Планиметрия. 2

1 Четыре точки на окружности

Три точки, не лежащие на одной прямой, всегда лежат на одной окружности (так как около любого треугольника можно описать окружность). А вот четыре точки в общем положении уже не обязаны располагаться на одной окружности. Если в сложной геометрической задаче удаётся установить, что какие-то четыре точки лежат на одной окружности, то это зачастую оказывается существенным продвижением к решению. Поэтому нужно свободно владеть свойствами и признаками расположения четырёх точек на окружности.

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Для того, чтобы его вершины были расположены на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих равенств:

(1) $\angle ABD = \angle ACD$;
(2) $\angle A + \angle C = 180°$;
(3) $KA \cdot KC = KB \cdot KD$, где K — точка пересечения диагоналей;
(4) $MA \cdot MB = MD \cdot MC$, где M — точка пересечения прямых AB и CD.

1. (*ММО, 2012, 8.4, 9.3*) В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

2. (*Всеросс., 2014, МЭ, 10.3*) Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

$\boxed{45°}$

3. (*«Ломоносов», 2015, 10–11.3*) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и DB перпендикулярны сторонам DC и AB соответственно. Из точки B проведён перпендикуляр на сторону AD, пересекающий AC в точке O. Найдите AO, если $AB = 4$, $OC = 6$.

$\boxed{2}$

4. (*МГУ, ДВИ, 2011.5*) Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка CK, если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырехугольника $KLCM$ можно описать окружность.

$\boxed{1}$

5. (*«Физтех», 2023, отбор, 11*) Окружность проходит через вершину B треугольника ABC и через его точку пересечения биссектрис I, причём прямая AI касается этой окружности. Пусть X и Y — точки пересечения сторон AB и BC соответственно с этой окружностью, а Z есть точка пересечения стороны AC с прямой IY. Найдите BY, если $XI = 3{,}5$; $AZ = 5$.

$\boxed{2{,}45}$

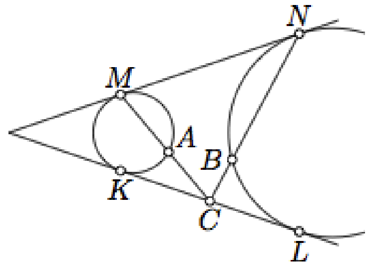
6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11.3*) Окружность радиуса 1 проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{3}$, $MK = 1$, а центр окружности находится внутри треугольника ABC на расстоянии 5 от точки C.

$\boxed{6\sqrt{3}}$

7. (*«Курчатов», 2014, 11.4*) В угол вписаны две непересекающиеся окружности. Одной стороны угла они касаются в точках K и L, другой — в точках M и N (см. рисунок), C — середина отрезка KL, A и B — точки пересечения отрезков CM и CN с окружностями. Докажите, что

а) точки A, B, M и N лежат на одной окружности;

б) точки A, B, K и L лежат на одной окружности.



8. (*ММО, 2016, 9.4*) Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне AC, пересекает сторону BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B, O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности.

9. (*«Курчатов», 2023, 11.4*) Дан параллелограмм $ABCD$ такой, что $\angle A = 60^\circ$. Пусть P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Оказалось, что точки A, P, Q, D лежат на одной окружности. Найдите $\angle ADB$.

$\boxed{75^\circ}$

10. (*ММО, 2018, 10.3*) Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Докажите, что прямая HP проходит через середину отрезка AB.

11. (*Всеросс., 2014, ЗЭ, 9.6*) Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

12. (*Всеросс., 2016, ЗЭ, 9.2*) Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

13. (*Всеросс., 2012, ЗЭ, 9.3*) Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C, пересекает описанную около него окружность в точке K. Докажите, что точки K, H, C и D лежат на одной окружности.

2 Лемма о трезубце и неравенство с IMO

На Международной математической олимпиаде в 2000 году была предложена следующая задача.

14. (*IMO-2000.2*) Произведение положительных чисел A, B, C равно 1. Докажите, что

$$\left(A - 1 + \frac{1}{B}\right)\left(B - 1 + \frac{1}{C}\right)\left(C - 1 + \frac{1}{A}\right) \leqslant 1.$$

Интересно, что данная алгебраическая задача допускает геометрическое решение. Именно этот геометрический подход мы и обсудим.

15. (*Лемма о трезубце*) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, I_A — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BC.

1) Докажите, что точки B, C, I, I_A лежат на одной окружности ω.

2) Докажите, что центр P окружности ω является серединой отрезка II_A и расположен на описанной окружности треугольника ABC.

3) Заключите отсюда, что справедлива *лемма о трезубце*: точка пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с его описанной окружностью равноудалена от точек B, C, I, I_A.

16. (*«Ломоносов», 2012, 10–11.5*) Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжение отрезка BO за точку O пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке D. Найдите угол B, если $OD = 4AC$.

$\boxed{2\arccos\frac{1}{8} = \arccos\left(-\frac{31}{32}\right)}$

17. (*Формула Эйлера*) Радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC равны R и r соответственно.

1) Точка I — центр вписанной окружности. Прямая AI вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A'. Докажите, что $IA \cdot IA' = 2Rr$.

2) Докажите *формулу Эйлера*:

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

где d — расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

18. Из формулы Эйлера следует простое неравенство, связывающее R и r. Какое? Достигается ли равенство?

19. Выразите R и r через стороны треугольника a, b, c и получите соответствующее неравенство на a, b, c.

20. Решите задачу IMO.