Планиметрия

1. (*«Физтех», 2023, 8*) Биссектриса внутреннего угла при вершине A и биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника ABC пересекаются в точке E. Найдите $\angle BEC$, если $\angle BAC = 10°$. Ответ укажите в градусах.

85

2. (*«Курчатов», 2015, 7.4*) В прямоугольном треугольнике ABC провели биссектрису AL и отметили на гипотенузе AB такую точку K, что $AB = 3BK$. Оказалось, что угол ALK — прямой. Докажите, что $AL = BL$.

3. (*Математический праздник, 2020, 7.4*) Три стороны четырёхугольника равны, а углы четырёхугольника, образованные этими сторонами, равны 90° и 150°. Найдите два других угла этого четырёхугольника.

45° и 75°

4. (*Московская устная олимпиада, 2013, 7.8*) Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, $\angle ABC = 120°$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B отмечены соответственно точки P и Q так, что $AP = CQ = AC$. Докажите, что угол PIQ — прямой.

5. (*«Ломоносов», 2019, 7–8.3*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса BD и высота CH. Из вершины C на биссектрису BD опущен перпендикуляр CK. Найдите угол HCK, если $BK : KD = 3 : 1$.

30°

6. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 8.6*) В треугольнике ABC провели медиану AM. Найдите угол AMC, если углы BAC и BCA равны 45° и 30° соответственно.

135°

7. (*Всеросс., 2019, МЭ, 8.3*) Высота CH, опущенная из вершины прямого угла треугольника ABC, делит биссектрису BL этого треугольника пополам. Найдите угол BAC.

30°

8. (*Всеросс., 2018, МЭ, 8.4*) В трапеции $ABCD$ точка M — середина боковой стороны CD. Лучи BD и BM делят угол ABC на три равные части. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD. Найдите углы трапеции.

$\angle A = 72°$, $\angle C = 54°$

9. (*ММО, 2009, 8.2*) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

Один из острых углов равен 36°

10. (*ММО, 2015, 8.2*) Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков AE и BC.

11. (*ММО, 2016, 8.3*) На медиане AM треугольника ABC нашлась такая точка K, что $AK = BM$. Кроме того, $\angle AMC = 60^\circ$. Докажите, что $AC = BK$.

12. (*Всеросс., 2018, МЭ, 8.6*) Точки M и N — середины сторон BC и AD четырёхугольника $ABCD$. Известно, что $\angle B = 150^\circ$, $\angle C = 90^\circ$ и $AB = CD$. Найдите угол между прямыми MN и BC.

13. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2012, 8–9*) В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, и $AB = BC = BD$. Высота BK пересекает диагональ AC в точке M. Найдите $\angle CDM$.

$\boxed{90^\circ}$

14. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2011, 8–9*) В равнобедренном треугольнике ABC на боковой стороне BC отмечена точка M так, что отрезок MC равен высоте треугольника, проведённой к этой стороне, а на боковой стороне AB отмечена точка K так, что угол KMC — прямой. Найдите угол ACK.

$\boxed{45^\circ}$

15. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2018.8*) На биссектрисе AL треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ADC = 3\alpha$, $\angle ACB = 4\alpha$. Докажите, что $BC + CD = AB$.

16. (*«Ломоносов», 2011, 9.8*) В равнобедренном треугольнике ABC провели биссектрису BP. Докажите, что если угол BAC равен 100°, то $AP + PB = BC$.

17. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2016.3*) В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания AD. Известно, что $\angle ABD = 90^\circ$ и $BC = CD$. На отрезке BD выбрана точка F такая, что $\angle BCF = 90^\circ$. Докажите, что $MF \perp CD$.

18. (*Олимпиада Эйлера и Всеросс., 2018, РЭ, 8.4, 9.3*) Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.

19. (*ММО, 2012, 8.4, 9.3*) В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

20. (*ММО, 2014, 8.4*) В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведённых перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

21. (*ММО, 2011, 8.5*) Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC, и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD, пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PD$.

22. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2013, 8–9*) В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане CL. Докажите, что в треугольнике BKL также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

23. (*Турнир городов, 2014, 8–9*) В треугольнике ABC угол C — прямой. На катете CB как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка N — середина этой полуокружности. Докажите, что прямая AN делит пополам биссектрису угла C.