

## Алгебраические уравнения и неравенства

### 1 Уравнения высших порядков

1. («Надежда энергетики», 2017, 9.3) Решите уравнение

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0.$$

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.1) Решите уравнение

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \dots + x^6)^2.$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.2) Какие значения может принимать выражение  $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — несовпадающие между собой корни уравнения  $x^3 - 2015x + 2016 = 0$ ?

### 2 Замена переменной

4. («Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!», 2016, 11.4) Решите уравнение

$$(x + 2)^4 + x^4 = 82.$$

5. («Ломоносов», 2012, 8–9, отборочный этап)

$$4(x^3 - x) = (x^2 + 1)^2.$$

### 3 Теорема Виета для кубического уравнения

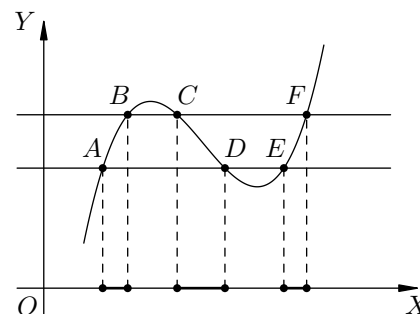
6. (ММО, 2018, 11.1) Решите уравнение

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)x^2 + 1.$$

7. (Всеросс., 1998, 3Э, 10.1, 11.1) Прямые, параллельные оси  $OX$ , пересекают график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d:$$

первая — в точках  $A$ ,  $D$  и  $E$ , вторая — в точках  $B$ ,  $C$  и  $F$  (см. рисунок). Докажите, что длина проекции дуги  $CD$  на ось  $OX$  равна сумме длин проекций дуг  $AB$  и  $EF$ .



## 4 Уравнения с модулем

8. («Физтех», 2018, 9.6) Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от шестнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа  $a$  равна 276, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до некоторого числа  $b$  равна 748. Найдите все возможные значения  $a$ , если известно, что  $a + b = 62,5$ .

## 5 Неравенства с модулем

9. («Шаг в будущее», 2020, 9.1) Решить неравенство:

$$\frac{|3x^2 + 8x - 3| + |3x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 30x - 9|}{|x - 2| - 2x - 1} \leq 0.$$

## 6 Иррациональные уравнения

10. («Физтех», 2023, 9.3) Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x.$$

11. («Ломоносов», 2017, 10–11.2) Решите уравнение

$$\sqrt{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 2\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} + \sqrt{2}.$$

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 9–11) Решите уравнение

$$\sqrt[3]{15x + 1 - x^2} + \sqrt[3]{x^2 - 15x + 27} = 4.$$

13. («Шаг в будущее», 2018, 10.4) Решить уравнение:

$$\sqrt{x-15} + \sqrt{x+80} + 2\sqrt{x-15}\sqrt{x+80} = 315 - 2x.$$

14. («Шаг в будущее», 2019, 10.3) Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 4} - \sqrt{2x^2 + 3x + 5} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1} - \sqrt{2x^2 + 5x + 8}.$$

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.3) Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x+2017} + \sqrt{x+2018}} = 42.$$

## 7 Функции в уравнениях и неравенствах

16. («Ломоносов», 2019, 9.5) Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  удовлетворяют равенству  $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$ . Найдите  $a$ , если  $b = 52 - 30\sqrt{3}$  и  $c = a - 2$ .

17. («Росатом», 2016, 10.1) Для функции  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  решить уравнение  $f(2f(x)) = 117$ .

## 8 Минимаксные задачи

18. («Физтех», 2011, 9, 11, онлайн-этап) Найдите  $x$  и  $y$ , такие, что выполняется равенство

$$x^2 + 12xy + 52y^2 - 8y + 1 = 0.$$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8.5, 9.3) Решите уравнение

$$(\sqrt{x})^{2016} + (\sqrt{1-x})^{2016} = 1.$$

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9.8) Решить уравнение:

$$\sqrt{x}(x^2 - 3x - 4)^3 + \sqrt{4-x}(x^2 - 8x)^5 = 0.$$