Тригонометрия. Стили МФТИ и МИФИ

1 Олимпиада «Физтех»

1. (*«Физтех», 2015, 10.1*) Известно, что $\sin y = \frac{3}{2}\sin x + \frac{2}{3}\cos x$, $\cos y = \frac{2}{3}\sin x + \frac{3}{2}\cos x$. Найдите $\sin 2x$.

$\boxed{-\frac{61}{72}}$

2. (*«Физтех», 2016, 10.1*) Известно, что $\operatorname{tg}(2\alpha - \beta) + 6\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\beta = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Найдите $\operatorname{ctg}\beta$.

$\boxed{1 \text{ или } \frac{1}{7}}$

3. (*«Физтех», 2016, 10.2*) Найдите значение выражения

$$\sin^4\frac{5\pi}{24} + \cos^4\frac{7\pi}{24} + \sin^4\frac{17\pi}{24} + \cos^4\frac{19\pi}{24}\,.$$

$\boxed{\frac{6-\sqrt{3}}{4}}$

4. (*«Физтех», 2016, 10.3*) Найдите значение выражения $\operatorname{ctg} 50^\circ - 4\cos 50^\circ$.

$\boxed{-\sqrt{3}}$

5. (*«Физтех», 2017, 11.3*) Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$, а числа $3+\sin x$, $3+\sin y$, $3+\sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.

$\boxed{-\frac{1}{10}}$

6. (*«Физтех», 2018, 11.4*) Числа x и y таковы, что выполняются равенства

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = 2 \quad \text{и} \quad 5\sin(2x - 2y) = \sin 2x \sin 2y.$$

Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

$\boxed{-\frac{6}{5}}$

7. (*«Физтех», 2023, 11.1*) Решите уравнение

$$3\operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

8. (*«Физтех», 2022, 11.1*) Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

9. (*«Физтех», 2015, 11.2*) Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{2}\cos 2x + 2\right)|2\cos 2x - 1| = \cos x(\cos x + \cos 5x).$$

$\boxed{\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}}$

10. (*«Физтех», 2016, 11.1*) Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{2\cos 3x}{\cos x} = 5|\sin x|.$$

$\boxed{\pm\arcsin\frac{1}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

11. (*«Физтех», 2013, 11.3*) Решите уравнение

$$\sqrt{3 + 4\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3\cos x.$$

$\boxed{\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

12. (*«Физтех», 2022, 11.5*) Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

13. (*«Физтех», 2025, 11.3*) а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что

$$(\sin\pi x + \sin\pi y)\sin\pi x = (\cos\pi x + \cos\pi y)\cos\pi x.$$

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin\frac{x}{5} + \arccos\frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

$\boxed{\text{а) } y = 1 + x + 2k, \text{ где } k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R};\ y = 1 - 3x + 2m, \text{ где } m \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R};\ \text{б) } 49 \text{ пар}}$

14. (*«Физтех», 2024, 11.5*) Что больше: $5 - 4\sin\frac{3\pi}{14}$ или $4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$?

первое число больше

15. (*«Физтех», 2020, 11.2*) Решите уравнение

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x.$$

$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \in \mathbb{Z}$

16. (*«Физтех», 2023, 11.3*) Решите уравнение

$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

2 Олимпиада «Росатом»

17. (*«Росатом», 2020, 11.2*) При каких целых n функция

$$f(x) = \sin(nx) \cdot \cos\frac{6x}{n+1}$$

имеет период $T = 5\pi$?

18. (*«Росатом», 2021, 11.2*) При каких целых n функция

$$f(x) = \sin nx \cdot \cos\frac{7x}{n^2}$$

имеет период $T = 9\pi$?

19. (*«Росатом», 2015, 10.2*) Вычислить значение $\cos^2 2x$ для всех допустимых значений x, если

$$\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0.$$

20. (*«Росатом», 2023, отбор, 10.2*) Решить уравнение

$$\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg}^4 2x - \sin^2 x - \operatorname{ctg}^4 2x + 4\sin x \cdot \operatorname{ctg}^2 2x + 1 = 0.$$

$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 3t+1$, $t \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 5t+1$, $t \in \mathbb{Z}$

21. (*«Росатом», 2025, отбор, 10.2*) Решите неравенство

$$4(\sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 3x + \sin 3x \sin x) + 3 \leqslant \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x.$$

$x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ или $x = \pm\frac{2\pi}{3} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$

22. (*«Росатом», 2024, отбор, 10.2*) Определить количество различных решений уравнения

$$(\sin x - \sin 2x + \cos 3x)^2 = \sin^2 x - \sin^2 2x + \cos^2 3x$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

$\boxed{11}$

23. (*«Росатом», 2024, отбор, 10.2*) Сколько существует точек с координатами $(x; y; z)$ в кубе $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $0 \leqslant z \leqslant \pi$, для которых

$$2\sin x + 2\sin y + 2\sin z + 4(\sin x \sin y + \sin x \sin z + \sin y \sin z) + 8 \sin x \sin y \sin z = 1?$$

$\boxed{\text{Бесконечно много}}$

24. (*«Росатом», 2023, 10.2*) Найти на интервале $(0; 2\pi)$ наибольшее решение уравнения

$$(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3 = \sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x.$$

25. (*«Росатом», 2022, 10.2*) Решить уравнение

$$f(x) = \sqrt{3} \cdot g(x),$$

для $f(x) = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + ... + \sin 2021x$ и $g(x) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos 2021x$.

26. (*«Росатом», 2016, 10.2*) Функция $t(x)$ определена на всей числовой оси так, что $t(x) = 0$ для всех $x \leqslant 0$ и $t(x) = 1$ для $x > 0$. Решить уравнение

$$\sin 2x = 0{,}5 \cdot t\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1{,}5 \cdot t(x - \pi) + t(x - 2\pi).$$

27. (*«Росатом», 2021, 10.2*) Найти целые x, для которых

$$x^2 \sin \frac{\pi x}{2} \geqslant 10 - 6 \cos \frac{\pi x}{3}.$$

28. (*«Росатом», 2020, 10.2*) Решить неравенство:

$$\sin(\sin 2x + \cos 2x - 1) \geqslant \sin x(\sin x - \cos x).$$

29. (*«Росатом», 2023, отбор, 11.2*) Сколько решений имеет уравнение

$$(\cos x - \cos 2x + \cos 3x)^2 = \cos^2 x - \cos^2 2x + \cos^2 3x$$

на отрезке $[0; 100\pi]$?

$\boxed{351}$

30. (*«Росатом», 2024, отбор, 11.2*) Сколько существует различных пар $(x; y)$, у которых

$$0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2\pi,$$

удовлетворяющих условию

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{\cos y}{\cos 2y} = \frac{\sin 2x \cos y + 1}{\sin 3x \cos 2y + 1}?$$

$\boxed{16}$

31. (*«Росатом», 2024, отбор, 11.2*) Найти наименьшее положительное решение уравнения

$$\sqrt{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin 3x}.$$

$\boxed{\frac{\pi}{5}}$

32. (*«Росатом», 2025, 11.2*) Найти среднее арифметическое решений уравнения

$$\sqrt{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

$\boxed{\frac{53\pi}{75}}$

33. (*«Росатом», 2025, 11.2*) Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 3x} = \frac{1}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}$$

при условии, что $\sin x > 0$.

$\boxed{x_1 = \frac{2\pi}{5} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ x_2 = \frac{4\pi}{5} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}}$

34. (*«Росатом», 2021, 11.2*) Доказать, что число $x_1 = -\sin\dfrac{\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Найти два других его корня.

35. (*«Росатом», 2017, 11.2*) Найти все x, для которых

$$\sin a_n x + \sin a_{n+1} x + \sin a_{n+2} x = 0$$

при всех n, где a_n — арифметическая прогрессия с разностью $d = \pi/10$ и первым членом $a_1 = \pi/2$.

36. (*«Росатом», 2017, 11.2*) Найти номера $n \geqslant 1$ членов арифметической прогрессии

$$a_n = \frac{5n + 2}{3},$$

являющихся решениями уравнения $\sqrt{10}\cos(\pi a_n) = \sqrt{4\cos(\pi a_n) - \cos(2\pi a_n)}$.

37. (*«Росатом», 2018, 11.2*) Найти наименьшую длину отрезка числовой оси, содержащего три различных решения уравнения

$$\cos 2x - \sin 2x - \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin x + \sin x = 0.$$

38. (*«Росатом», 2021, 11.2*) Решить уравнение

$$(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x})(\cos 2x + \sqrt{1+\cos^2 2x}) = 1.$$

39. (*«Росатом», 2020, 11.2*) Решить уравнение

$$\sin\left(x(\eta(x) - \eta(x-7\pi)\right) = 1 + \cos x,$$

где $\eta(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

40. (*«Росатом», 2017, 11.5*) При каких целых положительных n уравнение

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \ldots \cdot \sin nx = 0$$

имеет не менее десяти решений на отрезке $[0; \pi/4]$?

41. (*«Росатом», 2018, 11.2*) Найти решения $(x; y)$ системы

$$\begin{cases} \sin(2x+y) = -1, \\ \cos(x-y) = 1 \end{cases}$$

в прямоугольнике $-\pi \leqslant x \leqslant \pi/2$, $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

42. (*«Росатом», 2022, 11.2*) Координаты $(x; y)$ точек в квадрате

$$\{(x; y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\}$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin 1, \\ \cos x + \cos y = \cos 1. \end{cases}$$

Сколько таких точек находится в квадрате? Найти координаты $(x; y)$ наиболее удаленной точки от центра квадрата.

43. (*«Росатом», 2017, 11.2*) Решить уравнение

$$\cos\left(\arcsin(\sin x)\right) = \sin\left(\arccos(\cos 2x)\right).$$