Вероятность

1 Классическая вероятность

1. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.1*) В классе меньше 30 человек. Учитель заметил, что вероятность выбора отличницы среди девочек равна $\frac{3}{13}$, а вероятность выбора отличника среди мальчиков равна $\frac{4}{11}$. Сколько в классе отличников?

$\boxed{7}$

2. (*«Ломоносов», 2022, 9.1*) На гранях шестигранного игрального кубика расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Кубик бросают, и он падает на стол. После этого видны числа на всех гранях, кроме одной. Числа на пяти видимых гранях перемножаются. Найдите вероятность того, что это произведение делится на 16.

$\boxed{0{,}5}$

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2021, 9.1*) Монету бросили 2021 раз. Какова вероятность, что выпадет четное количество «орлов»?

$\boxed{1/2}$

4. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.2*) Ваня и Дима пошли на рынок. У Вани было 1000 рублей, а у Димы — 2000 рублей. Они покупали что-то независимо друг от друга, а в какой-то момент они встретились и решили купить модель танка за 1800 рублей. Найдите вероятность того, что оставшейся у них суммы хватит на это.

$\boxed{\frac{7}{20}}$

5. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.4*) Имеется 20 шаров с числами 1, 2, ..., 10, каждое число встречается по два раза. Эти шары случайным образом раскладываются по два в 10 корзин. Из каждой корзины извлекается один шар. Какова вероятность того, что на извлеченных шарах все числа различны?

$\boxed{\frac{(10!)^2\cdot 2^{10}}{20!}}$

6. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.6*) Каждая из двух корзин содержит белые и черные шары, причем общее число шаров в обеих корзинах равно 25. Из каждой корзины наугад вынимают по одному шару. Известно, что вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна 0,54. Найти вероятность того, что оба вынутых шара окажутся черными.

$\boxed{0{,}04}$

7. (*САММАТ, 2022, 9.10*) На доске выписаны целые числа от 1 до 10. Игорь и Матвей на листках выписывают некоторые из написанных на доске чисел (хотя бы по одному числу). Какова вероятность того, что найдется хотя бы одно число, которое назовут оба мальчика, когда будут зачитывать выбранные числа?

$\boxed{P = \frac{4^{10}-3^{10}}{4^{10}-2^{11}+1} \approx 0{,}9455}$

8. (*«Физтех», 2016, 9*) Лабиринт представляет из себя цепочку из 7 комнат. Из первых 4 комнат в следующие ведут 2 двери, из оставшихся в следующую ведут 3 двери (из последней комнаты 3 двери ведут на выход). Лаборант случайным образом запер 10 дверей. Какова вероятность того, что крыса, посаженная в первую комнату, сможет выбраться из лабиринта?

$\boxed{\frac{432}{C_{17}^{10}} = \frac{54}{2431}}$

9. (*«Курчатов», 2022, 11.1*) На тарелке лежат различные конфеты трех видов: 2 леденца, 3 шоколадных и 5 мармеладных. Света последовательно все их съела, выбирая каждую следующую конфету наугад. Найдите вероятность того, что первая и последняя съеденные конфеты были одного вида.

$\boxed{14/45}$

10. (*«Физтех», 2020, 10.1*) Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160?

Вероятность второго события больше

11. (*«Физтех», 2020, 11.1*) Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть p — вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а q — вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите $p - q$.

$\boxed{\frac{1}{2^{90}} \cdot C_{90}^{35}}$

12. (*«Росатом», 2017, 11.4*) Через случайно выбранные три вершины куба с ребром 2 проводится плоскость. Найти вероятность того, что площадь сечения превзойдет 5. Допускается, что эти вершины принадлежат одной грани куба.

$\boxed{\frac{3}{7}}$

13. (*«Росатом», 2020, 11.4*) Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число, кратное 5 и имеющее при делении на 7 остаток 3.

$\boxed{0{,}026}$

14. (*«Росатом», 2017, 11.4*) Случайно выбранное шестизначное целое положительное число оканчивается на 32. Найти вероятность того, что оно делится на 14.

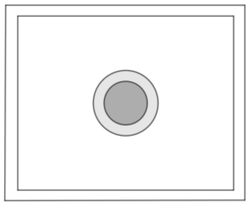
$\boxed{\frac{257}{1800}}$

15. (*«Росатом», 2018, 11.4*) Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 10 шагов и остановился. Найти вероятность того, что он окажется на расстоянии более двух шагов от начала движения.

$\boxed{\frac{11}{32}}$

2 Геометрическая вероятность

16. (*«Шаг в будущее», 2018, 9.2*) Дима посадил в центре прямоугольного листа бумаги размером 15 см на 20 см круглую кляксу радиусом 2 см. Сразу после этого Дима посадил ещё одну такую кляксу, которая также целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы пересекаются.



$\boxed{\frac{\pi}{11}}$

17. (*«Шаг в будущее», 2019, 9.6*) Ксюша, Ваня и Вася решили пойти в кино. Они договорились встретиться на автобусной остановке, но не знают, кто во сколько придёт. Каждый из них может прийти в случайный момент времени с 14.00 до 15.00. Вася самый терпеливый: если он придёт и на остановке не будет ни Ксюши, ни Вани, то он будет ждать кого-нибудь из них 20 минут, и если никого не дождётся, то пойдет в кино один. Ваня менее терпеливый: он будет ждать лишь 10 минут. Ксюша самая нетерпеливая: она вообще не будет ждать. Однако если Ваня и Вася встретятся, то они будут ждать Ксюшу до 15.00. Определить вероятность того, что в кино они пойдут все вместе.

$\boxed{\frac{31}{216}}$

18. (*«Росатом», 2019, 11.4*) На сторонах BA и BC треугольника ABC совершенно случайно взяты точки M и N. Найти вероятность того, что площадь треугольника BMN окажется не больше половины площади треугольника ABC.

$\boxed{\frac{1+\ln 2}{2}}$

19. (*«Росатом», 2018, 11.4*) На окружности совершенно случайно взяты три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный.

$\boxed{\frac{3}{4}}$

20. (*«Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2021, 11.5*) Соревнование по *бегу на непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B, после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Зритель купил билет на стадион и хочет, чтобы спортсмены пробежали мимо его места (тогда он сможет сделать удачную фотографию). Какова вероятность, что это случится?

$\boxed{1/4}$

3 Дискретные распределения

21. (*«Росатом», 2017, 11.4*) Игральная кость имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с двугранным углом 60° при основании. На боковых гранях пирамиды нарисованы цифры от 1 до 4, на основании — 5. Вероятность того, что при бросании кость ляжет на плоскость, закрывая определенную цифру, пропорциональна площади грани или основания с этой цифрой. Найти вероятность того, что сумма цифр, закрытых костью при трех бросаниях, равна 13.

$\boxed{\frac{1}{12}}$

22. (*«Росатом», 2020, 11.4*) Саша и Маша задают друг другу по пять каверзных вопросов и отвечают на них, не задумываясь, случайным образом. Вероятность того, что на заданный Машей вопрос Саша скажет неправду, не зависит от номера вопроса и равна $\frac{1}{2}$. Маша на вопрос Саши дает правдивый ответ с вероятностью $\frac{2}{3}$ независимо от порядка вопроса. После окончания диалога выяснилось, что Маша дала на два правдивых ответа больше, чем Саша. С какой вероятностью это могло произойти?

$\boxed{\frac{65}{324}}$

4 Формула полной вероятности

23. (*«Росатом», 2021, 11.4*) На столе лежит колода игральных карт 36 листов. Два опытных игрока Кондрат и Игнат (каждый из них всегда делает правильный ход) начинают игру по следующим правилам. В начале игры каждый из игроков совершенно случайно называет одну из цифр от 1 до 3. Их сумма определяет (на всю игру) максимальное число карт, которые при очередном ходе игроки могут забрать со стола. Игрок не может при своем ходе не взять со стола карту. Выигрывает тот из игроков, кто сможет забрать последнюю карту в колоде. Начинает всегда Кондрат. Какая вероятность победы Игната?

$\boxed{\frac{5}{9}}$

5 Математическое ожидание

24. (*«Росатом», 2016, 11.4*) Петя и Вова играют в кости на фантики. Ведущий игру Петя выигрывает, если при бросании им двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков не превосходит 4, и проигрывает во всех остальных случаях. Проиграв, Петя отдаёт Вове 1 фантик, выиграв — получает от Вовы k фантиков. Игра считается справедливой, если среднее значение выигрыша каждым игроком равна нулю. Найти значение k, при котором игра будет справедливой.

$\boxed{5}$

25. (*«Росатом», 2020, 11.4*) Точки P, Q расположены на сторонах AB и AC треугольника ABC так, что $AP : PB = 2 : 1$, $AQ : QC = 1 : 3$. Точка M выбрана на стороне BC совершенно случайно. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABC превосходит площадь треугольника PQM не более, чем в три раза. Найти математическое ожидание случайной величины — отношения площадей треугольников PQM и ABC.

$\boxed{\frac{2}{5};\ \frac{7}{24}}$

26. (*«Росатом», 2023, 11.5*) Петя записывает на листе бумаги строчку из 7 нулей и 20 единиц, расположенных в совершенно случайном порядке. Найти математическое ожидание случайной величины — числа нулей, записанных до появления первой единицы.

$\boxed{M\xi = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}}$