

Плоские множества

1 Просто раскрываем модули

1. (САММАТ, 2023, 9.7) Постройте кривую, все точки которой определяются уравнением $y^2 - 2|y| = 1 - x^2$. Найдите площадь фигуры, ограниченной этой кривой.

2 + π

2. («Физтех», 2016, 9.4) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (|x| + x)^2 + (|y| - y)^2 \leq 16, \\ y - 3x \leq 0, \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

π + $\frac{8}{3}$

3. («Физтех», 2022, 9.6) Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$ удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} 2y + 3x \geq |2y - 3x|, \\ y \leq -2x + 16, \\ x^2 - 12y + y^2 + 16 \geq 0. \end{cases}$$

π - 16

2 Снова раскрывать модули? Не обязательно :-)

4. Иногда оказывается полезным неравенство $|a| + |b| \geq a + b$. При каких a и b имеет место равенство?

5. («Физтех», 2016, 9.4, 10.4) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60,$$

и найдите площадь полученной фигуры.

0

6. (МГУ, ДВИ, 2012.5) Найдите площадь фигуры, состоящей из точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$|x| + |x + 3y| + 3|y - 2| = 6.$$

9

7. («Физтех», 2022, 9.6) Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4 - 2x - y| > 4, \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

74 - 29

3 Пользуемся симметрией

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11.3) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$||x| - 6| + ||y| - 7| \leq 10.$$

002

9. («Ломоносов», 2023, 9.2) Найдите площадь плоской фигуры, границы которой описываются уравнением

$$|y| + ||x| - 4| - 4 = 1.$$

79

4 Отрежем и переложим

10. («Физтех», 2019, 9.7) На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \geq |x + y|, \\ \frac{x^2 - 6x + y^2 - 8y}{3y - x + 6} \geq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

8

11. («Физтех», 2019, 9.7) На координатной плоскости рассматривается фигура M , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |y| + |4 + y| \leq 4, \\ \frac{x - y^2 - 4y - 3}{2y - x + 3} \geq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

8

12. («Ломоносов», 2011, 10–11.2) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 2x \geq 0, \\ -1 - x^2 \leq y \leq 2 + \sqrt{x}. \end{cases}$$

7

13. («Формула Единства» / «Третье тысячелетие», 2019, 9.3) Вычислите площадь множества точек на координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$(y + \sqrt{x})(y - x^2)\sqrt{1-x} \leq 0.$$

1

14. («Ломоносов», 2019, отбор, 10–11.4) Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 2\pi(x^2 + y^2) \leq 15, \\ x^4 - y^4 \leq xy - x^3y^3. \end{cases}$$

91

15. (МГУ, мех.мат, 2003-03.4) Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y + \log_2 x| + |y + 1 - 2^{x-1}| = |2y - 2^{x-1} + 1 + \log_2 x|, \\ |x| + |y + 1| + |y - 1| = x + 2. \end{cases}$$

2

5 Пара прямых

16. («Шаг в будущее», 2017, 9.3) Найдите наименьшую длину отрезка AB , если точка A принадлежит множеству, задаваемому уравнением $y^2 - 3x^2 - 2xy - 9 - 12x = 0$, а точка B — множеству, задаваемому уравнением $x^2 - 8y + 23 + 6x + y^2 = 0$.

3^

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11.5) Гипербола $y = 5/x$ пересекается с прямой $2x + y = 12$ в точках A и B , а с прямой $x + 2y = 8$ — в точках C и D . Найдите координаты точки, равноудалённой от точек A , B и C .

(8'2)

6 Угадаем задумку автора?

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11.3) Кривая на координатной плоскости задана уравнением

$$(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = \left(2 - \frac{|x|}{x}\right)^2.$$

Среди всех прямых, касающихся этой кривой в двух точках, найдите ту прямую, которая наименее удалена от точки с координатами $(10 - 4\sqrt{6}; 6)$.

4 + $\frac{9 \wedge 2}{01-x} = n$