Задачи с целыми числами. Стиль МИФИ

1 Десятичная запись

1. (*«Росатом», 2015, 7.2*) Первая цифра пятизначного натурального числа a равна 1. Если переставить единицу на последнее место, то полученное число будет на 5842 меньше утроенного числа a. Найти a.

$\boxed{a = 13451}$

2. (*«Росатом», 2015, 7.3*) Доказать, что любое целое число $a > 1$, в десятичной форме записи которого используется только одна цифра 1, не может быть квадратом целого числа.

□

3. (*«Росатом», 2025, 7.4*) Найдите натуральное число, у которого десятичная запись его квадрата начинается ровно с 2024 девяток.

$\boxed{10^{2025} - 5}$

4. (*«Росатом», 2023, 7.4*) Найти последнюю цифру в десятичной записи числа

$$1^2 + 2^2 + \ldots + 2023^2.$$

$\boxed{4}$

5. (*«Росатом», 2021, 9.3*) При каких натуральных n дробь $\frac{2}{n}$ может быть представлена периодической десятичной дробью вида $0{,}1(a_1a_2)$ с периодом, содержащим две различные цифры?

$\boxed{n = 11}$

6. (*«Росатом», 2023, 10.3*) Найти первые 100 цифр после запятой в десятичной форме записи числа $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{2023}$.

$\boxed{\text{Все 100 цифр после запятой — девятки}}$

2 Сумма цифр числа

7. (*«Росатом», 2024, 7.3*) Натуральное число на 3024 больше суммы своих цифр. Найдите наибольшее такое число.

$\boxed{3039}$

8. (*«Росатом», 2021, 7.3*) Про два двузначных, целых, положительных числа a и b известно, что

1) одно из них в три раза больше другого;

2) в их десятичной записи одна одинаковая цифра;

3) сумма цифр одного числа на 3 больше суммы цифр другого.

Найти эти числа.

$\boxed{a = 72,\ b = 24;\ a = 45,\ b = 15}$

9. (*«Росатом», 2021, 7.4*) Обозначим через $s(a)$ сумму цифр в десятичной записи натурального числа a. Найти все такие числа a, для которых $a^2 + s(a) = 1533$.

$\boxed{a = 39}$

10. (*«Росатом», 2017, 11.3*) Целые положительные шестизначные числа a_1 и a_2 таковы, что если к сумме цифр числа a_1 прибавить сумму цифр числа a_2, то получится 36. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение $a_1 \cdot a_2$.

$\boxed{9^2 \cdot 11^2 \cdot 10^8}$

3 Делимость

11. (*«Росатом», 2025, 7.2*) Число 1000 представлено в виде произведения двух натуральных чисел, в десятичной записи которых нет нулей. Найти сумму этих чисел.

$\boxed{133}$

12. (*«Росатом», 2024, 7.2*) Является ли число $a = 3^{18} + 10 \cdot 15^9 + 5^{20}$ простым?

$\boxed{\text{нет}}$

13. (*«Росатом», 2020, 7.2*) Каждое из четырех чисел 2, 4, 12, 32 являются суммой, разностью, произведением и частным двух натуральных чисел. Найти эти числа.

$\boxed{8 \text{ и } 4}$

14. (*«Росатом», 2018, 7.3*) Пятизначное четное число a, являющееся квадратом целого числа, делится на 21. Найти минимальное a, удовлетворяющее этим условиям.

$\boxed{a_{\min} = 15876}$

15. (*«Росатом», 2024, 8.1*) В 8$^{\underline{\text{а}}}$ классе не более 30 учеников: мальчиков и девочек. Известно, что 2/3 мальчиков дружат с девочками и 3/5 девочек дружат с мальчиками. Сколько в классе мальчиков и девочек?

$\boxed{9 \text{ мальчиков и } 10 \text{ девочек}}$

16. (*«Росатом», 2015, 8.2*) Найти все целые n, при которых выражение $n^2 - 2n - 3$ делится на 13 без остатка.

$\boxed{n = 13k - 1,\ k \in \mathbb{Z} \text{ или } n = 13k + 3,\ k \in \mathbb{Z}}$

17. (*«Росатом», 2023, 8.4*) Найти наименьшее натуральное число n, кратное 7, для которого выражение $n^2 + 25n + 100$ делится нацело на 115.

$\boxed{n = 210}$

18. (*«Росатом», 2016, 8.4*) Пятизначное четное число a, являющееся квадратом целого числа, делится на 21. Найти минимальное a, удовлетворяющее этим условиям.

$\boxed{a_{\min} = 441 \cdot 36 = 15876}$

19. (*«Росатом», 2022, 9.2*) Доказать, что сумма $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{346}$ представляет собой дробь, числитель которой делится на 347.

20. (*«Росатом», 2020, 9.2*) Найти девять натуральных чисел, кратных шести, среди которых ни одно число не кратно другому, но куб каждого числа кратен квадрату любого из них.

$\boxed{a_1 = 2^{16} \cdot 3^{24},\ a_2 = 2^{17} \cdot 3^{23},\ a_3 = 2^{18} \cdot 3^{22},\ \ldots,\ a_9 = 2^{24} \cdot 3^{16}}$

21. (*«Росатом», 2021, 9.4*) Рассматривается множество M целых чисел $n \in [-20; 100]$, для которых выражение

$$A = n^3 + n^2 - 14n - 24$$

делится на 7. Сколько целых чисел содержится в M? Найти наибольшее и наименьшее из них.

$\boxed{\text{1) 34 числа; 2) } n_{\min} = -17,\ n_{\max} = 96}$

22. (*«Росатом», 2018, 9.4*) Найти наибольшее целое трехзначное число n, для которого число $15n^2 + 13n + 2$ делится на 49.

$\boxed{998}$

23. (*«Росатом», 2018, 10.3*) При каких целых k выражение $k \cdot (k^2 - 1)(k^2 - 9)$ делится на 1680?

$\boxed{k = 2m + 1,\ m \in \mathbb{Z},\ m \neq 7t + 2,\ m \neq 7t + 4,\ t \in \mathbb{Z};\ k = 16m,\ m \in \mathbb{Z},\ m \neq 7t \pm 1,\ t \in \mathbb{Z}}$

24. (*«Росатом», 2020, 11.1*) Сколько существует натуральных чисел $n \leqslant 2020$, для которых дробь $\frac{6n^3+n^2-5n+12}{6n^2+7n+2}$ сократимая?

$\boxed{\text{1299 чисел}}$

25. (*«Росатом», 2025, 11.3*) Для каждого натурального n определим число $\varphi(n)$, равное количеству целых чисел m, $1 \leqslant m \leqslant n$ взаимно простых с n. Найти $\varphi(1947)$.

$\boxed{1160}$

26. (*«Росатом», 2025, 11.3*) Для каждого натурального n обозначим через $a(n)$ количество целых чисел $m \in [1; n]$ взаимно простых с n. Найти простое число p, для которого

$$a\left(p^2\right) + a\left(p^3\right) + a\left(p^4\right) + \ldots + a\left(p^{2025}\right) = 3^{2025} - 3.$$

$\boxed{3}$

27. (*«Росатом», 2024, 11.3*) Натуральное число $n \geqslant 2024$ имеет простой делитель $p > 3$ и другой делитель q, связанный с p соотношением $(p-1)(q+3) = n-3$. Найдите наименьшее возможное при этих условиях число n.

$\boxed{2523}$

28. (*«Росатом», 2017, 11.3*) Найти целые положительные делители x и y числа 1232, удовлетворяющие уравнению

$$5x - 3y + 13 = 0.$$

$\boxed{x = 4,\ y = 11;\ x = 7,\ y = 16}$

4 НОД и НОК

29. (*«Росатом», 2021, 8.2*) На какое натуральное число можно сократить числитель и знаменатель обыкновенной дроби вида $\dfrac{3n+2}{5n-7}$? При каких целых n это может произойти?

$\boxed{\text{Можно сократить на 31 при } n = 31k - 11,\ k \in \mathbb{Z}}$

30. (*«Росатом», 2017, 8.3*) Сколько натуральных чисел $x \leqslant 1000$ удовлетворяют уравнению НОД$(6, 5x) = 3$? Найти наибольшее такое x, кратное 5.

$\boxed{\text{167 чисел; } x_{\max} 975}$

31. (*«Росатом», 2019, 8.3*) Сколько существует различных пар целых чисел x, y, являющихся делителями числа 540, для которых НОД$(x, y) = 2$? Пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считать одной парой.

$\boxed{\text{32 пары}}$

32. (*«Росатом», 2016, 9.3*) Найти целые, положительные числа x и y, для которых $x + y = 12$ и

$$x \cdot \text{НОД}(x, y) = \text{НОК}(x, y).$$

$\boxed{x = 3,\ y = 9 \text{ или } x = 11,\ y = 1}$

33. (*«Росатом», 2015, 10.1*) Для каждого целого, положительного x найти наибольший общий делитель чисел $P_1(x) = = x^3 + 5x^2 + 4x + 15$ и $P_2(x) = x^4 + 5x^3 + 15x + 3$.

$\boxed{\text{если } x \text{ делится на 3, то НОД} = 3\text{, если } x \text{ не делится на 3, то НОД} = 1}$

34. (*«Росатом», 2021, 10.1*) Найти наименьшее натуральное число, имеющее при делении на 3, 5 и 6 в остатке 1, а при делении на 11 — остаток 5.

$\boxed{n_{\min} = 181}$

35. (*«Росатом», 2019, 11.1*) Сколько различных пар целых чисел x и y, $1 \leqslant x \leqslant 100$, $1 \leqslant y \leqslant 100$ удовлетворяют уравнению $\text{НОД}\,(\log_2 x, 36) = \log_3^2 y$? Найти эти пары.

$\boxed{\text{3 пары: } (2;3),\ (32;3),\ (16;9)}$

36. (*«Росатом», 2019, 11.3*) Известно, что дробь $\frac{m(n+69m)}{n(m+69n)}$ сократимая для некоторых взаимно простых целых чисел m и n. Найти наибольшее простое число d, на которое делится числитель и знаменатель дроби.

$\boxed{d = 23}$

37. (*«Росатом», 2020, 11.3*) Доказать, что существует набор натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_{2019}, для которых

$$2 \cdot \text{НОК}\,(a_1, a_2, \ldots, a_{2019}) = a_1 + a_2 + \ldots a_{2019}.$$

$\boxed{a_1 = a_2 = \ldots = a_{2018} = 1,\ a_{2019} = 2018}$

5 Основная теорема арифметики

38. (*«Росатом», 2016, 7.3*) Вова, Петя и Маша сидят за круглым столом и играют в устный счет. Игра состоит в том, что каждый, услышав «на ушко» от соседа справа число, умножает его на свое, заранее придуманное простое число, и сообщает результат соседу слева. Круг игры начинается с Вовы и заканчивается им, игра завершается после 3 кругов. Первое натуральное число сообщает Вове «на ушко» его бабушка. Вова объявляет всем последнее услышанное им число 86400. Какое число сообщила Вове бабушка, если все придуманные игроками числа были различными?

$\boxed{16}$

39. (*«Росатом», 2025, 8.2*) Найти наименьшее целое число, кратное 1944, половина которого является квадратом целого числа, а шестая часть — кубом целого числа.

$\boxed{2^7 \cdot 3^{10}}$

6 Остатки и сравнения

40. (*«Росатом», 2024, 8.2*) Оказалось, что число 465 при делении на целое число a имеет остаток, равный частному. Найдите все такие числа a.

$\boxed{30,\ 92,\ 154,\ 464}$

41. (*«Росатом», 2018, 8.4*) Натуральные числа a и b таковы, что a при делении на 3 имеет остаток 2, b при делении на 7 — остаток 1, а их произведение при делении на 21 имеет в остатке 2. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $a+b$, если a и b трехзначные числа.

$(a+b)_{\min} = 213$

42. (*«Росатом», 2017, 9.3*) Найти a, b и c, для которых $ar_n + br_{n+1} + cr_{n+2} = 6$ для всех натуральных n, где r_k — остаток от деления k на 3.

$a = b = c = 2$

43. (*«Росатом», 2023, 9.4*) Доказать, что существует более 2024 различных троек целых чисел $(x; y; z)$, для которых

$$x^{2022} + y^{2022} = z^{2023}.$$

44. (*«Росатом», 2015, 10.3*) Доказать, что выражение $2 \cdot 6^n - 25n^2 + 15n - 2$ делится без остатка на 125 при любом натуральном $n > 1$.

45. (*«Росатом», 2017, 11.3*) Целые числа $2a^2$ и $3a$ имеют одинаковые остатки при делении на 18. Какие ненулевые остатки может иметь число $a > 0$ при делении на 18?

$r = 6$, $r = 12$

7 Уравнения в целых числах

46. (*«Росатом», 2024, 8.4*) Найдите натуральные числа x, удовлетворяющие уравнению

$$x^{x-2} + x^{3-x} = x + 1.$$

1, 2, 3

47. (*«Росатом», 2015, 9.4*) Найти целые x и y, для которых $x^4 - 3x^2y + 2y^2 = 35$.

$x = \pm 3$, $y = 2$

48. (*«Росатом», 2020, 10.3*) Сократимая обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ при прибавлении к числителю и знаменателю 7 возросла в три раза. Найти p и q, если известно, что НОД $(p, q) = 2$.

$p = 2$, $q = 14$

49. (*«Росатом», 2016, 11.1*) Сколько пар $(x; y)$ целых чисел, являющихся решениями уравнения $7x - 5y = 23$, удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 37$? Найти пару $(x; y)$, для которой $x + y$ наибольшее.

$x = 4$, $y = 1$

50. (*«Росатом», 2020, 11.1*) Найти целые числа x и y, для которых

$$\log_2\left(\frac{x}{17}+\frac{y}{5}\right)=\log_2\frac{x}{17}+\log_2\frac{y}{5}.$$

$\left\{\begin{matrix} x=18, \\ y=90; \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} x=22, \\ y=22; \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} x=34, \\ y=10; \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} x=102, \\ y=6; \end{matrix}\right.$

51. (*«Росатом», 2023, 11.3*) Найти все целые решения уравнения

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2022}.$$

$n=\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2022}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2022}\right)^2$

8 Разные задачи с целыми числами

52. (*«Росатом», 2024, 7.1*) Петя написал на доске семь последовательных натуральных чисел, а потом стер одно из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 1186. Какое число стер Петя?

200

53. (*«Росатом», 2025, 7.5*) Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на 4 треугольника, три из которых имеют площади 9, 15 и 20. Найти площадь четвертого треугольника, если известно, что она — целое число.

12

54. (*«Росатом», 2019, 8.1*) В доме 80 комнат, объединенных в 45 квартирах: однокомнатных, двухкомнатных и трехкомнатных. Число двухкомнатных квартир не менее, чем на 50% превышает число трехкомнатных, а количество однокомнатных больше двухкомнатных не менее, чем на 30%. Сколько двухкомнатных квартир в доме?

15

55. (*«Росатом», 2016, 8.2*) В стеклянной банке разместилась коллекция жуков. Часть жуков имеет 6 лапок, остальные — по 8 лапок. Коля внимательно пересчитал все лапки, их оказалось 86 штук. Какое минимально возможное количество жуков могло находиться в банке?

11

56. (*«Росатом», 2021, 8.3*) Половина мальчиков класса сидит за партой с девочкой, и только треть девочек не хотят сидеть за партой вместе с мальчиком. Мальчики, сидящие с девочками, списывают у них контрольные работы, остальные мальчики — вынуждены работать самостоятельно. Девочки никогда не списывают друг у друга, но пятая часть девочек списывают контрольные у мальчиков, не сидящих с ними за партой. Сколько девочек пишет контрольную самостоятельно, если в классе не более 40 учащихся?

12 девочек

57. (*«Росатом», 2019, 8.4*) Длины оснований трапеции равны 108 и 72. Трапеция разрезается на равные треугольники прямыми, параллельными его сторонам. Длина хотя бы одной стороны треугольника — целое число. Найти наименьшее возможное число таких треугольников.

$\boxed{n_{\min} = 5}$

58. (*«Росатом», 2020, 9.1*) В 9а классе есть ученики, увлеченные кино, но есть и такие, которые увлечены чтением книг. Шестая часть любителей просмотра кинофильмов читает книги, а 20% книголюбов с удовольствием смотрят кино. В классе есть только три ученика, которые не смотрят фильмов и не читают книг. Сколько учеников в 9а классе, если их не менее 25, но не более 35?

$\boxed{\text{33 ученика}}$

59. (*«Росатом», 2021, 9.1*) Команда из трех пиратов причалила к острову, чтобы разделить оставленный там клад золотых монет. Время было позднее, и они решили отложить дележ монет до утра. Первый пират проснулся ночью и решил забрать свою долю. Разделить монеты на три равные части ему не удалось, поэтому он забрал сначала одну монету, а потом треть от оставшихся и пошел спать. Не зная про это, второй пират проснулся ночью и проделал то же самое что и первый. Третий пират повторил то, что сделали первый и второй. Утром, не сказав друг другу ни слова, они разделили между собой поровну оставшиеся монеты. Сколько монет досталось каждому пирату, если первоначально клад содержал не менее 110 и не более 200 монет?

$\boxed{\text{Первый пират — 81 монета, второй пират — 60 монет, третий пират — 46 монет}}$

60. (*«Росатом», 2023, 9.3*) Петя написал на доске 8 последовательных натуральных чисел, а Вася стер два из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 2022. Какое наименьшее возможное число мог написать Петя?

$\boxed{333}$

61. (*«Росатом», 2022, 9.3*) Петя написал на доске четыре числа: 5, 4, 4, 3 и сказал Васе, что это записанные в произвольном порядке сумма, разность, произведение и частное двух положительных придуманных им чисел. Вася подумал и назвал эти числа. А вы можете это сделать?

$\boxed{\text{4 и 1}}$

62. (*«Росатом», 2019, 9.4*) Мастер работал с плиткой в форме прямоугольника $a \times b$, длины сторон которого a и b — целые числа, причем $1 < \frac{b}{a} < 2$. Ему удалось, не разрезая плиток, уложить ею две прямоугольные стены размерами 70×66 и 102×39. Найти a и b. Сколько плиток при этом было использовано?

$\boxed{\text{размер плитки } 2 \times 3\text{; 1433 плиток}}$

63. (*«Росатом», 2022, 10.1*) Класс разделили на две команды «Знайки» и «Незнайки» и стали играть в игру «Вопросы и ответы». Правила игры простые: каждый игрок команды должен уметь задать по выбранной теме вопрос любому игроку другой команды и дать ответ на вопрос противника к нему адресованный. Учитель оценивает качество вопросов и ответов. В результате игры каждый член команды «Знайки» принял участие в игре ровно три раза (в форме вопроса или ответа), а каждый игрок команды «Незнайки» только два. Сколько учеников в классе, если на обед ходили 21 ученик, а парт в классе 14? (за партой могут сидеть не более двух учеников)

25 учеников

64. (*«Росатом», 2021, 10.1*) Вася и Петя занялись тем, что выкладывали на столе фигуры из одинаковых картонных правильных треугольников. Когда каждый из них собрал свой большой правильный треугольник (без дырок), то оказалось, что Вася использовал на него на 161 треугольник больше, чем Петя. Сколько треугольников использовал Петя, если у него их было не более 100 штук?

64

65. (*«Росатом», 2023, 10.1*) В поезде 10 вагонов и в них находятся 270 пассажиров. Во втором вагоне более, чем на одного пассажира больше, чем в первом, в третьем вагоне более чем на одного пассажира больше, чем во втором и так до последнего вагона. Число пассажиров в последнем вагоне не более, чем в 2 раза превышает количество пассажиров в первом вагоне. Сколько пассажиров едет в первом вагоне?

18 пассажиров

66. (*«Росатом», 2025, 10.3*) На бильярдном столе из одинаковых 153 шаров выложен правильный треугольник. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен в треугольник и любая пара соседних шаров в треугольнике касаются друг друга. Сколько шаров составляют сторону треугольника?

17

67. (*«Росатом», 2019, 11.1*) Робот умеет совершать маневры двух типов: шагать по прямой вперед на 510 шагов и останавливаться, а также проходить по той же прямой 390 шагов назад и останавливаться. Заряд батареи допускает не более 20 таких маневров. Задача робота — остановиться как можно ближе к объекту, расположенному впереди на расстоянии 692 шага от начального положения робота. На каком наименьшем расстоянии от объекта может остановиться робот (в шагах)? Сколько раз при этом робот совершит движение вперед и назад?

2 шага; 9 движений вперёд и 10 движений назад

68. (*«Росатом», 2023, 11.1*) Петя и Вася пригласили одноклассников на свой день рожденья в дом Пети и посадили всех за круглый стол пить чай. Петя отметил для себя наименьшее число стульев, разделяющих его с каждым из приглашенных гостей, кроме Васи. Сложив полученные числа, он получил 60. Найти число стульев за столом, если известно, что оно четное. Какое наименьшее число стульев разделяло Петю и Васю?

18 стульев, 4 стула