Многочлены

1 Кубические многочлены

1. (*Открытая олимпиада, 2021, 11.1*) Кубический многочлен имеет три корня. Наибольшее его значение на отрезке $[4; 9]$ достигается при $x = 5$, а наименьшее — при $x = 7$. Найдите сумму корней многочлена.

2. (*Открытая олимпиада, 2019, 11.2*) Существует ли многочлен третьей степени такой, что все его корни положительны, а все корни его производной отрицательны, при условии, что и у многочлена, и у производной есть хотя бы один действительный корень?

3. (*Открытая олимпиада, 2023, 11.2*) $P(x)$ — кубический многочлен с рациональными коэффициентами. Его значение в точке $\sqrt{7}$ составляет 8, а значение его производной в этой же точке равно 56. Найдите все коэффициенты многочлена.

4. (*«Курчатов», 2015, 11.2*) Даны многочлены $f(x) = x^3 - 9x$ и $g(x) = x^3 - 5x^2 + 1$. Докажите, что если $b > 0$, то у многочлена $f + bg$ есть не менее трёх различных действительных корней.

2 Теорема Безу

5. При каком значении a многочлен $x^{100500} + ax^{77} + 7$ делится на $x + 1$?

6. Найдите остаток от деления многочлена $x^{2018} + x + 2$ на $x^2 - 1$.

7. Некоторый многочлен даёт остаток 2 при делении на $x - 1$ и остаток 1 при делении на $x - 2$. Какой остаток даёт этот многочлен при делении на $(x - 1)(x - 2)$?

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 9.7*) Найдите a и b такие, что многочлен $x^{2013} + x^{99} + ax + b$ делится нацело на $x^2 - x + 1$.

9. (*«Росатом», 2023, 11.3*) Найти приведенный многочлен $P(x)$ (коэффициент при старшей степени x равен 1), для которого справедливо тождество $xP(x - 1) = (x - 3)P(x)$ по переменной x.

10. (*Моск. матем. регата, 2015, 11*) В равенстве $x^5 + 2x + 3 = p^k$ числа x и k — натуральные. Может ли число p быть простым?

3 Многочлены с целыми коэффициентами

11. (*ММО, 1996, 11.2*) Найдите какой-нибудь многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt[5]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[5]{2 - \sqrt{3}}$.

12. (*Всеросс., 2023, ШЭ, 11.6*) У многочлена $P(x)$ все коэффициенты — целые неотрицательные числа. Известно, что $P(1) = 4$ и $P(5) = 152$. Чему равно $P(11)$?

13. (*«Росатом», 2023, 11.1*) Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(17) = P(23) = 2023$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0) > 0$.

Теорема о рациональном корне. Если многочлен с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

имеет рациональный корень p/q (дробь несократима), то старший коэффициент a_0 делится на q, а свободный член a_n делится на p.

14. (*Турнир городов, 1998, 8–9*) Незнайка решал уравнение, в левой части которого стоял многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, а в правой — 0. Он нашёл корень $1/7$. Знайка, заглянув к нему в тетрадь, увидел только первые два слагаемых многочлена: $19x^3+98x^2$ и сразу сказал, что ответ неверен. Обоснуйте ответ Знайки.

15. (*ММО, 1995, 10.5*) Целые числа a, b и c таковы, что числа $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ и $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ тоже целые. Докажите, что $|a| = |b| = |c|$.

4 Целочисленная теорема Безу

Целочисленная теорема Безу. Если $p(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то для любых различных целых чисел a и b число $p(a) - p(b)$ делится на $a - b$.

16. (*«Росатом», 2020, 11.3*) Доказать, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами выражение $P(b) - P(a)$ делится на $b - a$ при любых целых a и b ($a \neq b$). Известно, что уравнение $P(x) = 8$ имеет целый корень на полуоси $x \geqslant 8$ и $P(4) = 17$. Найти этот корень.

17. Существует ли многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, такой, что $p(3) = 7$ и $p(8) = 20$?

18. (*Турнир им. Ломоносова, 2001*) Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Известно, что $P(1) = 1$ и что $P(n) = 0$ при некотором натуральном n. Найдите n.

19. (*Моск. матем. регата, 2013, 10*) Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2013$, $P(2013) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k.

20. (*Моск. матем. регата, 2016, 11*) У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность $P(2015)-Q(2015)$ кратна 1007.

21. (*«Росатом», 2021, 11.1*) Петя написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Васе угадать его степень. Вася задал Пете два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -3$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $(x - n)$, где n — его степень?». Получив ответы 1 и 6 соответственно, Вася уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

22. (*ОММО, 2020.1*) Дан многочлен

$$F(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 100x^{99}.$$

Можно ли, переставив коэффициенты в нём, получить многочлен

$$G(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \ldots + g_{99}x^{99}$$

такой, что для всех натуральных чисел $k \geqslant 2$ разность $F(k) - G(k)$ не кратна 100?