Задачи с целыми числами. Стиль МГУ

1 Десятичная запись

1. (*«Ломоносов», 2021, 7–8.2*) Ваня задумал двузначное число, затем поменял местами его цифры и полученное число умножил само на себя. Результат оказался в четыре раза больше, чем задуманное число. Какое число задумал Ваня?

81

2. (*«Ломоносов», 2025, 5–6.2, 7–8.2*) Назовём натуральное число счастливым, если все его цифры можно разбить на две группы, сумма цифр в каждой из которых одинакова. Примеры: 38221 ($3+2+2+1=8$), 5678 ($5+8=6+7$). Назовем число суперсчастливым, если оно счастливое и следующее за ним целое число тоже счастливое. Найдите наименьшее суперсчастливое число.

549

3. (*«Ломоносов», 2025, 10.7*) Назовём натуральное число счастливым, если все его цифры можно разбить на две группы, сумма цифр в каждой из которых одинакова. Примеры: 38221 ($3+2+2+1=8$), 5678 ($5+8=6+7$). Назовем число суперсчастливым, если оно счастливое и следующее за ним целое число тоже счастливое. Найдите количество суперсчастливых чисел на отрезке $[400; 2400]$.

9

4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2025, 5–6.3, 7–8.2, 9.1*) Назовем год **замечательным**, если номер года делится на сумму двузначных чисел, из которых этот номер составлен. Например, 2025 год — замечательный, поскольку 2025 делится на $20+25=45$. Назовите ближайший следующий замечательный год.

2035

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2025, 10.2*) Назовем год **замечательным**, если номер года делится на сумму двузначных чисел, из которых этот номер составлен. Например, 2025 год — замечательный, поскольку 2025 делится на $20+25=45$. Сколько ещё замечательных годов в XXI веке (с 2001 по 2100 год включительно)?

10

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2024, 5–6.4, 7–8.3*) Будем называть **палиндромом** такое натуральное число, которое слева направо и справа налево читается одинаково. Например 11, 323 и 4224 — палиндромы, а 2024 — нет. Существуют ли два палиндрома: один двузначный, другой — трехзначный, дающие в сумме четырехзначный палиндром?

Да, $22+979=1001$

7. (*«Ломоносов», 2022, 7–8.5*) Из цифр a, b, c, d, e составлено пятизначное число $\overline{abcde}$. Про двузначные числа $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$, составленные из тех же цифр, известно, что

$$\left(\overline{ab}+\overline{bc}\right)\left(\overline{bc}+\overline{cd}\right)\left(\overline{cd}+\overline{de}\right)=157605.$$

Найдите число $\overline{abcde}$. Многозначные числа не могут начинаться с нуля.

12345 или 21436

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 10–11.1*) Натуральные числа, начиная с 20, выписали в одну строку: 20212223... Какая цифра стоит в получившейся последовательности цифр на 2021 месте?

7

9. (*«Ломоносов», 2022, 11.2*) Загадано 2022-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 4. Какой цифрой оно заканчивается?

8 или 9

2 Сумма цифр числа

10. (*«Ломоносов», 2020, 11.1*) Найдите сумму цифр числа A, если

$$A = 2^{63}\cdot 4^{25}\cdot 5^{106} - 2^{22}\cdot 4^{44}\cdot 5^{105} - 1.$$

959

11. (*«Ломоносов», 2024, 10.8, 11.7*) Пусть $S(n)$ означает сумму цифр натурального числа n. Найти наибольшее 100-значное натуральное число n, удовлетворяющее условию: для всех натуральных m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ справедливы равенства $S(mn) = S(n)$.

$n = 10^{100} - 1$

3 Делимость

12. (*«Ломоносов», 2021, 7–8.3*) Назовем составное натуральное число n «интересным», если все его натуральные делители можно выписать в порядке возрастания, и при этом каждый следующий делитель делится на предыдущий. Найти все «интересные» натуральные числа от 20 до 90 (включительно).

25, 27, 32, 49, 64, 81

13. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2021, 5–6.4, 7–8.3*) Докажите, что сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи, будет кратна 37.

14. (*«Покори Воробъевы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.3, 9.2*) Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

$a = 34$; $b = 2$

4 Остатки и сравнения

15. (*«Ломоносов», 2022, 10.1*) Найдите наименьшее натуральное число, обладающее следующим свойством: остаток от его деления на 20 на единицу меньше остатка от его деления на 21, а остаток от его деления на 22 равен 2.

$\boxed{838}$

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2020, 5–6.3, 7–8.2, 9.1*) Найдите последнюю цифру числа

$$202^{303^{404}}.$$

$\boxed{2}$

17. (*«Ломоносов», 2025, 7–8.3*) Найдите последнюю цифру числа

$$8^{2025^{2025}}.$$

$\boxed{8}$

18. (*«Ломоносов», 2022, 9.3, 10.3*) Найдите три последние цифры числа $10^{2022} - 9^{2022}$.

$\boxed{119}$

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.1*) В десятичной записи натурального числа, состоящей только из цифр 4 и 5, количество цифр 5 нечётно и на 17 больше количества цифр 4. Найдите все возможные остатки от деления этого числа на 9.

$\boxed{4}$

20. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Маша задумала 12-значное число и сообщила Васе, что остаток от деления этого числа на 9 равен 3. Потом Маша зачеркнула одну цифру и сказала Васе, что остаток от деления на 9 получившегося 11-значного числа равен 8. Помогите Васе угадать цифру, которую зачеркнула Маша.

$\boxed{4}$

21. (*«Ломоносов», 2014, 10–11.2*) Маша выписала на доске подряд все натуральные числа от 2 до 2015. Пришёл Ваня и заменил каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришла Таня и сделала то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

$\boxed{10070}$

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.5*) Прямоугольный треугольник называется пифагоровым, если длины всех его сторон — натуральные числа. Найдите наибольшее целое число, на которое делится произведение длин сторон любого пифагорова треугольника.

$\boxed{60}$

5 Уравнения в целых числах

23. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2023, 5–6.4, 7–8.3, 9.1*) Найдите все пары простых чисел p и q, для которых выполнено равенство

$$p^q - q^p + 3 = 2^{p-1}.$$

$\boxed{(2,3);\ (3,2)}$

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.1*) Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$5xy + y - 5x = 1038.$$

$\boxed{(12,18)}$

25. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 9.3*) Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых выполнено равенство

$$(x + y) \cdot (x + y + 1) + y = 2022.$$

$\boxed{(2;42)}$

26. (*«Ломоносов», 2013, 9.5*) Найдите все пары натуральных чисел (m, n), для которых выполняется равенство

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = m(m-1).$$

$\boxed{(1,1);\ (2,1);\ (3,1)}$

27. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.6*) Какие из значений 8, 43, 2010 может принимать N, если известно, что уравнение

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$$

имеет единственное решение в натуральных числах x и y?

$\boxed{43}$

28. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.1*) Решите уравнение в целых числах

$$x + 3xy + y = 2019 - 3y^2.$$

$\boxed{(-221,224);\ (2019,0)}$

29. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.2*) Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$6x^2y + 2x^2 + 3xy + x - 9y = 2016.$$

$\boxed{x = 4,\ y = 20}$

30. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2010.5*) Решите уравнение в целых числах:

$$\sqrt{9x^2+80x-40}=3x-20y.$$

$(-13,-3)$; $(-59,-17)$

31. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2016, 10–11.1*) Найдите все натуральные числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^3+2y^2=2016.$$

$(12,12)$; $(6,30)$

32. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2016, 9.7*) Решить в целых числах уравнение

$$x^6=y^3+217.$$

$(-1,-6)$; $(1,-6)$; $(-3,8)$; $(3,8)$

33. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2019, 10–11.4*) Найдите все тройки натуральных чисел (m,n,k) такие, что

$$m^3+n^3=k!+32.$$

$(3,5,5)$; $(5,3,5)$

6 Разные задачи с целыми числами

34. (*«Ломоносов», 2024, 7–8.4*) Попугай решил измерить Удава. Если Попугай идет клювом вперед, то длина его шага равна $X=9$ см, а если спиной вперед — то в $Y=3$ раз меньше. Чтобы измерить Удава, Попугай прошагал вдоль него в направлении от хвоста до головы, идя то клювом вперед, то спиной. При этом Попугай насчитал $Z=38$ шагов. Затем он прошел обратно, от головы до хвоста, и насчитал то ли $T=40$, то ли $T+1=41$ шагов. Однако наблюдавшая за ним Мартышка сказала, что всего шагов, которые Попугай прошел клювом вперед, было $R=59$. Какова длина Удава?

294 см

35. (*«Ломоносов», 2024, 9.1*) Различные целые числа m и n таковы, что числа $\left(\frac{1}{m}-2\right)$ и $\left(\frac{1}{n}-2\right)$ являются корнями квадратного трехчлена x^2+ax+b с целыми коэффициентами. Найти все возможные значения выражения $a+b$.

7

36. (*«Ломоносов», 2023, 9.3, 10.6*) Для укладки пола в квадратной комнате купили одинаковые квадратные плитки. 15 плиток оказались разбитыми. Оставшимися плитками выложили пол в другой комнате прямоугольной формы, в длину которой укладывается на 11 плиток больше, чем в ширину. Сколько плиток было куплено?

225

37. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.1*) Пятая часть персонала фирмы работает в транспортном отделе, ещё 52 сотрудника — в отделе продаж, остальные — в нескольких цехах, в каждом из которых работает 1/7 персонала фирмы. Чему равна общая численность персонала?

140

38. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11.1*) Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого её членов меньше 4. Найдите первый член этой прогрессии.

3

39. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.1*) На соревнования по лёгкой атлетике ученики школы приехали на автобусе, вмещающем не более 40 человек. Каждый из них участвовал в одном из видов соревнований. При этом 1/7 часть учеников завоевали золотые медали, 1/4 часть — серебряные и ещё 1/4 — бронзовые. На обратном пути медалисты решили собрать деньги и купить по одному торту каждому из спортсменов, оставшемуся без медалей. Сколько тортов им придётся покупать?

10

40. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.1*) Лаборатория Альфа на покупку пяти микроскопов, четырёх телескопов и эпидиаскопа потратила 140 тыс. руб. Лаборатория Бета на покупку шести микроскопов, пяти телескопов и эпидиаскопа потратила 167 тыс. руб. Сколько потратит лаборатория Гамма на покупку трёх микроскопов, двух телескопов и эпидиаскопа, если известно, что цены у всех поставщиков одинаковы?

86 тыс. руб.

41. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.1*) Петя и Вася выходят одновременно из пункта A и идут в пункт B: Петя по шоссе, а Вася по тропинке. Найти расстояние между A и B по шоссе, если путь по тропинке короче пути по шоссе на 5 км, скорость движения Васи 3 км/ч, а скорость Пети — натуральное число и он приходит в B на один час позже Васи.

8 км

42. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.2*) Число в семеричной системе счисления является трёхзначным. В системе счисления с основанием 11 оно записывается теми же тремя цифрами, но в обратном порядке. Какова его запись в десятичной системе счисления? Найдите все возможные значения.

190 или 247

43. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.2*) Два брата родились в один день, но в разные годы. Оказалось, что в 2014 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Определите год рождения каждого из братьев.

1988 и 2006

44. (*МГУ, мехмат, 2000-05.2*) Два друга, Ваня и Петя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Ваня нашел 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашел. Ваня взял себе белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберезовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равной доле подосиновиков в принесенных Петей домой грибах?

$\boxed{8}$

45. (*«Ломоносов», 2012, 10–11.3*) В группу, состоящую из 19 детей, присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 5 пряников и 9 конфет, а второго — 4 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?

$\boxed{\text{Нет}}$

46. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.3*) Вася возвёл какое-то целое число в куб и умножил результат на два. Петя возвёл другое целое число в квадрат и умножил результат на три. Оказалось, что ответы совпали. Какое число взял каждый из ребят, если эти числа отличаются не более чем на 100 (перечислите все возможные варианты)?

$\boxed{(6,12),\ (6,-12),\ (24,96)}$

47. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.3*) Две бригады рабочих выполнили одинаковую работу. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на пять человек больше, то она могла бы закончить работу на два часа раньше. Найдите число рабочих в бригадах, если производительности всех рабочих одинаковы.

$\boxed{25 \text{ и } 24}$

48. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.5*) При каких значениях x число

$$\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{3-x}$$

является целым?

$\boxed{1 \pm \sqrt{5};\ 1 \pm \frac{10\sqrt{3}}{9}}$

49. (*МГУ, мехмат, 2002-05.6*) Найти все значения x, для которых оба числа $\frac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$ и $\frac{1-x}{1+x}$ являются целыми.

$\boxed{1;\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{3}{4}}$

50. (*«Ломоносов», 2024, 11.8*) Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами $(3,4,5)$, $(11,10,6)$, $(5,8,9)$? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

$\boxed{8}$

51. (*«Ломоносов», 2023, 11.5*) Обозначим через $s(n)$ число цифр в десятичной записи натурального числа n. Найдите сумму $s(2^{2023})+s(5^{2023})$.

$\boxed{2024}$

52. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2025, 10.3, 11.4*) Множество A состоит из натуральных чисел n, делящихся на $[\sqrt[3]{n}]$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превышающее x. Найдите количество чисел из отрезка $[25, 2025]$, принадлежащих множеству A.

$\boxed{251}$