадрат каждого из них делит сумму всех остальных. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди выписанных?

11.5.23. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 10.6*) На плоскости дана точка P. Какое наименьшее количество прямых, не проходящих через точку P, можно провести на плоскости так, чтобы любой луч с началом в точке P пересекал хотя бы 170 выбранных прямых?

11.5.24. (*Всеросс., 2021, РЭ, 10.6*) На доску выписали три натуральных числа: два десятизначных числа a и b, а также их сумму $a + b$. Какое наибольшее количество нечетных цифр могло быть выписано на доске?

11.5.25. (*Всеросс., 2023, МЭ, 10.7*) Карлсон за один приём пищи может съесть не более 5 кг варенья. Если он открывает новую банку варенья, то он обязан съесть её полностью за этот приём пищи. (Карлсон не будет открывать новую банку, если ему придётся съесть более 5 кг варенья вместе с только что съеденным.)

У Малыша есть несколько банок малинового варенья общей массой 50 кг, каждая из них весит не более 1 кг. За какое наименьшее количество приёмов пищи Карлсон гарантированно сможет съесть всё варенье?

11.5.26. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 10.8*) При каком наименьшем натуральном a на числовом интервале $(a, 3a)$ находится ровно 50 точных квадратов?

11.5.27. (*Всеросс., 2021, МЭ, 10.8*) Два разбойника украли 300 золотых монет. Они решили поделить их следующим образом: первый разбойник кладёт в мешочек несколько монет (возможно, все), а второй разбойник выбирает, кому этот мешочек достанется; затем это действие повторяется ещё несколько раз. Делёж заканчивается, когда

- либо все деньги кончились,
- либо кому-нибудь досталось 11 мешочков — в этом случае все остальные деньги сразу же достаются другому разбойнику.

Какое наибольшее количество монет может гарантированно получить первый разбойник?

11.6 От противного

Дополнительные задачи — в листке Доказательство от противного.

11.6.1. (*Всеросс., 2020, РЭ, 10.2*) Множество A состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Множество B также состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B.

11.6.2. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 10.3*) Бухгалтеры, менеджеры и экономисты банка сидят за круглым столом. Когда директор попросил поднять руку бухгалтеров, рядом с которыми сидит экономист, руку подняли 20 человек. А когда директор попросил поднять руку менеджеров, рядом с которыми сидит экономист, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку сидит сразу два экономиста.

11.6.3. (*Открытая олимпиада, 2015, 10.3*) Докажите, что не существует такой дробно-линейной функции, которая в сумме со своей обратной функцией даёт -2 в каждой точке, где обе эти функции определены. На всякий случай: постоянную функцию мы не считаем дробно-линейной.

11.6.4. (*Всеросс., 2021, РЭ, 10.3*) Пусть S — множество, состоящее из натуральных чисел. Оказалось, что для любого числа a из множества S существуют два числа b и c из множества S такие, что $a = \frac{b(3c-5)}{15}$. Докажите, что множество S бесконечно.

11.6.5. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2020, 10.5*) Дан выпуклый 37-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов. Докажите, что среди углов имеются хотя бы три одинаковых.

11.6.6. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2017, 10.8*) Десять пиратов делят между собой золотые и серебряные монеты. Серебряных монет в два раза больше, чем золотых. Они разделили золотые монеты так, что разница между количеством золотых монет у любых двух пиратов не делится на 10. Докажите, что они не смогут разделить серебряные монеты подобным образом.

11.6.7. (*Открытая олимпиада, 2016, 10.8*) В некоторой стране 100 городов и 146 авиакомпаний. Любые два города соединены двусторонними рейсами одной или нескольких авиакомпаний. Стоимость перелёта между городами, соединёнными рейсами k авиакомпаний, для всех компаний одинакова и составляет $1/k$. Оказалось, что не существует городов, между которыми с пересадкой можно добраться дешевле, чем прямым рейсом. Докажите, что можно найти маршрут с одной пересадкой, обе части которого стоят одинаково.

11.7 Принцип крайнего

Дополнительные задачи — в листке Принцип крайнего.

11.7.1. (*«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2021, 10.3*) В 1995 году создатель Шнобелевской премии Марк Абрахамс начал выпускать журнал «Анналы невероятных исследований». Этот журнал выходит нерегулярно, но не реже, чем 5 раз за 3 года. Докажите, что если журнал будет издаваться в таком режиме достаточно долго, то когда-нибудь его порядковый номер (выпуски нумеруются подряд, начиная с первого номера) совпадет с годом его выпуска.

11.8 Разбиения на пары и группы

Дополнительные задачи — в листке Разбиения на пары и группы.

11.8.1. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 10.5*) У Вики есть 60 карточек с числами от 1 до 60. Она хочет разбить все карточки на пары так, чтобы во всех парах получался один и тот же модуль разности чисел. Сколько существует способов так сделать?

11.8.2. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 10.4*) В финансовой компании 20 акционеров, их суммарный пакет — 2000 акций. Акционеров требуется разбить на две группы по 10 человек в каждой с пакетами по 1000 акций в группе. Докажите, что найдутся такие два акционера, что если один из них продаст другому часть своих акций, то нужное разбиение удастся провести.

11.8.3. (*«Курчатов», 2021, 10.4*) Пару натуральных чисел назовём *хорошей*, если одно из чисел делится нацело на другое. Числа от 1 до 30 разбили на 15 пар. Какое наибольшее количество хороших пар могло получиться?

11.8.4. (*Всесиб., 2020, 10.4*) На доске 10 на 10 часть клеток отмечена, причём никакие три отмеченные клетки не образуют уголок. Доказать, что доску можно разбить на домино из двух соседних по стороне клеток, содержащие не более одной отмеченной клетки каждое.

11.8.5. (*«Курчатов», 2023, 10.5*) Сумма нескольких (не обязательно различных) действительных чисел из отрезка $[0, 1]$ не превышает S. Найдите наибольшее действительное значение S, при котором эти числа гарантированно можно разделить на две группы, сумма чисел в одной из которых не больше 8, а сумма чисел в другой не больше 4.