

Задачи с целыми числами. Стилль МФТИ

1 Десятичная запись

1. («Физтех», 2025, 10.2) Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

66662

2. («Физтех», 2025, 11.1) Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

(33; 202; 9999)

2 Делимость

3. («Физтех», 2025, 9.1) При каком наименьшем натуральном n число

$$n! + (n + 1)! + (n + 2)!$$

делится на 361?

17 = n

4. («Физтех», 2025, 9.2) Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .

20

5. («Физтех», 2025, 9.3) Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} 10 \cdot \min(a; b) + \max(a; b) = 2a + 3b, \\ (\min(a; b))^2 + \text{НОД}(a; b) = 6. \end{cases}$$

(2; 8), (14; 2)

6. («Физтех», 2025, 10.2) Найдите все натуральные a и b такие, что

$$\begin{cases} \min(a; b) = 7|a - b|, \\ 7 \cdot \max(a; b) = 8(\text{НОД}(a; b))^2 - 64. \end{cases}$$

(64; 56), (56; 64)

7. («Физтех», 2025, 11.4) Найдите все пары натуральных чисел $(a; b)$ такие, что

$$\begin{cases} 4 \cdot \min(a; b) = 3(a - b)^2, \\ 3 \cdot \max(a; b) = \text{НОК}(a; b). \end{cases}$$

(91; 71), (3; 5), (71; 91), (5; 3), (16; 12), (12; 16)

8. («Физтех», 2024, 9.2) Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p — некоторое простое число. Найдите числа a и b .

(14; 2)

9. («Физтех», 2024, 10.3) Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n \quad \text{и} \quad B = m^2n + mn^2 - 3mn$$

равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.

(3; 10), (10; 3)

10. («Физтех», 2024, 11.6) Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

(26; 34; 35), (26; 34; 25), (-27; -19; -18), (-27; -19; -28)

11. («Физтех», 2024, 9.4) Из множества M , состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок — простое число. Пусть p и q — две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 240$.

{13, 14, 15, 16, 17}

12. («Физтех», 2024, 11.3) Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок — простое число. Пусть p и q — две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.

{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36}

13. («Физтех», 2023, 9.1) Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$3^{25}7^{38}$

14. («Физтех», 2023, 10.1) Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$2^{26}7^{37}$

15. («Физтех», 2023, 11.1) Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^93^{10}5^{10}$, bc делится на $2^{14}3^{13}5^{13}$, ac делится на $2^{19}3^{18}5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$2^{21}3^{21}5^{30}$

16. («Физтех», 2023, 9.2) Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a + b}{a^2 - 8ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

10

17. («Физтех», 2023, 10.2) Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a + b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

8

18. («Физтех», 2023, 9.1) Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 22 кубика, у него осталось 3 кубика. После чего он из всех своих кубиков построил $N - 1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наибольшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их меньше 300?

131

19. («Физтех», 2021, 9.2) На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое увеличить в 32 раза, то сумма чисел на доске станет равной 477. Если же самое большое число увеличить в 14 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 477. Какие числа могли быть написаны на доске?

18 '08 '13 или 18 '01 '11 '13

3 Уравнения и неравенства в целых числах

20. («Физтех», 2023, 9.3) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 3x + 3 = 6^y.$$

(0; -1); (0; 2)

21. («Физтех», 2025, 9.5) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

(8; 7)

22. («Физтех», 2024, 9.7) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$

(0; 1); (1; 0)

23. («Физтех», 2023, 10.3) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

(7; 9)

24. («Физтех», 2025, 10.3) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{y + 3 - 10x} + \frac{1}{\sqrt{10x - 1 - y}} > y^2 + 12y.$$

(8; -9); (21; -1); (2; -9)

25. («Физтех», 2025, 9.2) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{3x} + \sqrt{2y} = \sqrt{2024^2 \cdot \sqrt{2025}}?$$

8101

26. («Физтех», 2025, 11.3) Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \log_x 2 + 3 \log_y 8 + 4 \log_{xy} \frac{1}{16} = 0, \\ \frac{x-1}{x+1} > \frac{3y-3}{7y+7}, \\ x \leq 31. \end{cases}$$

67