

Тригонометрия

1 Тригонометрические преобразования и вычисления

1. («Бельчонок», 2022, 11.3) Докажите, что

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

2. («Физтех», 2015, 10.1) Известно, что $\sin y = \frac{3}{2} \sin x + \frac{2}{3} \cos x$, $\cos y = \frac{2}{3} \sin x + \frac{3}{2} \cos x$. Найдите $\sin 2x$.

$$\frac{7}{19}$$

3. («Физтех», 2016, 10.1) Известно, что $\operatorname{tg}(2\alpha - \beta) + 6 \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Найдите $\operatorname{ctg} \beta$.

$$\frac{7}{1} \text{ или } 1$$

4. («Физтех», 2016, 10.2) Найдите значение выражения

$$\sin^4 \frac{5\pi}{24} + \cos^4 \frac{7\pi}{24} + \sin^4 \frac{17\pi}{24} + \cos^4 \frac{19\pi}{24}.$$

$$\frac{7}{9^2 - 9}$$

5. («Физтех», 2016, 10.3) Найдите значение выражения $\operatorname{ctg} 50^\circ - 4 \cos 50^\circ$.

$$9^2 -$$

6. («Физтех», 2017, 11.3) Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, а числа $3 + \sin x, 3 + \sin y, 3 + \sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.

$$\frac{01}{1}$$

7. («Физтех», 2018, 11.4) Числа x и y таковы, что выполняются равенства

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = 2 \quad \text{и} \quad 5 \sin(2x - 2y) = \sin 2x \sin 2y.$$

Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

$$\frac{5}{9}$$

8. («Физтех», 2022, 11.1) Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

$$\frac{7}{1} - '2 - '0$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.5) Что больше:

$$\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ \quad \text{или} \quad \frac{200}{157} \pi ?$$

Второе

10. (Всесиб., 2023, 11.2) Тройка действительных чисел A, B, C такова, что

$$\sin A + \sin B + \sin C = 0 \quad \text{и} \quad \cos A + \cos B + \cos C = 0.$$

Найти значение выражения $\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A)$.

$-\frac{3}{2}$

11. («Росатом», 2021, 11.2) Доказать, что число $x_1 = -\sin \frac{\pi}{18}$ является корнем кубического уравнения

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Найти два других его корня.

$-\sin \frac{5\pi}{18}$ и $\sin \frac{8\pi}{18}$

2 Исследование тригонометрических функций

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2016.1) Сравните числа $(\sin 1 + \cos 1)$ и $\frac{49}{36}$. Ответ обоснуйте.

Первое больше

13. («Физтех», 2015, 10.2) Дана функция

$$g(x) = \frac{2 \cos^4 x + \sin^2 x}{2 \sin^4 x + 3 \cos^2 x}.$$

Найдите:

- а) корни уравнения $g(x) = \frac{1}{2}$;
- б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

а) $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ (в $\mathbb{Z} \ni u$, $u\pi + \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ (в

14. («Ломоносов», 2018, 10–11.7) Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sin(x + \sin x) + \sin(x - \sin x) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin \sin x.$$

$\frac{\pi}{2} - \pi$

15. (ОММО, 2009.8) Найдите сумму всех корней уравнения

$$2 \cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0,$$

принадлежащих отрезку $[-\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}]$.

0

3 Тригонометрические уравнения

16. («Физтех», 2014.2) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{3} \cos x}{\sin x + \cos x} = \operatorname{tg} 2x + \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

17. («Физтех», 2020, 11,2) Решите уравнение

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$\mathbb{Z} \ni \pi, \frac{11\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = x, \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = x, \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = x$$

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.3) Решите уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.3) Решить уравнение

$$6 \cos 9x \cos 2x = 1 + 3 \cos 11x + 2 \cos^3 7x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \cos \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2}$$

20. (ОММО, 2012.5) Найдите сумму всех различных корней уравнения

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0,$$

принадлежащих интервалу $(0; \pi)$.

$$\frac{\pi}{11}$$

21. («Ломоносов», 2013.1) Решить уравнение

$$\sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} |\cos x| = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{11\pi}{12} + 2\pi n, \frac{12\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

22. («Физтех», 2015, 10.1, 11.1) Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| + \cos 3x}{\sin x \cos 2x} = -2\sqrt{3}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{6\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

23. («Физтех», 2015, 11.2) Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{2} \cos 2x + 2\right) |2 \cos 2x - 1| = \cos x (\cos x + \cos 5x).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{7}{2} \cos 2x + 2$$

24. («Физтех», 2016, 11.1) Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{2 \cos 3x}{\cos x} = 5 |\sin x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \sin x + \frac{1}{1} \arcsin$$

25. (ОММО, 2009.8) Найдите сумму всех корней уравнения

$$2 \cos 3x + 8 |\sin x| - 7 = 0,$$

принадлежащих отрезку $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$.

0

26. («Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11.2) Решите уравнение

$$\sqrt{25 \sin x + 24} + 2\sqrt{3} \cos x = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \sin 2\pi n, \frac{1}{3} \arcsin$$

27. («Физтех», 2013, 11.3) Решите уравнение

$$\sqrt{3 + 4 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3 \cos x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \sin 2\pi n, \frac{1}{3} \arcsin$$

28. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.4) Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2} \sin 3x + \sqrt{2 + \cos 3x}\right) \left(2 \cos \left(\sqrt{2} \arcsin x\right) - 1\right) = 0.$$

$$\frac{2}{3} \arcsin x + \frac{6}{2} - \frac{9}{2}$$

4 Минимаксные задачи в тригонометрии

29. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.3) Решите неравенство

$$\frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x \leq 2 \cos^3 3x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \sin 2\pi n, \frac{1}{2}$$

30. («Физтех», 2016, 11.2) Решите уравнение

$$(\cos 2x - 2 \cos 4x)^2 = 9 + \cos^2 5x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u\lambda + \frac{c}{x}$$

31. (ОММО, 2013.5) Решить систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u \cdot y \cdot u\lambda + \frac{c}{x} = z \cdot u\lambda + \frac{c}{x} = n \cdot y\lambda + \frac{p}{x} \mp = x$$

32. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.4) Определите минимальное значение величины $|x + y|$ при условии, что числа x и y удовлетворяют соотношению

$$5 \cos(x + 4y) - 3 \cos(x - 4y) - 4 \sin(x - 4y) = 10.$$

$$\frac{c}{x} \operatorname{сосоге} \frac{p}{x} - \frac{p}{x}$$

33. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.5) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \sin x + \sin^2 y - \sin^2 x \cos^2 y = 1, \\ 2 \cos^2 x + 4 \sin x - \cos^3 y = 5. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni y \cdot u \cdot (y\lambda z + \lambda \cdot u\lambda z + \frac{c}{x})$$

34. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.5) Найдите наименьшее значение $|x - y|$ при условии

$$(\cos^4 x + 1) (4 \cos^4 y + 1) = 8 \cos^3 x \cos^2 y, \quad x \in [\pi; 2\pi], \quad y \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

$$\frac{p}{x\lambda}$$

35. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.5) Найдите количество точек на координатной плоскости, через которые проходит как кривая $(3x - 4x^3)^{13} = 1 - (4y^3 - 3y)^{18}$, так и кривая $x^2 = 1 - y^2$.

$$\text{Левая}$$

36. («Ломоносов», 2008.7) Решить уравнение

$$\sqrt{2} + \cos x = \left| \cos \frac{4x}{3} \right| \sin x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot u\lambda g + \frac{p}{x\lambda}$$

5 Тригонометрические неравенства

37. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.1) Решите неравенство

$$3 \sin \left(\frac{2x}{3} \right) \geq 5 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3} \right).$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \pi \cdot 9 + \frac{\pi}{3}$$

38. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11.2) Решите неравенство

$$\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \right)^7 > 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}; \pi \cdot 2$$

39. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.3) Найдите решения неравенства

$$\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} > 2 \sin x$$

на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{8}{3}\right]$.

$$\left[\frac{\pi}{8}; \frac{9}{2\pi}\right] \cap \left(\frac{9}{\pi}; \frac{\pi}{1}\right]$$

40. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.2) Решите неравенство

$$\sqrt{2} \cos 2x \geq \sin x - \cos x.$$

$$\left[u\pi + \frac{\pi}{2}; u\pi + \frac{\pi}{2}\right] \cap \left[u\pi + \frac{\pi}{2}; u\pi + \frac{\pi}{2}\right]$$

41. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11.4) Решите неравенство

$$\sqrt{2 \sin x \cos x} > \cos^3 x - \sin^3 x + \sin x \cos x (\sin x - \cos x).$$

$$\mathbb{Z} \ni u \cdot \pi \cdot 2 + \frac{\pi}{2}; \pi \cdot 2 + \pi \cap \left[u\pi + \frac{\pi}{2}; u\pi + \frac{\pi}{2}\right]$$

6 Обратные тригонометрические функции

42. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.1) Решите уравнение

$$\left(\arcsin \frac{3}{5} - \arccos \frac{4}{5} \right) \cdot x + \pi = 2 \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}.$$

43. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.2) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\arcsin(2x) + \arccos(2x) \geq \frac{\pi}{4} \cdot (y^2 - 2).$$

4

44. (ММО, 2016, 11.2) Существует ли такое значение x , что выполняется равенство

$$\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1?$$

45. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.1) Выясните, какое из чисел больше:

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{3} + 2) + \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 2) \quad \text{или} \quad \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Первое число больше

46. («Ломоносов», 2016.2) Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{arctg}^2 x = 3 \operatorname{arctg} x + \frac{\pi^2}{36}.$$

$\frac{\pi}{1}$

47. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.3) Что больше: $2 \sin \frac{5\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16}$ или сумма корней уравнения $|3 \arccos x| = |\arcsin x|$?

Первое число больше

48. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.4) Вычислите

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{2-1}{2^3-1} + \operatorname{arctg} \frac{3-1}{3^3-1} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{100-1}{100^3-1} \right).$$

$\frac{202}{66}$

49. («Ломоносов», 2012.2) Найдите все целочисленные решения уравнения

$$\left| \arccos(\sin 6) - \frac{\pi x}{2} \right| = 6.$$

5

50. («Физтех», 2023, 11.3) Решите уравнение

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}.$$

$\left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\} \ni x$

51. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11.2) Решите неравенство

$$\arcsin(6x^2 - 12x + 6) + 2 \arcsin(x - 1) < 0.$$

$\left(\frac{0}{1} \right)$

52. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11.3) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin y} \leq \sqrt{\arccos x}.$$

$$\frac{\pi}{2} + 1$$

53. («Ломоносов», 2018, 10–11.5) Решите неравенство

$$\arcsin \left(\frac{5}{2\pi} \arccos x \right) > \arccos \left(\frac{10}{3\pi} \arcsin x \right).$$

$$\left[\frac{0\pi}{2\pi} \arcsin : \frac{0\pi}{2\pi} \arcsin \right) \cap \left(\frac{0\pi}{2\pi} \arcsin : \frac{0\pi}{2\pi} \arcsin \right]$$