Уравнения в целых числах

1 Разность квадратов — на множители!

1. (*Турнир городов, 1997, 8–9*) Квадрат разрезали на 25 квадратиков, из которых ровно у одного сторона имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных сторона равна 1). Найдите площадь исходного квадрата.

2. (*Всеросс., 2023, МЭ, 8.6*) Натуральное число n таково, что значение выражения $n^2 + 492$ является точным квадратом.

1. Укажите любое возможное значение n.
2. Чему может быть равно n? Укажите все возможные варианты.

3. (*ММО, 1983, 7.1*) Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$x^2 = y^2 + 2y + 13.$$

4. (*«Ломоносов», 2023, 7–8.3*) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - y^2 - 4x - 6y - 58 = 0.$$

5. (*САММАТ, 2021, 10.1*) Решить в натуральных числах уравнение

$$n^4m^2 - k^2 = 2021.$$

6. (*САММАТ, 2021, 9.4*) При каких целых k, m, n имеет место равенство

$$k^2 - m^2 - 4n^2 + 4mn = 2021?$$

Выполнить полное исследование задачи и привести несколько примеров.

7. (*Математический праздник, 1993, 7.2*) Зная, что число 1993 простое, выясните, существуют ли такие натуральные числа x и y, что
а) $x^2 - y^2 = 1993$;
б) $x^3 - y^3 = 1993$;
в) $x^4 - y^4 = 1993$?

2 Продолжаем раскладывать на множители

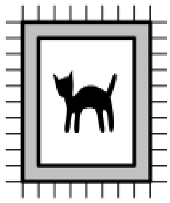
8. Решите в целых числах уравнение $xy = x + y + 3$.

Эту модельную задачу решаем двумя способами.

1. Группируем и раскладываем на множители, произведение которых есть целое число.
2. Выражаем y через x и в полученной дроби выделяем целую часть.

Данный раздел посвящен первому способу, следующий раздел — второму.

9. (*Математический праздник, 2015, 6.6*) Юра начертил на клетчатой бумаге прямоугольник (по клеточкам) и нарисовал на нём картину. После этого он нарисовал вокруг картины рамку шириной в одну клеточку (см. рисунок). Оказалось, что площадь картины равна площади рамки. Какие размеры могла иметь Юрина картина? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)



10. (*Математический праздник, 2005, 7.4*) Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из неё по клеточкам прямоугольник и нашёл его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, квадратик выкинула и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь — как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня?
б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата.
в) Прямоугольник каких размеров вырезал Ваня?

11. (*Всеросс., 1999, ОЭ, 8.5*) Докажите, что числа от 1 до 15 нельзя разбить на две группы: A из 2 чисел и B из 13 чисел так, чтобы сумма чисел в группе B была равна произведению чисел в группе A.

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.1*) Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$5xy + y - 5x = 1038.$$

13. (*МФТИ, 2004*) Найти все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$-3xy - 10x + 13y + 35 = 0.$$

14. (*ММО, 1994, 8.2*) Ученик не заметил знак умножения между двумя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.

15. (*ММО, 1994, 10.1*) Ученик не заметил знака умножения между двумя семизначными числами и написал одно четырнадцатизначное число, которое оказалось в три раза больше их произведения. Найдите эти числа.

16. (*«Высшая проба», 2021, 7.5, 8.4*) Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d, для которых выполнены равенства

$$\begin{cases} a + b = cd; \\ c + d = ab. \end{cases}$$

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7.6, 8.5, 9.4*) Решите в натуральных числах уравнение

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164.$$

В ответе укажите произведение abc.

18. (*«Росатом», 2020, 11.1*) Найти целые числа x и y, для которых

$$\log_2\left(\frac{x}{17} + \frac{y}{5}\right) = \log_2\frac{x}{17} + \log_2\frac{y}{5}.$$

19. (*«Шаг в будущее», 2018, 8.3*) Найдите двузначное число $\overline{xy}$, квадрат суммы цифр которого на 8 больше суммы произведения цифр числа и квадрата единиц этого числа, увеличенной в 7 раз.

20. (*«Росатом», 2015, 9.4*) Найти целые x и y, для которых $x^4 - 3x^2y + 2y^2 = 35$.

21. (*САММАТ, 2021, 8.7*) Решите в целых числах уравнение

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 + 8x + 5y = 7.$$

22. (*«Шаг в будущее», 2017, 8.6*) Докажите, что выражение

$$a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$

не равно 55 ни при каких целых значениях a и b.

3 Выражаем переменную, входящую линейно

23. (*«Физтех», 2011, 9, 11*) Целые числа m и n таковы, что

$$4m + 5n = mn - 9.$$

Найдите, какое наибольшее значение может принимать m.

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.7*) Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых выполнено равенство

$$x^2 + xy = y + 92.$$

25. (*«Ломоносов», 2012, 9.7*) Найдите периметр выпуклого многоугольника, множество вершин которого в координатной записи совпадает с множеством целочисленных пар решений уравнения

$$x^2 + xy = x + 2y + 9.$$

26. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.1*) Решите уравнение в целых числах

$$x + 3xy + y = 2019 - 3y^2.$$

27. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.2*) Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$6x^2y + 2x^2 + 3xy + x - 9y = 2016.$$

28. (*МФТИ, 1998*) Найти все пары целых чисел x, y, при которых является верным равенство

$$x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0.$$

29. (*«Физтех», 2023, 10.3*) Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4 Перебираем варианты

30. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.7*) Найдите все пары целых чисел (x, y) для которых выполнено равенство

$$x^2 + y^2 = x + y + 2.$$

31. (*САММАТ, 2021, 10.10*) Решить в целых числах уравнение

$$4x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 24y = 1.$$

32. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.1*) Найдите все натуральные числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^3 + 2y^2 = 2016.$$

33. (*Открытая олимпиада, 2019, 8.6*) Решите уравнение $abcdef = a + b + c + d + e + f$ в натуральных числах.

5 Используем оценки

34. (*«Ломоносов», 2018, 5–6.6, 7–8.5*) На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) нарисован прямоугольник, стороны которого лежат на линиях сетки, причём одна сторона на 5 см меньше другой. Оказалось, что его можно разрезать по линиям сетки на несколько частей и сложить из них квадрат. Чему может быть равна сторона этого квадрата? Найдите все возможные значения.

35. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2022, 7–8.4, 9.3*) Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых выполнено равенство

$$(x + y) \cdot (x + y + 1) + 2y = 100.$$

36. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.7*) Решите в натуральных числах уравнение

$$2n - \frac{1}{n^5} = 3 - \frac{2}{n}\,.$$

37. (*САММАТ, 2023, 9.2*) Решить уравнение в целых числах

$$\sqrt{xy^2 - 2022} + 1 = \frac{2023}{xy^2 + 1}.$$

38. (*Всеросс., 2022, ШЭ, 10.3*) Лёша разрезал куб $n \times n \times n$ на 153 меньших кубика. Причём у всех кубиков, кроме одного, длина ребра равна 1. Найдите n.

39. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9.7*) Решить в целых числах уравнение

$$x^6 = y^3 + 217.$$

40. (*Всеросс., 1997, ЗЭ, 10.1, 11.1*) Решить в целых числах уравнение

$$\left(x^2 - y^2\right)^2 = 1 + 16y.$$

6 Сравниваем по модулю

41. (*Открытая олимпиада, 2021, 8.2*) Докажите, что уравнение $16^x + 21^y + 26^z = t^2$ не имеет решений в натуральных числах.

42. (*Открытая олимпиада, 2021, 9.4*) Докажите, что уравнение $15^x + 29^y + 43^z = t^2$ не имеет решений в натуральных числах.

43. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 9.5, 10.5*) Докажите, что уравнение

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$$

не имеет решений в целых числах.

44. (*Открытая олимпиада, 2017, 9.5*) Докажите, что уравнение $53^x - 16^y = 91$ не имеет решения в натуральных числах.

45. (*Открытая олимпиада, 2023, 8.5*) Решите уравнение $2^x - 3^y = 295$ в натуральных числах.

46. (*Открытая олимпиада, 2020, 9.3*) Решите уравнение $3^x - 2^y = 7$ в целых неотрицательных числах.

7 Факториал? Не проблема!

47. (*Моск. матем. регата, 2001, 8*) Найдите все натуральные m и n, для которых выполняется равенство

$$m! + 12 = n^2.$$

48. (*«Бельчонок», 2020, 8.5*) Выражение $n!$ означает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно, т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Решите в натуральных числах уравнение

$$n! - 4n^2 + 18 = m^2 + 4nm - 20m.$$

49. (*САММАТ, 2021, 10.4*) Найти все натуральные числа n, для которых сумма

$$S_n = 1! + 2! + 3! + \ldots + n!$$

является полным квадратом ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$). Ответ обосновать.

50. (*ОММО, 2017.3*) Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что

$$x! + y! = 24z + 2017.$$

Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z).

51. (*«Будущие исследователи — будущее науки», 2018, 9.5, 10.5*) Найдите все пары натуральных чисел m, n, для которых $n! + 4! = m^2$ (где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$).

52. (*Олимпиада КФУ, 2022, 10.2*) Найдите все различные натуральные числа x и y, для которых справедливо равенство $x! + y = y! + x$.

53. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.4*) Найдите все тройки натуральных чисел (m, n, k) такие, что

$$m^3 + n^3 = k! + 32.$$

54. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2016, 9.1*) Найдите все такие числа k, для которых

$$(k/2)!(k/4) = 2016 + k^2.$$

Знаком $n!$ обозначен факториал числа n, то есть произведение всех целых чисел от 1 до n включительно (определён только для целых неотрицательных чисел; $0! = 1$).