

Системы алгебраических уравнений

1 Равносильные преобразования систем

1. («Шаг в будущее», 2022, 8.2) Найдите все значения x и y , при которых выполнены оба уравнения

$$\begin{cases} x\sqrt{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 9 + 4\sqrt{3}} - 2y = y\sqrt{(1 - \sqrt{6} - \sqrt{2})^2}, \\ xy = 6 + 2x - 3y. \end{cases}$$

2. («Шаг в будущее», 2019, 8.2) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 2xy + 4, \\ \frac{(y + 2) \cdot (x - 4)}{x^2 - 6x + 8} = x - 2. \end{cases}$$

3. («Шаг в будущее», 2019, 8.2) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y - x + 1}{x^2 - 3x} = 1, \\ y^2 + 5 + 2xy = 6y + 6x - x^2. \end{cases}$$

4. («Шаг в будущее», 2020, 8.2) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + xy = 15, \\ x^2 + xy = 10. \end{cases}$$

5. («Надежда энергетики», 2017, 8.1) Найдите числа x , y , z из уравнений

$$\begin{cases} 1 + x + y = xy, \\ 2 + y + z = yz, \\ 5 + z + x = zx. \end{cases}$$

6. («Физтех», 2016, 9.5, 10.5, 11.3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

7. («Бельчонок», 2023, 10.1) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ 2y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases} \quad (x, y \neq 0)$$

8. («Физтех», 2022, 10.2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = 17, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = -10. \end{cases}$$

9. («Физтех», 2022, 10.3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

10. (САММАТ, 2023, 10.2) Решите систему

$$\begin{cases} x_1(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2023}) = 1, \\ x_2(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2023}) = 3, \\ x_3(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2023}) = 5, \\ \dots \\ x_{2023}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2023}) = 4045. \end{cases}$$

11. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 9.6, 11.3) Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{32}{y^5} + \frac{48}{y^3} + \frac{17}{y} - 15, \\ \frac{1}{y} = \frac{32}{z^5} + \frac{48}{z^3} + \frac{17}{z} - 15, \\ \frac{1}{z} = \frac{32}{x^5} + \frac{48}{x^3} + \frac{17}{x} - 15. \end{cases}$$

12. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2020, 10.6) Про вещественные числа m , n , x , y известно следующее:

$$\begin{cases} mx + ny = 4, \\ mx^2 + ny^2 = 2, \\ mx^3 + ny^3 = 6, \\ mx^4 + ny^4 = 38. \end{cases}$$

Чему равно $((m + n)(x + y) + 5xy)(m + n + x + y)$?

13. («Физтех», 2022, 11.1) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

14. («Физтех», 2022, 11.2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

2 Двойная замена

15. («Физтех», 2016, 9.5, 10.4, 11.3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{2x + 3y} - 3y = 5, \\ 4x^2 + 2x + 3y - 9y^2 = 32. \end{cases}$$

3 Симметричные системы

16. («Бельчонок», 2023, 10.1) Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1, \\ x^3 + y^3 = 4. \end{cases}$$

17. («Бельчонок», 2018, 10.2) Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x^3 + y^3 = 16. \end{cases}$$

4 Минимаксные задачи

18. («Ломоносов», 2013, 9.3)

$$\begin{cases} x^2 = 2\sqrt{y^2 + 1}, \\ y^2 = 2\sqrt{z^2 - 1} - 2, \\ z^2 = 4\sqrt{x^2 + 2} - 6. \end{cases}$$

19. (САММАТ, 2022, 9.9) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 48, \\ xy - 2z^2 - 4u^2 = 576. \end{cases}$$

20. («Ломоносов», 2021, 10–11.2) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y} + |y + 8| = 1, \\ \sqrt{x^2 + y - 1} + |x + 8| = 5. \end{cases}$$

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2021, 10–11.4) Решите систему

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6, \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2, \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3. \end{cases}$$

22. («Бельчонок», 2022, 11.2) Найдите для всех натуральных $n > 1$ положительные решения системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 3, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{2x_2} + \dots + \frac{1}{nx_n} = 3. \end{cases}$$