

Тригонометрия. Стилль МГУ

1 Тригонометрические преобразования и вычисления

1. («Ломоносов», 2007.1) Вычислите

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \beta - \cos \beta),$$

если $\sin(\alpha + \beta) = 0,8$ и $\cos(\alpha - \beta) = 0,3$.

−0,5

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.5) Что больше:

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ \quad \text{или} \quad \frac{200}{157}\pi ?$$

Большее

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, отбор, 10–11.4) Что меньше: $\sin 1$ или

$$\cos \frac{1}{2^1} \cdot \cos \frac{1}{2^2} \cdot \cos \frac{1}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{1}{2^{2012}} ?$$

sin 1 меньше

2 Тригонометрические уравнения и неравенства

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.4) Решите уравнение

$$\frac{\cos 4x - 6 \cos^2 2x + 8 \cos^2 x}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} = 0.$$

$\frac{3}{\pi}, \frac{3}{2\pi}, \frac{3}{4\pi}$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.2) Решите неравенство

$$\sqrt{2} \cos 2x \geq \sin x - \cos x.$$

$[-\frac{5}{2}\pi + 2\pi n; \frac{3}{2}\pi + 2\pi n] \cap [\frac{3}{2}\pi + 2\pi n; \frac{7}{2}\pi + 2\pi n]$

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 10.1, 11.1) Решите уравнение

$$1 - \sqrt{2} \sin x (\cos x + 2 \sin x) + \sqrt{2} \cos x (2 \cos x - \sin x) = 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{u} + \frac{8}{u}$$

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 10.3) Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin(x^2 - 2,57) = \cos(\pi x).$$

$$\sqrt{2,57} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2,57}{\pi}} + \frac{\pi}{2}$$

8. («Ломоносов», 2025, 10.3) Решите неравенство:

$$\sqrt{\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3 \sin x}}.$$

$$\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right) \cap \mathbb{Z} \ni u$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2020, 11.2) Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

$$\frac{6698}{69}$$

10. («Ломоносов», 2025, 11.4) Найдите все решения уравнения

$$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) - \cos^3(4\pi x) = \left(\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x) \right)^3,$$

принадлежащие отрезку $[0,3; 1,6]$.

$$\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}; 1; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{8}$$

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.3) Решите уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{u} + \frac{8}{u}$$

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.3) Решить уравнение

$$6 \cos 9x \cos 2x = 1 + 3 \cos 11x + 2 \cos^3 7x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{u} + \frac{\pi}{1-\frac{1}{u}} \cos \frac{\pi}{u} + \frac{\pi}{u}$$

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.3) Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x + 5 \operatorname{ctg} 3x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{1}, \operatorname{arctg} \frac{\pi}{1} \mp u\pi + \left(\frac{\pi}{1}-\right) \operatorname{arctg} \frac{\pi}{1} \mp$$

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2011.2) Решите уравнение

$$\sin(\sin x) = \sin(\cos x + 1).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \pi, \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2011.2) Найдите наименьшее натуральное решение уравнения

$$\sin(2011x)^\circ = \sin x^\circ.$$

21

3 Исследование тригонометрических функций

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.1) Сравните числа $(\sin 1 + \cos 1)$ и $\frac{49}{36}$. Ответ обоснуйте.

Первое число больше

17. («Ломоносов», 2020, 10.5) Докажите, что уравнение

$$\sin(2020x) + \cos(2020x) = \frac{x}{5050} + 1$$

имеет по крайней мере 8000 корней, принадлежащих отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

18. («Ломоносов», 2018, 10–11.7) Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sin(x + \sin x) + \sin(x - \sin x) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin \sin x.$$

$$\frac{\pi}{2} - 2$$

4 Обратные тригонометрические функции

19. («Ломоносов», 2016, 10–11.2) Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{arccotg}^2 x = 3 \operatorname{arctg}^2 x + \frac{\pi^2}{36}.$$

$$\frac{\pi}{1}$$

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.2) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\arcsin(2x) + \arccos(2x) \geq \frac{\pi}{4} \cdot (y^2 - 2).$$

7

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.4) Вычислите

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2-1}{2^3-1} + \operatorname{arctg} \frac{3-1}{3^3-1} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{100-1}{100^3-1} \right).$$

$\frac{802}{66}$

22. («Ломоносов», 2020, 11.3) Решите неравенство

$$\operatorname{tg} \arccos x \leq \sin \operatorname{arctg} x.$$

$\left[1; \frac{5\sqrt{2}}{4}\right] \cap \left(0; \frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$

23. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 10.2) Решите неравенство

$$(18x^3 - 9x^2 - 2x + 1) \cdot \arccos(-2x - 1) \geq \arccos \left(\frac{1}{4 \sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^\circ} \right).$$

$\left[0; \frac{8}{11}\right] \cap \{1\} \ni x$

24. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 11.2) Решите неравенство

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x - 1) \leq \arccos \left(\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} \right).$$

$\{2\} \cap \left[\frac{7}{8}; 0\right] \ni x$

25. («Ломоносов», 2018, 10–11.5) Решите неравенство

$$\arcsin \left(\frac{5}{2\pi} \arccos x \right) > \arccos \left(\frac{10}{3\pi} \arcsin x \right).$$

$\left[\frac{01}{x6} \operatorname{arcs} : \frac{06}{x6} \operatorname{arcs}\right] \cap \left(\frac{06}{x6} \operatorname{arcs} : \frac{01}{x} \operatorname{arcs}\right)$