

Текстовые задачи с целыми числами

Иногда в обычных с виду задачах возникают нестандартные ситуации — например, уравнение с двумя неизвестными, или система из уравнения и неравенства, или система неравенств. В таких случаях решающую роль играет тот факт, что одна или несколько переменных принимают только целочисленные значения.

1 Наличие неравенств

1. («Росатом», 2019, 8.1) В доме 80 комнат, объединенных в 45 квартир: однокомнатных, двухкомнатных и трехкомнатных. Число двухкомнатных квартир не менее, чем на 50% превышает число трехкомнатных, а количество однокомнатных больше двухкомнатных не менее, чем на 30%. Сколько двухкомнатных квартир в доме?
2. («Курчатов», 2023, 8.1, 9.1) Республика Тропико состоит из нескольких островов, между которыми нет ни одного моста. Новый президент Тропико решил каждую пару островов соединить одним мостом. За время своего правления он не успел построить лишь несколько мостов, выходящих из острова Дальний (все остальные мосты были построены). Известно, что всего было построено 49 мостов. Сколько построили мостов, выходящих из острова Дальний?
3. (Всесиб., 2016, 8.2) В автобусе имеются одноместные и двухместные сидения. Утром в автобусе сидело 13 человек, а полностью свободных сидений было 9. Вечером в автобусе сидело 10 человек, а полностью свободными были 6 сидений. Сколько сидений в автобусе?
4. («Покори Воробьевы горы!», 2019, 7–8.1) Сумма 8 различных натуральных чисел равна 96, причем известно, что наименьшее из этих чисел составляет не менее половины от наибольшего из них. Найдите эти числа.
5. («Курчатов», 2019, 9.1) Рыбак Вася поймал несколько рыб. Три самые большие рыбины, составляющие 35% веса всего улова, он положил в холодильник. Три самые маленькие, составляющие $\frac{5}{13}$ веса всех оставшихся, рыбак отдал коту. Всю остальную пойманную рыбу Вася съел сам. Сколько рыб поймал Вася?
6. («Бельчонок», 2022, 9.2) У двоих бельчат было одинаковое количество сосновых шишек и одинаковое количество кедровых шишек. Всего шишек у каждого бельчонка было меньше 25. Первый бельчонок набрал ещё столько же сосновых шишек, сколько у него было, и 26 кедровых шишек. У него оказалось больше сосновых, чем кедровых. Второй бельчонок набрал ещё столько же кедровых шишек, сколько у него было, а 4 сосновые съел. У него оказалось больше кедровых, чем сосновых. Сколько сосновых и кедровых шишек было у каждого бельчонка изначально?
7. («Покори Воробьевы горы!», 2019, 7–8.2, 9.2) Доля отличников в классе составляет менее одной трети, но более 20%, причем известно, что оно кратно 5. А доля хорошистов составляет менее 20%, но более $\frac{2}{11}$ учащихся. Для школьников, которые не являются хорошистами и отличниками, организованы дополнительные занятия. Сколько человек должны посещать эти занятия, если известно, что в классе учится не более 20 школьников?

8. (*Открытая олимпиада, 2016, 8.3*) Аня, Ваня, Даня и Таня собирали яблоки. Оказалось, что каждый из них собрал целое количество процентов от общего числа собранных яблок, причём все эти числа различны и больше нуля. Затем Таня, собравшая больше всех яблок, съела свои яблоки. После этого оказалось, что у каждого из ребят по-прежнему целое количество процентов, но уже от числа оставшихся яблок. Какое минимальное количество яблок могло быть собрано?

2 Соображения делимости

9. (*«Ломоносов», 2017, 9.1*) На доске было написано 21 последовательное натуральное число. Когда одно из чисел стёрли, сумма оставшихся стала равна 2017. Какое число стёрли?

10. (*«Росатом», 2023, 9.3*) Петя написал на доске 8 последовательных натуральных чисел, а Вася стер два из них. Сумма оставшихся чисел оказалась равной 2022. Какое наименьшее возможное число мог написать Петя?

11. (*Всеросс., 2021, ШЭ, 8.5*) На бал пришли дамы и джентльмены — всего меньше 50 человек. Во время первого танца лишь четверть дам не были приглашены на танец и $\frac{2}{7}$ от общего количество джентльменов никого не пригласили. Сколько человек пришло на бал? (Для танца некоторый джентльмен приглашает некоторую даму.)

12. (*Всесиб., 2015, 9.1*) В школе лодырей устроили соревнования по списыванию и подсказке. Известно, что 75% учеников школы вообще не явились на соревнования, а все остальные приняли участие хотя бы в одном из соревнований. При подведении итогов оказалось, что в обоих соревнованиях участвовало 10% всех явившихся и что участвовавших в соревновании по подсказке было в полтора раза больше, чем участвовавших в соревновании по списыванию. Найти наименьшее возможное число учеников в школе лодырей.

13. (*«Росатом», 2016, 8.2*) В стеклянной банке разместились коллекция жуков. Часть жуков имеет 6 лапок, остальные — по 8 лапок. Коля внимательно пересчитал все лапки, их оказалось 86 штук. Какое минимально возможное количество жуков могло находиться в банке?

14. (*«Росатом», 2021, 9.1*) Команда из трех пиратов причалила к острову, чтобы разделить оставленный там клад золотых монет. Время было позднее, и они решили отложить дележ монет до утра. Первый пират проснулся ночью и решил забрать свою долю. Разделить монеты на три равные части ему не удалось, поэтому он забрал сначала одну монету, а потом треть от оставшихся и пошел спать. Не зная про это, второй пират проснулся ночью и проделал то же самое что и первый. Третий пират повторил то, что сделали первый и второй. Утром, не сказав друг другу ни слова, они разделили между собой поровну оставшиеся монеты. Сколько монет досталось каждому пирату, если первоначально клад содержал не менее 110 и не более 200 монет?

15. (*«Шаг в будущее», 2019, 10.2*) Монолитный блок типа A весит 17 кг, а монолитный блок типа B — 7 кг. Можно ли из этих блоков сформировать груз, равный максимальной грузоподъемности крана, которая составляет 317 кг? Если да, то какое наибольшее количество блоков при этом будет поднимать кран?

16. (*«Надежда энергетики», 2018, 10.2*) В стране Лимонии лишь два денежных знака, достоинством в 7 лимонов и в 9 лимонов. Найдите все способы представления такими знаками суммы в 997 лимонов и укажите их количество.

17. («Надежда энергетики», 2016, 8.1) Установок трех типов всего не более 200. Установок типа 2 в 4 раза больше, чем типа 1, число установок типа 3 кратно числу установок типа 1. Если бы установок типа 3 было в 5 раз больше, то их было бы на 99 больше, чем установок типа 2. Найдите число установок каждого типа.

18. («Физтех», 2021, 9.2) На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое увеличить в 32 раза, то сумма чисел на доске станет равной 477. Если же самое большое число увеличить в 14 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 477. Какие числа могли быть написаны на доске?

19. («Покори Воробьевы горы!», 2020, 5–6.5, 7–8.3, 9.2) Коля решил проверить свое знание четырех арифметических действий. Он взял два натуральных числа и нашел их сумму. Потом нашел разность этих чисел — первое число минус второе. Потом нашел произведение этих же чисел. Потом частное от деления первого числа на второе. Сложив все 4 полученных результата Коля получил 153. Найдите два числа, над которыми производились действия.

20. («Физтех», 2023, 9.1) Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 22 кубика, у него осталось 3 кубика. После чего он из всех своих кубиков построил $N - 1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наибольшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их меньше 300?

21. («Бельчонок», 2022, 9.3) Алиса написала несколько положительных целых чисел. Саша переписал эти числа и добавил одно целое число, меньше всех чисел Алисы. Каждый из них нашёл сумму и произведение своих чисел и поделил сумму на произведение. У Саши получилось число в 5 раз меньше, чем у Алисы. Какое число он мог добавить?

22. («Ломоносов», 2023, 9.3, 10.6) Для укладки пола в квадратной комнате купили одинаковые квадратные плитки. 15 плиток оказались разбитыми. Оставшимися плитками выложили пол в другой комнате прямоугольной формы, в длину которой укладывается на 11 плиток больше, чем в ширину. Сколько плиток было куплено?

23. («Ломоносов», 2015, 7.4, 8.1) На день рождения Андрея последней пришла Яна, подарившая ему мяч, а предпоследним — Эдуард, подаривший ему калькулятор. Испытывая калькулятор, Андрей заметил, что произведение количества всех его подарков на количество подарков, которые были у него до прихода Эдуарда, ровно на 16 больше, чем произведение его возраста на количество подарков, которые были у него до прихода Яны. Сколько подарков у Андрея?

24. («Шаг в будущее», 2018, 8.6) Винни-Пух и Пятачок делят конфеты. Если Винни возьмет у Пятачка несколько конфет, то у него станет конфет в 4 раза больше, чем у Пятачка. Если же Пятачок заберет у Винни 90 конфет из его первоначального количества, то у Пятачка станет конфет в 5 раз больше, чем у Винни. Какое минимально возможное количество конфет могло быть у Пятачка и Винни-Пуха первоначально?

25. («Шаг в будущее», 2019, 8.5) У Пети и Маши целое число рублей у каждого. Петя говорит Маше: «Если ты дашь мне 3 рубля, у меня будет в n раз больше рублей, чем у тебя». Маша отвечает: «Если ты дашь мне n рублей, у меня будет в 3 раза больше рублей, чем у тебя».

Какие натуральные значения может принимать n , если ребята говорят правду?

26. (Всесиб., 2020, 9.2) Если Петя отдаст две свои тетрадки Васе, то у Васи станет в n раз больше тетрадок, чем у Пети, а если Вася отдаст n своих тетрадок Пете, то у Пети станет в два раза больше тетрадок, чем у Васи. Найти все натуральные значения n , при которых это возможно.

- 27.** (*Открытая олимпиада, 2015, 8.8*) Аня и Коля собирали яблоки. Оказалось, что Аня собрала столько же яблок, сколько Коля собрал процентов от общего числа собранных ими яблок, при этом Коля собрал нечётное число яблок. Сколько яблок собрали Аня и Коля вместе?
- 28.** (*«Ломоносов», 2012, 10–11.3*) В группу, состоящую из 19 детей, присланы подарки двух видов: каждый подарок первого вида содержит 5 пряников и 9 конфет, а второго — 4 пряника и 11 конфет. Объединив эти подарки, все пряники разделили между детьми поровну. Могло ли случиться при этом, что конфеты разделить поровну не удалось?
- 29.** (*ОММО, 2013.2*) В автомобильном пробеге Москва—Удоев—Москва участвовали несколько (одинаковых по численности) делегаций автолюбителей. Некоторые из этих делегаций заняли все места в 3-местных «Паккардах» и одном 4-местном «Лорен-Дитрихе», а остальные делегации предпочли занять все места в 5-местных «Студебеккерах» и одном 2-местном «Фиате». Сколько автолюбителей было в делегации, если «Студебеккер» в пробеге оказалось на 5 больше, чем «Паккард»?
- 30.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11.2*) Число в семеричной системе счисления является трёхзначным. В системе счисления с основанием 11 оно записывается теми же тремя цифрами, но в обратном порядке. Какова его запись в десятичной системе счисления? Найдите все возможные значения.
- 31.** (*МГУ, мехмат, 2000-05.2*) Два друга, Ваня и Петя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Ваня нашел 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашел. Ваня взял себе белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберезовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равной доле подосиновиков в принесенных Петей домой грибах?
- 32.** (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11.4*) Для детского сада закупили наборы конфет трёх разных типов, потратив 2200 рублей. Первый набор стоит 50 рублей и содержит 25 конфет. Второй набор стоит 180 рублей и содержит 95 конфет, третий набор стоит 150 рублей и содержит 80 конфет. Сколько каких наборов купили, если общее количество конфет в них максимально?