

Стереометрия-2. Экстремальные задачи

1. («Надежда энергетики», 2023, 11.2) Найдите максимальное значение величины

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

если известно, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3x + 8y + z.$$

12

2. («Физтех», 2012.3) Рассматриваются всевозможные правильные треугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a .

- а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.
 б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

$$\frac{2}{3} \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right)^3$$

3. («Ломоносов», 2011.3) Из шара какого наименьшего радиуса можно вырезать правильную четырёхугольную пирамиду с ребром основания 16 и боковым ребром 15?

28

4. («Ломоносов», 2015.5) Отрезок $AB = 8$ пересекает плоскость α под углом 30° и делится этой плоскостью в отношении $1 : 3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.

27

5. («Ломоносов», 2015.7) Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 6, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2 \arcsin \frac{1}{3}$?

523

6. («Ломоносов», 2016.7) Найдите наибольшее значение объёма треугольной пирамиды, у которой противоположные рёбра попарно равны, а сумма длин всех рёбер равна $36\sqrt{2}$.

72

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2012.4) Найдите максимально возможное отношение объёма конуса к объёму шара, содержащего этот конус.

278

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2016.5) Боковые рёбра SA , SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SA , на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SC . Какое наименьшее значение может иметь объём пирамиды $SABC$ при этих условиях?

27

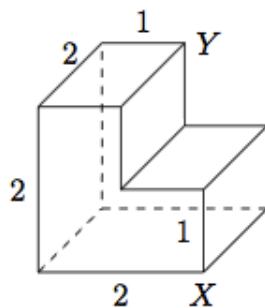
9. («Покори Воробьёвы горы!», 2014.5) Одно основание правильной n -угольной призмы ($n \geq 3$) имеет n общих точек со сферой радиуса 3; другое основание имеет с этой сферой одну общую точку. Какие значения может принимать объём призмы?

$$\left[\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{3} > \Delta > 0 \text{ ; или } \frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{3} \geq \Delta > 0 \right]$$

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2012.5) Высота правильной треугольной пирамиды, проведённая из вершины основания к противоположной боковой грани, равна 4. Какие значения может принимать площадь полной поверхности такой пирамиды?

$$\left[\left(\infty + \frac{8\sqrt{3}}{9} \right) \right]$$

11. (ОММО, 2011.9) На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины X до вершины Y имеет длину 4. Прав ли он?



Нет

12. (ОММО, 2014.10) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с рёбрами $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 5$ проведены два сечения — плоскостью, проходящей через диагональ $A_1 C$, и плоскостью, проходящей через диагональ $B_1 D$. Найдите наибольшее возможное значение суммы площадей поверхностей многогранников, на которые эти сечения разбивают данный параллелепипед.

1961

13. (ОММО, 2017.10) В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2$, $DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

$$\left[\frac{6}{9\sqrt{10}} \right]$$

14. (ОММО, 2018.10) Точки M , N и K расположены на боковых рёбрах AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ так, что $AM : AA_1 = 1 : 2$, $BN : BB_1 = 1 : 3$, $CK : CC_1 = 1 : 4$. Точка P принадлежит призме. Найдите наибольшее возможное значение объёма пирамиды $MNKP$, если объём призмы равен 16.

4

15. («Физтех», 2021, 11.2) Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 6$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра — наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

$$\sqrt{2} \wedge \mp \sqrt{2} \wedge$$

16. («Росатом», 2022, 11.4) Длины ребер a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 прямоугольных параллелепипедов P_A и P_B — целые числа. Если в параллелепипеде P_A увеличить на 1 длину одного из ребер a_1, a_2 или a_3 , то отношение объемов $V_A : V_B$ изменится на 3, 5 или на 7 единиц соответственно. Найдите наименьшее возможное при этих условиях значение отношения объемов $V_A : V_B$.

$$501$$

17. («Будущие исследователи — будущее науки», 2015, 11.5) В тетраэдре $SABC$ ребра SA, SB, SC взаимно перпендикулярны и равны a, b, c соответственно.

- а) Найдите сторону куба с вершиной S наибольшего объема, целиком лежащего в тетраэдре;
- б) Определите размеры прямоугольного параллелепипеда с вершиной S наибольшего объема, целиком лежащего в тетраэдре.

$$\frac{a}{3} : \frac{a}{3} : \frac{a}{3} \quad (a : \frac{2b+2c+2d}{3}) \quad (a$$

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2023, 11.5) На сфере расположены точки A, B, C таким образом, что минимальные расстояния по поверхности сферы от точки A до точки B , от точки A до точки C и от точки B до точки C равны $6\pi, 8\pi, 10\pi$ соответственно. Найдите минимальный возможный при таких условиях периметр треугольника ABC .

$$(9\wedge + 9\wedge 2 + 2\wedge 9) 9 = (\frac{21}{2} \text{cis} + \frac{9}{2} \text{cis} + \frac{1}{2} \text{cis}) 42$$

19. («Росатом», 2020, 11.6) В каком отношении $CE : CD$ точка E делит сторону CD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, боковое ребро которой наклонено к основанию под углом 30° , если известно, что площадь треугольника SBE минимально возможная?

$$9 : 8$$

20. («Росатом», 2022, 11.6) По диагоналям оснований AC и B_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a ползут два муравья Гоша и Леша. Движение они начали одновременно из точек A и B_1 соответственно с постоянной скоростью, причем скорость Леша была в два раза больше скорости передвижения Гоши, и закончили, когда Леша оказался в точке D_1 . Какое наименьшее расстояние разделяло Гошу и Лешу во время движения?

$$\frac{01}{11} \wedge v = \text{цишр}$$

21. (Открытая олимпиада, 2021, 11.7) Два куба с ребром $12\sqrt{\frac{8}{11}}$ имеют общую грань. Сечение одного из этих кубов некоторой плоскостью — треугольник площади 16. Сечение другого той же плоскостью — четырёхугольник. Какое наибольшее значение может принимать его площадь?

$$871$$

22. («Шаг в будущее», 2016, 11.10) В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой высота относится к стороне основания, как $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через медиану боковой грани? Найдите отношение объёмов частей, на которые секущая плоскость разбивает пирамиду в этом случае.

$$61 : \varepsilon ; \frac{2\sqrt{2}}{3} R = S$$